Vorlesungen über die Algebra der Logik (exakte Logik)

Ernst Schröder,
Jakob Lüroth,
Eugen Müller



VORLESUNGEN

ÜBER DIE

ALGEBRA DER LOGIK

(EXAKTE LOGIK)

VON

Dr. ERNST SCHRÖDER,

ORD. PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZU KARLSRUHE IN BADEN,
KORRESPONDIRENDEM MITGLIEDE DER BRITISH ASSOCIATION FOR THE ADVANCEMENT OF SCIENCE.

ERSTER BAND.

MIT VIEL FIGUREN IM TEXTE.

Der Mensch ist nicht geboren, das Problem der Welt zu lösen, wohl aber, zu suchen, wo das Problem angeht, und sich sodann in den Grenzen des Begreiflichen zu halten.
Goethe, Eckermann's Gespräche; Okt. 1825.

Ich sag' es dir: ein Kerl, der spekulirt,
Ist wie ein Tier, auf dürrer Haide
Von einem bösen Geist im Kreis herumgeführt,
Und rings umher liegt schöne grüne Weide.
Derselbe (Mephisto).



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1890.

Anzeige und Vorwort.

„Aus dem Titel wird der Leser ersehen, dass es sich nur um die sogenannte deduktive oder formale Logik handelt. Die rechnerische Behandlung der deduktiven Logik, durch welche diese Disziplin sich loslöst von den Fesseln, worein die Wortsprache durch die Macht der Gewohnheit den Menschengeist geschlagen, möchte wol die Bezeichnung als „exakte Logik“ *vorzugsweise* verdienen. Sie allein auch vermag den Gesetzen des folgerichtigen Denkens den schärfsten, konzisesten und übersichtlichsten Ausdruck zu geben und befindet sich zufolge dieses Vorzugs in der Lage, zahlreiche und bedeutungsvolle Lücken — wo nicht Fehler — der älteren Darstellungen zu offenbaren.

Seit dem Erscheinen von des Verfassers „Operationskreis des Logikkalkuls“ hat diese Behandlung noch höchst bedeutende Fortschritte gemacht: vor allem durch die Arbeiten des Amerikaners Charles S. Peirce und seiner Schule. Namentlich gebührt Herrn Peirce das Verdienst, die Brücke von den älteren blos verbalen Behandlungen jener Disziplin zu der neuen rechnerisch zuwerke gehenden geschlagen zu haben, eine Brücke, welche im Lager der Berufsphilosophen mit Recht vermisst worden und deren Fehlen es wol zuzuschreiben ist, dass die neue Richtung daselbst zum Teil nur mit Befremden aufgenommen wurde. Durch jene Arbeiten, in welche noch Verfasser nicht unwesentlich eingreift, ist die Theorie nun so weit entwickelt und vollendet, dass für einen ersten und Hauptteil des ganzen Lehrgebäudes bereits eine endgültige Darstellung und Anordnung als erreichbar erscheint.

Mit dem Bestreben, solche, soweit es in seinen Kräften steht, zu verwirklichen, verbindet Verf. zugleich die Absicht, von der schon sehr ansehnlichen Literatur, welche besonders in englischer Sprache einschlägig existirt, das Wertvollste in einheitlicher Darstellung zu einem Handbuch zu vereinigen.“

... Soweit die Anzeige. Inwieweit es mir gelungen, obiges Ideal zu verwirklichen, werden Diejenigen zu beurteilen in der Lage sein,

die das Buch studiren und die bisherige thunlichst vollständig von mir zusammengestellte Literatur mit in Vergleichung ziehen. Ungeachtet meines Strebens, das Werk so vollkommen wie nur möglich zu gestalten, kann — das verhehle ich mir keineswegs — dasselbe in mancher Hinsicht doch nur ein Kind seiner Zeit geworden sein. Gleichwol darf ich vielleicht die Hoffnung hegen, dass auch Vieles, was aus demselben hervorleuchtet, für alle Zeiten maassgebend bleiben wird.

Was sonst noch über die Eigenart des Buches zu sagen ist, findet sich in C der Einleitung dargelegt, und begnüge ich mich hier, nur einiges Wenige noch zu bemerken.

Durch den Anblick der Formeln des Buches ist es nahe gelegt im voraus zu statuiren: dass *mathematische Vorkenntnisse* oder irgend welche spezifische Fachkenntnisse in demselben *nicht vorausgesetzt* werden. Vielmehr passen auch hier die einer Dedekind'schen Schrift jüngst vorausgeschickten Worte: „Diese Schrift kann Jeder verstehen, welcher das besitzt, was man den gesunden Menschenverstand nennt". Aber auch dieses Wort wird gleichwol zutreffen (eines andern Autors): Die Schöngeister freilich, nicht gewöhnt an so strenge Anforderungen des Denkens, werden frühzeitig kehrt machen. —

Eine Ausnahme zu oben Gesagtem bildet nur der Anhang 7, der sich ausschliesslich an Mathematiker wendet, und vielleicht in einem geringen Grade noch der Anhang 5, indem er wenigstens den Begriff der mathematischen Funktion voraussetzt. Überhaupt aber dürfte eine Bekanntschaft mit den Elementen der Buchstabenrechnung, so weit sie etwa in Tertia eines Gymnasiums gelehrt zu werden pflegt, bei dem Leser als immerhin wünschenswert zu bezeichnen sein.

Vermittelnd wendet sich das Buch an zwei nur allzu verschieden disponirte Leserkreise: an die Mathematiker und an die Philosophen.

Wenn ich mit Ausführlichkeit auch solche Geistesoperationen bespreche, deren Analoga in ihrer Anwendung auf das Reich der Zahlen dem Mathematiker längst geläufig sind, so glaube ich mich für diese Ausführlichkeit entschuldigt halten zu dürfen nicht nur durch die wünschenswerte Rücksichtnahme auf den nicht mathematisch gebildeten Leser, sondern auch darum, weil es im didaktischen Interesse liegt, im Interesse auch einer Erziehung zum guten Lehrer, die Aufmerksamkeit zu zwingen, dass sie bei solchen Punkten verweile, bei denen der Anfänger zu straucheln oder Schwierigkeiten zu finden pflegt. Überhaupt liegt hier auch nicht der Fall vor, dass — wie in der Mathe-

matik — eine in den Grundzügen schon fertige Kunstsprache vorhanden ist, durch jahrhundertelangen Usus von jedem Doppelsinn gereinigt und zufolge dessen eine knappe Ausdrucksweise ermöglichend, sondern unsre junge Disziplin muss sich die ihr erforderliche Kunstsprache zum grossen Teil erst schaffen, und eventuell auch, soweit vereinzelte Anläufe dazu vorliegen, zunächst erst aus einer schon fast babylonischen Sprachverwirrung herauszukommen suchen.

Philosophen mögen andrerseits etwaige im Kontext erfolgende Seitenblicke auf Fragen von spezifisch mathematischem Interesse geneigtest mit in den Kauf nehmen.

Was auf Zahlen Bezug hat, fällt der Arithmetik anheim, die man ja als einen Zweig der deduktiven Logik (im weiteren Sinne) betrachten mag. Ich habe mich hier bemüht, das numerische Element der Logik nach Möglichkeit zurücktreten zu lassen und von ihm gesondert die Logik im engeren Sinne darzustellen. Die noch wenig zahlreichen Anwendungen, welche von den Begründern und Bearbeitern der logischen Algebra gemacht worden sind auf numerische Probleme — insbesondre als Studien über „numerisch bestimmte Syllogismen" und in Aufgaben der Wahrscheinlichkeitsrechnung — habe ich deshalb nicht in das System aufgenommen. Die Berücksichtigung der letzteren würde mich überdies genötigt haben, auf die Kontroversen einzugehen, welche über die Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung noch schweben. Solches, wie ich hoffe, nur auf eine andre Gelegenheit zurückstellend, begnügte ich mich zunächst, mit Anhang 7 wenigstens darzuthun, wie die neue Disziplin auch für Probleme der in Zahlen rechnenden Analysis verwertbar.

Seines Umfanges halber musste ohnehin das einheitlich veranlagte Werk in zwei Bände zerlegt werden.

Die allgemein-philosophisch gehaltene „Einleitung", mit ihren drei Teilen etwa drei von unsern Vorlesungen entsprechend, ist fast schon ein eigenes Buch geworden; und möchte ich an eine etwaige Kritik das Ersuchen stellen, dieselbe von dem Hauptinhalte des Werks, welcher mit der „ersten" Vorlesung beginnt, getrennt halten zu wollen. Besonders viel verdanke ich in Bezug auf sie dem Studium der Schriften von Sigwart, Mill und Jevons, aus der Lektüre von deren oft citirten Werken mir zuweilen auch eine Reminiscenz wol wörtlich in die Feder geflossen sein mag, ohne als solche in jedem Falle gekennzeichnet zu werden. Dem Lehrer habe ich unter μ) in A der Einleitung ein Mittel an die Hand gegeben um nötigenfalls diese ganz

zu überspringen und sogleich mit § 1 in medias res einzutreten: wer solches vorzieht, kann das jeweils Unumgängliche aus unsern Vorbetrachtungen nach Bedarf in die Theorie einschalten.

Für das Vierteljahrhundert, welches seit dem Erscheinen von Boole's „Laws of thought" nunmehr verflossen, gibt das Buch (noch mannigfach vermehrt) auch eine wol nahezu vollständige Sammlung aller Aufgaben, welche zu denkrechnerischer Lösung seither gestellt worden. —

Grossen Dank verdient jedenfalls der Verleger dafür, dass er es unternommen, eine so umfangreiche Schrift, welche so hohe und neue typographische Anforderungen stellte und sich in Deutschland ihren Leserkreis doch erst wird erobern müssen, zu drucken und in der vorliegenden Weise auszustatten.

Der Umstand, dass die deutsche Übersetzung von Liard's Schrift über die „Logiciens anglais contemporains", welche einer Kritik sich enthaltend nur über deren Arbeiten referirt, bereits die zweite Auflage erlebte, lässt mich indess hoffen, dass für die neue Richtung doch schon in weiten Leserkreisen ein Interesse vorhanden, und dass eine systematische und kritische Überarbeitung *und Weiterführung* dieser Forschungen um so willkommener sein werde.

Ich schliesse mit dem etwas verwegenen Wunsche, dass meine englischen und amerikanischen Mitarbeiter ihre Arbeiten in der meinigen geläutert wiederfinden und aus derselben nicht weniger Anregung und Förderung schöpfen mögen als ich aus den ihrigen geschöpft habe.

Karlsruhe in Baden, im März 1890.

Inhalt des ersten Bandes.

Fünfte Vorlesung.

Sechste Vorlesung.

Siebente Vorlesung.

Achte Vorlesung.

Neunte Vorlesung.

Zehnte Vorlesung.

Elfte Vorlesung.

Zwölfte Vorlesung.

Dreizehnte Vorlesung.

Vierzehnte Vorlesung.

Anhänge.

Der Vorverweisungen halber sei hier sogleich mit angeführt der

Inhalt des zweiten Bandes.

Fünfzehnte Vorlesung.

Sechzehnte Vorlesung.

Siebzehnte Vorlesung.

Berichtigungen.

Zum Titelblatt. Das Citat nach Goethe ist mit Liebmann leicht abgeändert. In Eckermann's Reminiscenz steht: die Probleme der Welt, sowie in der Grenze ...

Seite 1, Zeile 11 von oben statt zur Wahrheit lies: zu Wahrheit.
„ 28, „ 17 v. unten streiche das Wort: von.
„ 30, „ 14 v. u. st. 60 000 l. je 15 500.
„ 31, „ 12 v. u. st. *v. Helmholtz* l. v. Helmholtz.
„ 33, „ 20 v. u. st. Whewhell l. Whewell.
„ 34, „ 12 v. o. st. vivera l. vivra.
„ 35. Die hier aufgeworfne Frage dürfte sich nach einer mir gütigst zur Verfügung gestellten Bemerkung von Lüroth dahin erledigen, dass die Vorstellung *von* der Vorstellung eines Dinges als etwas von dieser letzteren selbst verschiedenes gar nicht existirt, in unsrer Bezeichnung, dass v_{v_p} identisch mit, blosse Reproduktion von v_p. „Wir können doch nur eine *Vorstellung* von einem Ding haben, das wir nicht »*an sich*« erkennen können und das irgendwie durch unsre Sinnesorgane in die Seele eintritt. Dies gilt alles von einer Vorstellung nicht" ... Das „Erinnerungsbild" einer Vorstellung dürfte in der That nur bestehen in einer Wiederholung von ebendieser.
„ 48, Zeile 17 v. u. st. zur Antwort l. zur *gleichen* Antwort.
„ 54, „ 4 v. o. st. Siune l. Sinne, Z. 17 v. o. st. früheren l. früherem.
„ 105, „ 21 v. u. st. De Morgan l. De Morgan.
„ 106, „ 10 v. o. st. letztere l. letzteren.
„ 108, „ 12 v. u. st. *Weismann* l. Weismann.
„ 110, „ 17 v. o. st. Sciaparelli l. Schiaparelli.
„ 123, „ 16 v. o. st. jedem l. jeden.
„ 156, „ 17 v. u. st. bestimmte l. bestimmte, resp. bedingte.
„ 160, „ 22 v. o. oder u. bei a) füge hinzu: Systeme.
„ 163, „ 12 v. u. st. Stass l. Stas.
„ 172, „ 7 v. u. streiche das Wort: den.
„ 198, „ 14 v. o. st. eklatantes l. prägnantes.
„ 209, „ 14 v. o. st. „$x \mathrel{=\!\!\in} ab$" setze „$ab \mathrel{=\!\!\in} x$".
„ 213, „ 14 v. u. st. § 31 lies § 16.
„ 219. Zu β') wären als *Ausnahme* anzuführen gewesen diejenigen Adjektive,

welche wie „vermeintlich, scheinbar, unecht, angeblich, fraglich, problematisch …" in Abrede oder in Frage stellen die Berechtigung des Namens, welcher dem sie regirenden Substantive beigelegt ist.

Seite 234, Zeile 9 v. u. st. Apposition l. (scheinbare) Apposition.
„ 241, „ 2 v. u. (Fussnote) st. ψ) l. χ).
„ 280, „ 2 v. o. st. Agehörige l. Angehörige.
„ 283, „ 4 v. u. (Fussnote) st. Dieselbe l. Der Name Assoziationsgesetz.
„ 1 v. u. st. Assoziations- l. Distributionsgesetz.
„ 292, „ 10 v. u. schliesse die Klammer hinter: überhaupt.
„ 295, „ 13 v. o. st. Partialprodukt l. Einzelprodukt.
„ 296, „ 21 v. u. st. gültiger l. gültige Formel.
„ 297, „ 15 v. u. st. eine hier l. eine verbal hier.
„ 299, „ 6 v. o. hinter: nächsten, schalte ein: an meinen Operationskreis[2] sowie.
„ 308, „ 13 v. u. st. $27_\times$) l. $\mathrm{III}_\times$.
„ 309, „ 7 v. u. st. ab l. $a_1 b_1$.
„ 316, „ 2 v. o. setze ein Komma hinter: notwendig.
„ 344, „ 8 v. o. st. Nichtkombattant" l. „Nichtkombattant".
„ 11 v. u. streiche das Wort: mit.
„ 345, „ 21 v. o. st. ψ) l. χ).
„ 354, „ 21 v. o. hinter Sätze einzuschalten: unter Andern.
„ 367, „ 17 v. o. st. deutscher l. der deutschen.
„ 370, „ 8 v. u. st. schown l. shown.
„ 371, „ 16 v. u. st. $12_\times$) l. 12).
„ 386, „ 7 v. o. st. 0 setze: $abc + ab_1c_1 + a_1bc_1 + a_1b_1c$.
„ 409, „ 9 v. o. st. $f(x_1\, 1, 0)$ l. $f(x_1, 1, 0)$.
„ 453, „ 20 v. u. st. R' l. R'.
„ 474, „ 3 und 17 v. u. st. $R(xyz)$ l. $R(x, y, z)$.
„ 505, „ 8 v. o. hinter: unsymmetrisch, anzufügen: bezüglich dieser Symbole, symmetrisch nur bezüglich x und y_1.
„ 546, „ 16 v. o. statt des ersten Terms a setze: ay_1.
„ 591, „ 6 v. u. st. dort selbst l. dortselbst.
„ 620, „ 13 v. u. st. $\frac{c}{b}$ l. $\frac{a}{b}$.
„ 673, „ 2 v. o. st. Typus 1 l. Typus 1.
„ 709, „ 4 v. u. wäre einzuschalten:

Nagy, Albino. 1) *Fondamenti del calcolo logico,* Memoria del …, Napoli, Pellerano. 1890, 35 Seiten; Vol. 28 von Battaglini's „Giornale di Matematiche".

Einleitung.

A. Vorbetrachtungen über Charakter und Begrenzung der zu lösenden Aufgabe mit Bemerkungen über Induktion, Deduktion, Widerspruch und folgerichtiges Denken. Denkendes Subjekt, seine Vorstellungen und die Dinge.

α) Die *Logik*, im weiteren Sinne des Wortes, beschäftigt sich mit all' den Regeln, durch deren Befolgung die Erkenntniss der Wahrheit gefördert wird. Sie hat es demnach mit den Methoden der Forschung überhaupt zu thun. Sie sucht die Frage zu beantworten: *wie* gewinnen wir Erkenntnisse, auf welchem Wege gelangen wir zur Wahrheit? Mithin, da Erfassen der Wahrheit ein Akt des Denkens ist, dürfen wir als Gegenstand der Logik überhaupt bezeichnen: das *Denken*, sofern es das *Erkennen* zum Endzweck hat.

Es steht dieses erkennende Denken im Gegensatz, vor allem, zum *Dichten*, zum phantasirenden Denken.

Desgleichen blosse *Erzählung* und *Beschreibung*, wenn schon sie nicht ohne Denkthätigkeit zustande kommen und unter sonst gleichen Umständen von einem logisch geschulten Kopfe vielleicht besser in Angriff genommen werden, bilden als solche noch ebenfalls nicht ein Thema der eigentlichen Logik. Ein gleiches wäre von der *gesetzgebenden Thätigkeit* zu sagen. Endlich auch diejenigen Denkvorgänge, welche bei Äusserung unsrer unmittelbaren Empfindungs- und Willenszustände mitspielen, also bei Ausrufen, Wunschäusserungen, Fragen, Bitten und Befehlen, zu denen die Sprache die Interjektionen und Fragepartikeln, sowie die Optativ- und Imperativform der Verba hergibt, gehören nicht in den Bereich der logischen Disziplin.

Mit *Übersetzung* aus einer Sprache in eine andere werden wir uns nur soweit zu beschäftigen haben, als es sich dabei um Übertragung von Aussagen aus unsrer nationalen Wortsprache in eine eigens zu begründende Kunstsprache des logischen Denkens, in die Formelsprache — oder umgekehrt — handelt.

β) Die Wissenschaften pflegen ausser dem Dasein erkennender Subjekte wesentlich vorauszusetzen, dass es auch etwas Erkennbares gebe, eine „Wahrheit“, und zwar in Bezug auf jede Frage nur *eine* Wahrheit, die von allen mit der unsrigen gleichartigen Intelligenzen, von allen im Besitz normaler Geisteskräfte befindlichen Menschen, *notwendig* als dieselbe erkannt werden muss, wofern jene sich nur die Mühe geben, sich in gleicher Weise in die für die Erkenntniss derselben günstigen Verhältnisse zu versetzen.

Die Vorfrage aber, *ob* und inwiefern Erkenntniss der Wahrheit überhaupt möglich ist, pflegt einer besonderen Disziplin zugewiesen und in dieser abgehandelt zu werden, die man als *„Erkenntnisstheorie“* bezeichnet.

Man hat dieselbe bald als eine Vorstufe der Logik hingestellt, bald auch hat man versucht, die ihr obliegenden Erörterungen in die Darstellung der Logik selbst einzuflechten.

Davon, dass das Ergebniss dieser Voruntersuchung *bejahend* ausfalle — und dies ist nicht unbestritten — würde hienach die Logik mit ihrer ganzen Existenzberechtigung abhängig erscheinen, wofern wir auch für sie die obengenannte „Voraussetzung der Wissenschaften (im allgemeinen)“ in Anspruch nehmen wollten.

Indessen könnte die gedachte Untersuchung doch jedenfalls nur mittelst Beweisführungen oder Widerlegungen, Schlüssen, Argumentationen nach den Regeln eben der Logik geführt werden, deren Existenzberechtigung erst aus ihrem Ergebniss zu entnehmen wäre, und so sähen wir uns von vornherein in einen fatalen Zirkel gebannt, wofern wir wirklich jene Voraussetzung schon für die Logik in Anspruch nehmen müssten.

Gezeigt zu haben, wie über die angedeutete Schwierigkeit hinwegzukommen ist, durch Lieferung des Nachweises, dass die Logik als eine formale Disziplin sich in der That davon auch unabhängig begründen lässt, erscheint vorzugsweise als Herrn Sigwart's Verdienst, und werden wir auf diesen Punkt noch näher einzugehen haben.

γ) Mit ihrem einen — dem gewöhnlich und wol mit Recht als zweiten aufgeführten — Teile, in Gestalt der nach Whately's und John Stuart Mill's Vorgange so genannten *„induktiven* Logik“, geht unsre Disziplin speziell auch auf die Grundsätze ein, nach welchen Beobachtungen und Versuche, Experimente anzustellen, nach welchen diese sowie Erfahrungen und Wahrnehmungen überhaupt zur Erweiterung der Erkenntniss zu verwerten sind. Die Logik untersucht hier näher

diese — wenn nicht einzige*) — so doch jedenfalls ursprüngliche und hauptsächliche Quelle des Erkennens, als welche die *Wahrnehmung*, Perzeption, hinzustellen ist.

Sie setzt auseinander, wie aus einzelnen, nötigenfalls sehr zahlreich gemachten Wahrnehmungen**) von unter sich ähnlicher Art durch einen kühnen Prozess der Verallgemeinerung — den „Induktionsschluss", die „*Induktion*" — allgemeine Sätze (Regeln oder Gesetze) ableitbar sind, welche auch die nicht mehr wahrgenommenen Fälle derselben Art in den Bereich unsrer Erkenntniss ziehen, uns Aufklärung über dieselben geben. Doch weist sie nach, dass dieser Aufschluss, diese Information, nicht unfehlbare Sicherheit, dass sie nicht absolute Gewissheit gewähren kann, wohl aber eine mehr oder minder hohe *Wahrscheinlichkeit*, Probabilität beansprucht, deren Grad sich beurteilen oder taxiren, sich abschätzen lässt.***)

Indem die induktive Logik auch auf diese Schätzung ausgeht, nach welcher sich der den Induktionsergebnissen zu schenkende Glaube bemisst, untersucht sie, wie einzelne Induktionen durch andere gestützt und gekräftigt, eventuell auch abgeschwächt oder gar durch neue Wahrnehmungen völlig entkräftet, umgestossen werden, und sucht zu ergründen, wie innerhalb der Schranken des menschlichen Könnens Induktionen anzustellen sind, damit sie möglichst glaubwürdige Ergebnisse liefern.

Auf diese, die induktive Logik, so hochwichtig und interessant sie auch ist, beabsichtige ich hier ganz und gar nicht einzugehen.†)

δ) Wir wollen uns auf ein viel engeres Gebiet beschränken, um

---

*) Dass Wahrnehmung die Urquelle aller Erkenntniss sei, wird — nachdem die Verfechter „angeborner" Erkenntnisse aus dem Felde geschlagen sind — nur noch von Denjenigen bestritten, die eine „göttliche Offenbarung" annehmen.

Als Wahrnehmung ist hier allerdings nicht blos die sog. „äussere" Wahrnehmung zu berücksichtigen, welche sich auf den Sinneseindruck stützt, sondern auch die „innere". Z. B. dass ich fröhlich oder traurig bin, spaziren gehen will, und dergleichen, nehme ich nicht durch die Sinne wahr, sondern werde dessen unmittelbar inne. „Wir empfinden auch die Spannkraft unsres Willens und die Anstrengung des Nachdenkens" (Lange).

Vergleiche hierzu noch γ_3) erste Fussnote.

**) Dieselben, wenn bis zur Bildung einer Vorstellung von dem wahrgenommenen Gegenstande entwickelt, heissen „Apperzeptionen".

***) Immerhin mit Einschränkungen — vergl. Herrn Johannes von Kries[1] gediegene Arbeit über Die Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung — siehe Literaturverzeichniss.

†) Es sei darüber auf die Werke von Mill[2], Sigwart[2], Apelt[1] u. A. verwiesen. Vergl. das Literaturverzeichniss am Schlusse, auf welches die im Text als Exponenten angesetzten Chiffren sich jeweils beziehen.

dasselbe um so gründlicher in Angriff zu nehmen und — in gewissen Richtungen wenigstens — um so vollständiger abzuhandeln, nämlich auf den ersten Teil der heute so genannten Logik, die Logik im engeren Sinne, Logik*) im Sinne der Alten.

Diese, die „*deduktive*" oder auch „formale"**) Logik beschäftigt sich mit den Gesetzen des *folgerichtigen* Denkens.

Worin die „Folgerichtigkeit" des Denkens bestehe, ist durchaus nicht leicht zu sagen. Ich will die Frage erst einer vorläufigen Besprechung unterziehen, um dann nochmals auf dieselbe zurückzukommen.

Zur Orientirung sei zunächst bemerkt, dass „folgerichtig" mehr wie „konsequent" besagt. Man kann auch konsequent verkehrt verfahren, konsequent unlogisch zuwerke gehen. Wenn ich ein Fremdwort, einen international rezipirten wissenschaftlichen Kunstausdruck für „folgerichtiges Denken" gebrauchen sollte, so wüsste ich dasselbe nicht anders, wie als „logisches" Denken zu bezeichnen.

ε) Ältere Autoren, wie Drobisch[1] und Ueberweg[1] in ihren so verdienstlichen Werken haben geglaubt, das Kennzeichen der Folgerichtigkeit des Denkens allein in der *Übereinstimmung dieses Denkens mit sich selbst* erblicken zu sollen.

Dass das Denken, wenn es folgerichtig genannt werden soll, zu

*) Den Namen führt die Disziplin bekanntlich zurück auf das griechische λόγος = das Wort, die Sprache, der Sinn, die Vernunft etc. Dass „Wort" und „Vernunft" solchergestalt homonym bezeichnet wurden, war nicht ganz ohne innere Berechtigung — in Anbetracht, dass die auf dem Wort beruhende *Sprache* und die menschliche *Vernunft* einander wirklich nicht entbehren zu können scheinen und in ihren successiven Entwickelungsstufen sich gegenseitig bedingen dürften. Die enge Beziehung unsrer Vernunft zur Sprache, von der schon Wilhelm v. Humboldt sagte, dass wir sie uns nicht enge genug vorstellen können, hat Lazarus Geiger zu einem interessanten Versuche veranlasst, die Entstehung der ersteren ganz aus der letzteren zu erklären — ein Versuch, der nach Heymann Steinthal's und Julius Keller's Kritik im wesentlichen als fehlgeschlagen zu betrachten — vergl. noch Benno Erdmann's Rezension in den Göttingischen gelehrten Anzeigen v. 1885 von Keller's Schrift[1], welcher letztern wir obige Angabe über W. v. Humboldt entlehnten.

Nach allem möchte, den menschlichen Verstand als ein durch die Wortsprache erst entwickeltes Erziehungsprodukt zu erklären, noch eben so viel Wahrheit und Übertreibung enthalten, als wie umgekehrt die Sprache das Werk eines konsequent denkenden Verstandes zu nennen.

Dass Letzteres in der That nicht durchaus der Fall ist, werden wir häufig Gelegenheit haben hier wahrzunehmen, wo uns auch eine Kritik dieses immerhin bewunderungswürdigen Instruments des Gedankenausdrucks mit obliegen wird.

**) „formale" in einem engern als dem S. 2 erwähnten Sinne.

Widersprüchen mit sich selbst nicht führen dürfe, ist unstreitig (auch) eine von diesem zu erfüllende Anforderung.

Wer auf sie das Kennzeichen der Folgerichtigkeit des Denkens zu gründen versucht, ist verpflichtet, zunächst auseinanderzusetzen, was ein „*Widerspruch*" ist.

Mannigfach sind die Arten oder möglichen Formen des Widerspruchs; es gibt deren versteckte oder *mittelbare*, und es gibt auch offene, *unmittelbare* Widersprüche.

Die ersteren vollständig aufzuzählen dürfte als ein hoffnungsloses Beginnen, Unterfangen erscheinen. Zur Charakterisirung der letztern dagegen lassen — an deren sprachliche Ausdrucksformen anlehnend — sich wol unschwer äusserliche Kennzeichen aufstellen.

Der Widerspruch kann schon in einer einzigen Aussage enthalten sein, die alsdann eine „sich selbst widersprechende" genannt werden mag.

Wer z. B. die Versicherung abgibt: „Ich kann nicht sprechen" oder wer dem ihn Besuchenden entgegenruft: „Ich bin abwesend, bin nicht zuhause, todt" und dergleichen, setzt sich dadurch in Widerspruch zu einer schon durch die blosse Existenz eben dieser seiner Aussage verbürgten (und damit einen gegenteiligen Ausspruch herausfordernden) Thatsache.

Wird einem Dinge, wovon gesprochen werden kann, einem Objekte des Denkens, im Prädikat der Aussage ein Merkmal *ab*gesprochen, welches im Subjekt dieser Aussage demselben *zu*gesprochen erscheint (oder umgekehrt), so kann man darin einen Widerspruch der Aussage mit sich selbst erblicken (sogenannte „contradictio *in adjecto*", d. h. im Prädikate) — so z. B. wenn wir sagten: „Ein kugelförmiger Körper ist nicht kugelförmig". Es waltet dabei allerdings mit die Unterstellung, dass es kugelförmige Körper gebe, oder dass solche wenigstens denkbar seien. (Vergleiche auch Hegel's vielberufenes: „Sein ist Nicht sein", und Anderes.)

Ähnlich verhält es sich mit Konditionalsätzen oder hypothetischen Urteilen, sobald der Folgesatz in Abrede stellt, was der Bedingungssatz vorauszusetzen forderte, z. B. „Wenn dies stattfindet, so findet es nicht statt." Hier sind die einander widersprechenden Satzteile und Teilsätze von einander abhängig gesetzt.

Als *Wesen des Widerspruchs* wird am besten erklärt die *Beziehung zwischen zwei selbständig hingestellten* Sätzen oder *Aussagen, von denen die eine* in Abrede stellt, *leugnet, was die andre behauptet.*

Gewöhnlich stellt man zwei Urteile: „A ist B" und „A ist nicht B" als allgemeine Form derartiger Aussagen hin, unter der Voraussetzung, dass unter A etwas und zwar in beiden Aussagen genau das nämliche verstanden werde, desgleichen unter B. Zum Beispiel, nachdem irgend eine Behauptung gefallen, werden die beiden Aussagen:

„*Diese Behauptung ist wahr*", und „*Diese Behauptung ist nicht wahr*" einen reinen Widerspruch bilden.

Der sogenannte „*Satz des Widerspruchs*", der für die Logik eine fundamentale Bedeutung besitzt, fordert anzuerkennen, *dass einunddieselbe*

Behauptung, im nämlichen Sinne verstanden, nicht zugleich wahr und nicht wahr sein könne.

So drücken ferner die Paare von Sätzen: Der Mars ist bewohnt; Der Mars ist nicht bewohnt, Alle Menschen sind vollkommen; Alle Menschen sind nicht vollkommen, je einen Widerspruch aus — wenn auch vielleicht nicht in der oben als Ideal des reinen Widerspruchs hingestellten Weise — und letzteres würden sie auch noch thun, wenn man statt der Worte „nicht bewohnt", „nicht vollkommen" bezüglich „unbewohnt", „unvollkommen" in ihnen setzte (wo dann für den letzten Satz auch „Kein Mensch ist vollkommen" sich sagen lassen würde.)

Dagegen die beiden Sätze:

Einige Menschen sind klug; Einige Menschen sind nicht klug

drücken keinen Widerspruch aus, schon darum, weil hier das Subjekt derselben dargestellt wird durch den mehrsinnigen, äquivoken Namen „Einige Menschen", unter dem im ersten Satze ganze andere Menschen verstanden werden, wie im zweiten.

Auf die erwähnte Form lassen auch die vorhergehenden Beispiele sich zurückführen, indem man dieselben zusammenhält mit den als selbstverständlich anzuerkennenden Sätzen: „Wenn dies stattfindet, so findet es statt" resp. „Ein kugelförmiger Körper ist kugelförmig".

Ob aber jene zwei Urteile über A und B wirklich und in allen Fällen das Wesen des Widerspruchs in dem darüber erklärten Sinne darstellen, dies zu entscheiden muss eingehenderen Untersuchungen vorbehalten bleiben. (Vergl. § 15.)

Wollen wir vorsichtig verfahren, ganz sicher gehen, so müssen wir als das Vorbild, die *„typische" Form des unmittelbaren Widerspruchs* die Gegenüberstellung zweier Sätze nehmen, welche (wie in der That die vorhin kursiv gedruckten) zum Subjekt einunddieselbe *Behauptung* haben, zum Prädikat aber bezüglich „wahr" und „nichtwahr" oder „gültig" und „ungültig". Direkten Widerspruch erblicken wir zwischen irgend einer (als gültig hingestellten, mit der Versicherung ihrer Gültigkeit abgegebenen) Aussage (zwischen einer „Behauptung") und einer zweiten Aussage, welche die Ungültigkeit der ersten behauptet.

Bei versteckten Widersprüchen kann man verlangen, dass sie auf unmittelbare zurückgeführt werden, und zwar wie? — Nun natürlich wiederum durch folgerichtiges Denken. So kämen wir denn zunächst zu dem Zirkel, für „folgerichtig" dasjenige Denken zu erklären, welches aus sich selbst *und* durch sich selbst nicht zu direkten Widersprüchen führt. Dasselbe dürfte also widersprechende Prämissen (als Überzeugungen) nie zulassen und von (als Überzeugung) zugelassenen Prämissen zu Widersprüchen nie führen. Nun kann man ja aber, ehe man diejenigen Folgerungen oder Denkhandlungen vollzieht, welche den unmittelbaren Widerspruch liefern würden, allemal ganz willkürlich abspringen, und so erscheint die Erklärung als vollkommen nichtssagend, solange ihr nicht die Voraussetzung mit zugrunde gelegt wird,

dass das Denken nach bestimmten Normen, Vorschriften, Schemata oder Gesetzen überhaupt stattfinde oder stattzufinden habe.

Sollen diese Gesetze solche des folgerichtigen Denkens sein, so wird das Denken, wenn es gemäss denselben stattfindet, aus sich selbst nicht zu Widersprüchen führen dürfen.

Immerhin, auch wenn man niemals von *gegebenen* Gesetzen abweicht, bleibt aber die Möglichkeit, durch Enthaltung von gewissen Schlussfolgerungen dem Widerspruch ständig auszuweichen, sich z. B. in einem Zirkel immerfort zu bewegen, welcher solchen Widerspruch nicht berührt. So wenigstens, sobald der Gedankenverlauf durch jene Gesetze nicht vollkommen bestimmt erscheinen sollte — wie wir uns denn in der That bewusst sind (auch bei folgerichtigem Denken) uns doch den verschiedensten Dingen in freier Entschliessung noch zuwenden, beliebigen Stoffs uns bemächtigen, kurz: in sehr verschiedenen Richtungen noch weiterdenken zu können.

Es würde demnach die Widerspruchslosigkeit des „folgerichtigen" Denkens *als Kennzeichen desselben* sich höchstens aufrecht erhalten lassen, wenn sie gefordert wird für den *ganzen* Bereich der nach den Gesetzen dieses Denkens noch möglichen Denkhandlungen oder Schlussfolgerungen.

Ob dies nun eine *hinlängliche* Bestimmung für die Folgerichtigkeit des Denkens ergäbe, scheint eine schwierige Frage zu sein. Für bestimmt begrenzte Gedankensphären, wenigstens, glaube ich dieselbe verneinen zu müssen und dünkt mich, dass gerade die im gegenwärtigen Buch entwickelte Theorie dieses folgerichtigen Denkens Material dafür liefert, um (hiefür) die Unzulänglichkeit jener Begriffsbestimmung besonders schlagend darzuthun.

Hier nämlich wird dieses Denken, auf seinen knappsten Ausdruck reduzirt, sich als ein *Kalkul* darstellen. Nun lassen aber zahllose in sich vollkommen konsequente Kalkuln sich aufstellen, die gleichwol nichts weniger als die Gesetze des logischen Denkens ausdrücken, und die, weil sie derselben Zeichen sich bedienen, doch auch als Gesetze eines gewissen Denkens gedeutet werden könnten. Der logische Kalkul ist in der That nur einer von unzähligen in sich widerspruchsfreien Kalkuln — die aber in ihren Grundgesetzen oft äusserst weit von einander abweichen.

Wofern nur die unbeschränkte Deutungsfähigkeit solcher Kalkuln, ihre Anwendbarkeit auf alle erdenklichen Objekte des Denkens, sich auch von vornherein absehen liesse, würde ich keinen Anstand nehmen, schon überhaupt die Konsistenz, oder Verträglichkeit mit sich selbst,

für allein noch nicht ausreichend zu erklären, um die Gesetze des logischen Denkens zu bestimmen. Solange aber Obiges noch ununtersucht geblieben, brauchen wir zu der Frage auch nicht definitiv Stellung zu nehmen.

Der vorstehend genommene Anlauf dürfte indess schon genügen, um erkennen zu lassen, dass der Versuch, von dieser Seite die Aufgabe in Angriff zu nehmen, in grosse Schwierigkeiten von vornherein verwickeln muss.

Nicht überflüssig scheint es, erinnernd hervorzuheben, dass vorstehende Betrachtung sich beschränkte auf das Gebiet rein deduktiver Denkhandlungen, wobei also eine Berufung auf neue Erfahrungen von vornherein ausgeschlossen war.

Wenn dagegen auch diejenigen Widersprüche mit in Berücksichtigung gezogen werden sollten, welche eintreten können zwischen unsern Denkhandlungen und dem Zeugniss der Sinne, den Thatsachen der Wahrnehmung (genauer den durch letztere unweigerlich provozirten Denkhandlungen oder Urteilen), so dürfte die Frage sich anders stellen.

War auch dieselbe für das erwähnte engere Gebiet vielleicht verneinend zu entscheiden, so bleibt es unbenommen, sie für das weitere Gebiet alles Denkens überhaupt noch in gewissem Sinne zu bejahen, nämlich als das Kriterium der Wahrheit für die Gesamtheit unsrer Überzeugungen doch hinzustellen die durchgängige und widerspruchslose Übereinstimmung alles auf diese gegründeten Denkens mit sich selbst, sofern dieselbe auch bei allem ferneren Zuwachs an Erfahrung sich fort und fort bewährt und von dem Bewusstsein folgerichtigen Schliessens schon gestützt und getragen ist. Jedenfalls wird hierbei (wenn solcher Zustand erreicht) das Denken sich immer schon beruhigen und faktisch jeder Zweifel schwinden.

ζ) Es wird demnach zu billigen sein, dass von neueren Schriftstellern der vorstehend charakterisirte Standpunkt auch nicht mehr eingenommen wird. Vielmehr findet sich von den meisten, die die Frage berühren, der Umstand anerkannt, um welchen sich augenscheinlich durchaus nicht herumkommen lässt, dass dem Begriff des folgerichtigen Denkens eine Annahme, ein Dogma zugrunde liegt, welches sozusagen den „Glauben des Logikers“ bildet.

Wir haben unter β) eine solche Annahme bereits als eine Voraussetzung der Wissenschaften (im allgemeinen) angedeutet, müssen jedoch für die formale Logik die Annahme anders und enger fassen.

In einer durchaus haltbaren Weise scheint mir solches vonseiten Sigwart's geschehen, aus dessen lesenswertem Werke[1] ich hier besonders die Lektüre der Einleitung und namentlich der Paragraphen 1 und 3 der letzteren empfehle.

Die darin gegebenen Ausführungen des genannten Autors vermöchte ich einerseits nicht besser darzustellen und möchte dieselben auch nicht

mit andern Worten wiedergeben und andrerseits sind dieselben doch zu umfangreich als dass es ratsam erscheinen könnte, sie hier wörtlich aufzunehmen.

Wenn ich daher mich damit begnüge — verknüpft mit anderweitigen Betrachtungen —, hier nur den Grundgedanken Sigwart's zur Darstellung zu bringen, so darf nicht verhehlt werden, dass derselbe, solchergestalt herausgerissen aus dem festen Gefüge seiner Ausführungen, vielleicht an überzeugender Kraft verliert.

Folgerichtig oder *logisch* mögen wir (mit Sigwart) das Denken nennen, wenn es für den prüfenden Verstand mit dem Bewusstsein der *Selbstverständlichkeit* oder *Evidenz* verknüpft ist, wenn eine *„Denknotwendigkeit"* uns zwingt, dasselbe *mit der Überzeugung absoluter Gewissheit* zu vollziehen.*)

Es bedarf diese Erklärung indess mehrfacher Erläuterungen und Ergänzungen.

Zunächst: der rein persönliche Charakter, das subjektive Moment, welches der Folgerichtigkeit des Denkens nach obiger Erklärung anzuhaften scheint, wird aufgehoben, das folgerichtige Denken wird dieser Besonderheit entkleidet durch den Glauben, *dass es eine für alle Intelligenzen verbindliche* — weil eben objektiv begründete — *Denknotwendigkeit gebe.*

„Widersprüche" kann dieses Denken darum nicht enthalten, auch nicht zu solchen mit sich selber führen, weil es eben dem Verstande unmöglich fällt, solche mit Bewusstsein zu vereinigen, weil jene Denknotwendigkeit uns namentlich zwingt, von zwei einander direkt (kontradiktorisch) widersprechenden Urteilen das eine anzunehmen, das andre zu verwerfen.

Die Induktionsschlüsse können, wie schon angedeutet, die Überzeugung absoluter Gewissheit, ganz unfehlbarer Wahrheit, *nicht* gewähren**) und gehören demnach samt allem empirischen Erkennen, nicht in den Bereich des folgerichtigen Denkens.

Für letzteres bleiben als das Substrat, welches somit das Thema der deduktiven Logik zu bilden hat, nur übrig:

Erstens die sogenannten *„analytischen Wahrheiten"*, „Truismen", sich darstellend als *„identische Urteile"* — wofür als ein Beispiel hier nur etwa der Satz angeführt sei: „Alle schwarzen Krähen sind schwarz." Es sind das Urteile, welche unabhängig von allen Erfahrungsthatsachen

*) Die Leichtigkeit, mit welcher diese Erklärung auch scheint missbraucht werden zu können, benimmt derselben nichts von ihrer Richtigkeit.

**) Denn was auch tausendmal schon gleichmässig eingetroffen, braucht darum doch nicht das 1001te Mal wieder einzutreffen.

die Überzeugung von ihrer Wahrheit in sich selbst tragen, zu deren Anerkennung wir gezwungen sind kraft des Sinnes, den wir den Worten beilegen.

Mit Lotze[1] (p. 573) zu reden, wäre schon die Thatsache der Selbstverständlichkeit bei solchen Urteilen, bei den „apriorischen Wahrheiten" merkwürdig.

Soweit dieselben auf die *Zahl* Bezug haben, werden hier diese Urteile grösstenteils den arithmetischen Spezialwissenschaften überlassen.

Im übrigen werden diese, zwar eine unentbehrliche Grundlage alles Denkens bildenden, aber ebendeswegen als überflüssiger Ausdruck des Selbstverständlichen gewöhnlich mit Übermut übergangenen Urteile in diesem Buche eine besonders eingehende Beachtung finden. Unsre Betrachtungen würden uns sogar in den Stand setzen, diese Urteile innerhalb irgend welcher Grenzen, die durch eine nicht zu überschreitende Komplikation ihres Ausdrucks gegeben werden mögen, gewünschtenfalls mit Leichtigkeit auch *vollständig* aufzuzählen.

Zweitens bleibt das denknotwendige *Fortschreiten von schon vorhandenen Überzeugungen* *), sei es wirklichen, sei es blos vermeintlichen Erkenntnissen, *zu neuen Überzeugungen* (wirklichen resp. fraglichen Erkenntnissen), das ist eben die eigentliche *Deduktion*. .Und deren Gesetze zu erforschen, wird unsre Hauptaufgabe bilden.

Nach dem Gesagten dürfen, wenn jenes Fortschreiten ein rein deduktives sein soll, in dessen Verlauf keine neuen Wahrnehmungen an den Dingen selbst, um deren Erkenntniss es sich handelt, hinzugezogen, es darf nicht an Erfahrungsthatsachen dabei appellirt werden, die nicht unter den „schon vorhandenen", den zum Ausgangspunkt der Deduktion genommenen Erkenntnissen oder Überzeugungen bereits einregistrirt wären. Diese heissen die *„Prämissen"* und die aus ihnen abgeleiteten Überzeugungen oder Erkenntnisse heissen die *„Konklusionen"* der Deduktion; der Übergang von den erstern zu den letztern wird (deduktives) *Schliessen, Folgern* genannt.

Gleichwol verzichtet die Deduktion nicht ganz auf das mächtige Hülfsmittel der Wahrnehmung. Zugelassen nämlich sind Beobachtungen an den Namen oder *Zeichen* der Dinge. Gerade in ihren höchsten Formen, wenn die Deduktion die verwickeltsten ihrer Aufgaben *rechnerisch* bewältigt, zeigt sich solches Beobachten der Zeichen als ein wesentliches und charakteristisches Merkmal derselben. Ein Blinder wird bei gleicher Begabung, eben wegen seines mangelhaften Beobachtungsvermögens in der angedeuteten Richtung, dergleichen deduk-

---

*) Diese können auch provisorisch angenommene, können blosse „Annahmen" (Hypothesen) sein.

tive Aufgaben nicht so leicht zu lösen im Stande sein, wie ein Sehender. Und auf der Gründlichkeit und Sorgfalt, mit der*) Beobachtungen dieser Art immer ausgeführt werden können, beruht mit die grosse Zuversicht, mit welcher wir die Ergebnisse der Deduktion acceptiren.

Indem unter den Prämissen des deduktiven Schliessens auch solche Sätze figuriren können, welche das Ergebniss einer Wahrnehmung an den Objekten der Untersuchung selbst und ferner auch von auf dergleichen Wahrnehmungen gegründeten Induktionsschlüssen darstellen, mithin als absolut zuverlässig nicht angesehen werden dürfen, liefert uns die Deduktion namentlich ein Mittel, die Richtigkeit gemachter Induktionen durch das, was denknotwendig aus ihnen folgt, durch ihre Konklusionen oder Konsequenzen zu *prüfen*. Sobald sich auch nur *eine* von diesen Konsequenzen mit den Thatsachen oder als zuverlässig anzusehenden, ferneren Wahrnehmungsergebnissen unvereinbar erweist, ist mindestens eine von den nicht denknotwendigen Prämissen zu verwerfen. Solange dagegen auch alle ihre Folgerungen sich empirisch bewahrheiten, können die Induktionsschlüsse aufrecht erhalten und zur Grundlage einer „*Theorie*" genommen werden, welche die Erscheinungen zusammenfassend zu beschreiben und zu erklären beansprucht.

Auf diese Weise wird die Deduktion zu einem mächtig fördernden Hülfsmittel aller induktiven Wissenschaften. Wogegen sie ihrerseits, wie wir gesehen haben, der Induktion nicht nur entraten kann, sondern vielmehr dieselbe ausschliefst. Dieser Umstand rechtfertigt auch das Voranstellen der deduktiven vor die induktive Logik.

η) Wenn vorstehend wiederholt von einer „*Denknotwendigkeit*" gesprochen wurde, so ist (mit Sigwart) darauf aufmerksam zu machen, dass sich von einer solchen in zweierlei Sinne reden lässt.

Wir haben eine physikalisch-physiologisch-psychische, die „*psychologische*" oder *subjektive* Denknotwendigkeit zu unterscheiden von der „*logischen*" oder *objektiven*.

Die *erstere* ist der Grund, weshalb ein Mensch gerade so denkt, wie er eben wirklich denkt. „Psychologisch betrachtet mag man alles, was der Einzelne denkt, für notwendige, d. h. gesetzmässig aus den jeweiligen Voraussetzungen erfolgende Thätigkeit ansehen; dass gerade

*) Zufolge des Verharrens, der Beständigkeit oder Permanenz der Schriftzeichen — weil m. a. W. ein x sich nie von selber in ein u verwandelt.

dies und nichts anderes gedacht wird, ist notwendige Folge des Vorstellungskreises, der Gemütsstimmung, des Charakters, der augenblicklichen Anregung, welche das einzelne Individuum erfährt" (Sigwart[1], p. 5 u. 6). Diese Notwendigkeit ist für den Denkenden eine absolute; aber für verschiedene Menschen, und für dieselbe Persönlichkeit bei verschiedenen Gelegenheiten, ist sie oft verschieden; sie gebiert, ruft hervor da richtiges, dort falsches, unlogisches Denken. Thatsächlich wird ja sehr vielfach auch unlogisch gedacht.

Die andre, die *letztere* Notwendigkeit scheint weniger leicht zu fassen. Gerade sie aber, indem sie dem Denken die Folgerichtigkeit vorschreibt (und unter Umständen auch aufnötigt), ist diejenige Denknotwendigkeit, die wir bei obigen Erklärungen im Sinne hatten.

ϑ) Sie würde sich — zunächst als ein noch unverwirklichtes Ideal — charakterisiren lassen als diejenige Notwendigkeit, welche unser Denken beherrschen muss, wofern es seinen Zweck erreichen soll: das Erkennen.

In der That: nicht um *Natur*gesetze des Denkens handelt es sich in der Logik (diese als die Gesetze, nach denen wirklich gedacht wird, bleiben der Psychologie überlassen), sondern um *normative* Gesetze, Gesetze, welche die Richtschnur, Norm des Denkens bilden müssen, damit es jenen Zweck des Erkennens erreiche. Im Hinblick auf ihre Beziehung *zu*, Abhängigkeit *von* diesem Zwecke wäre also diese Denknotwendigkeit auch als eine relative zu bezeichnen.

Sie wäre, genauer gesagt, hinzustellen als der Inbegriff aller der Gesetze, allgemeinen Schemata oder Methoden, durch deren Befolgung man erstens *von richtigen Überzeugungen, Erkenntnissen ausgehend, stets wieder nur zu richtigen Erkenntnissen geführt wird*, und zweitens, sofern solchen Gesetzen etwa auch *selbständige Urteile* entspringen sollten, gemäss welcher *nur absolut gewisse und wahre gebildet werden können.*

Nun frägt sich aber: wie lässt sich solches Ideal verwirklichen?

Empirisch, indem man diese oder jene Gesetze für alle Fälle durchprobirt, gewiss nicht! Nicht allein bleiben auch die für am sichersten gehaltenen unsrer Überzeugungen immer noch der Anzweifelung, Skepsis, ausgesetzt, sondern es wäre jedenfalls auch aussichtslos, die unendliche Fülle der Möglichkeiten erschöpfend durchgehen zu wollen.

ι) Wie lässt sich dennoch jenes objektiv notwendige Denken von dem zufälligen, dem subjektiv verschiedenen unterscheiden? Da wir aus der Jurisdiktion unsrer subjektiven Denknotwendigkeit doch

niemals herauszutreten, uns nie von dieser zu emanzipiren vermögen, so müssten wir solches für ganz hoffnungslos erklären, wenn uns nicht gelegentlich in Gestalt des intuitiven oder unmittelbaren „Einleuchtens“ die Empfindung der Evidenz zuhülfe käme, wenn wir nicht an dem Bewusstsein der letzteren jenes erstere Denken erkennten.

Eine leidenschaftslose eingehende Prüfung der Form unsres Denkens durch unsern Verstand verschafft uns (mit subjektiver Denknotwendigkeit) die Überzeugung, lässt es uns als evident erkennen, dass es allgemeine Gesetze für das im obigen Sinne „folgerichtige“ Denken gibt, und wie sie beschaffen sein müssen.

Die Erfahrung dieses unmittelbaren Bewusstseins der Evidenz, welches einen Teil unsres Denkens begleitet, und der Glaube an seine Zuverlässigkeit — und demzufolge auch Gemeinverbindlichkeit — ist ein Postulat, über welches nicht zurückgegangen werden kann. *Der Glaube an das Recht dieses Gefühls ist der letzte Ankergrund aller Gewissheit überhaupt.* Wer dieses nicht anerkennt, für den gibt es keine Wissenschaft, sondern nur zufälliges Meinen (Sigwart[1], p. 15).

κ) In dem Streben nach unserm Ziele darf uns sonach die Überzeugung trösten, dass unter bestimmt erkennbaren Umständen die objektive Denknotwendigkeit, auf die wir fahnden, allemal auch zur subjektiven wird. Namentlich fallen beide Denknotwendigkeiten auch immer dann zusammen, wenn es sich um die Vereinigung von unmittelbaren Widersprüchen handelt.

Sehr treffend sagt in dieser Beziehung F. A. Lange[1] p. 27 und 28:

„Der Satz des Widerspruchs ist der Punkt, in welchem sich die *Naturgesetze* des Denkens mit den *Normalgesetzen* berühren. Jene psychologischen Bedingungen unsrer Vorstellungsbildung, welche durch ihre unabänderliche Thätigkeit im natürlichen, von keiner Regel geleiteten Denken sowol Wahrheit als Irrtum in ewig sprudelnder Fülle hervorbringen, werden ergänzt, beschränkt und in ihrer Wirkung zu einem bestimmten Ziele geleitet durch die Thatsache, dass wir Entgegengesetztes in unserm Denken nicht vereinigen können, sobald es gleichsam zur Deckung gebracht wird. Der menschliche Geist nimmt die grössten Widersprüche in sich auf, solange er das Entgegengesetzte in verschiedene Gedankenkreise einhegen und so auseinanderhalten kann; allein wenn dieselbe Aussage sich unmittelbar mit ihrem Gegenteil auf denselben Gegenstand bezieht, so hört diese Fähigkeit der Vereinigung auf; es entsteht völlige Unsicherheit, oder eine der beiden Behauptungen muss weichen. Psychologisch kann freilich diese Ver-

nichtung des Widersprechenden vorübergehend sein, insofern die unmittelbare Deckung der Widersprüche vorübergehend ist. Was in verschiedenen Denkgebieten tief eingewurzelt ist, kann nicht so ohne weiteres zerstört werden, wenn man durch blosse Folgerungen zeigt, dass es widersprechend ist. Auf dem Punkte freilich, wo man die Konsequenzen des einen und des andern Satzes unmittelbar zur Deckung bringt, bleibt die Wirkung nicht aus, allein sie schlägt nicht immer durch die ganze Reihe der Folgerungen hindurch bis in den Sitz der ursprünglichen Widersprüche. Zweifel an der Bündigkeit der Schlussreihe, an der Identität des Gegenstandes der Folgerung schützen den Irrtum häufig; aber auch wenn er für den Augenblick zerstört wird, bildet er sich aus dem gewohnten Kreise der Vorstellungsverbindungen wieder neu und behauptet sich, wenn er nicht endlich durch wiederholte Schläge zum Weichen gebracht wird.

Trotz dieser Zähigkeit des Irrtums muss gleichwol das psychologische Gesetz der Unvereinbarkeit unmittelbarer Widersprüche im Denken mit der Zeit eine grosse Wirkung ausüben. Es ist die scharfe Schneide, mittelst welcher im Fortgang der Erfahrung allmälig die unhaltbaren Vorstellungsverbindungen vernichtet werden, während die besser haltbaren fortdauern.*) Es ist das vernichtende Prinzip im natürlichen Fortschritt des menschlichen Denkens, welches, gleich dem Fortschritt der Organismen darauf beruht, dass immer neue Verbindungen von Vorstellungen erzeugt werden, von denen beständig die grosse Masse wieder vernichtet wird, während die bessern überleben und weiter wirken.

Dieses *psychologische* Gesetz des Widerspruchs bedarf natürlich zu seinem Bestande und zu seiner Wirksamkeit keiner Anschauung. Es ist unmittelbar durch unsre Organisation gegeben und wirkt vor jeder Erfahrung als Bedingung aller Erfahrung. Seine Wirksamkeit ist eine objektive und es braucht nicht erst zum Bewusstsein gebracht zu werden, um thätig zu sein.

Sollen wir nun aber dasselbe Gesetz als Grundlage der *Logik* auffassen, sollen wir es als *Normalgesetz* alles Denkens anerkennen, wie es als *Naturgesetz* auch ohne unsre Anerkennung wirksam ist, dann allerdings bedürfen wir hier so gut wie bei allen andern Axiomen der typischen Anschauung, um uns zu überzeugen . . . " **)

---

*) Auch hier ein „survival of the fittest", Überleben der Tauglichsten. Der Verf.

**) Ich breche das Citat mit Absicht erst bei diesen Worten ab, welche zwar von andern Seiten bestritten, doch jedenfalls für die der Lange'schen Schrift zugrunde liegende Gesamtauffassung bezeichnend sind.

Insbesondre bringt der Gang wissenschaftlicher Forschung es fortwährend mit sich, dass Streit geschlichtet wird durch Verfolgung falscher Sätze in ihre Konsequenzen, und jeder apagogische Beweis ist ein Beispiel dieses Verfahrens (Sigwart[1], p. 13).

λ) Im Hinblick auf die enormen unter den Menschen herrschenden *Meinungsverschiedenheiten* und auf die Thatsachen des *Irrtums* und des *Streites*, scheint auf den ersten Blick ein Glaube an die Gemeinverbindlichkeit folgerichtigen Denkens nur schwer aufkommen zu können.

In diesem Glauben lässt sich die Logik gleichwol nicht beirren. Sie nimmt an, dass jene Fakta nicht sowol im Intellekte begründet sind, als vielmehr ganz andern Ursachen zur Last fallen.

Zumeist entspringen jene Meinungsverschiedenheiten schon aus der Nichtübereinstimmung der Prämissen des Schliessens, deren Erfassung bei verschiedenen Denkern nach verschiedenen Richtungen mangelhaft erscheint und die sich häufig nicht zu dem wünschenswerten Grade der Klarheit im Bewusstsein emporgearbeitet haben, über die denn auch eine hinreichende Verständigung nicht stattgefunden hat. Viele Menschen verschliessen auch ihr Bewusstsein gewissen Erkenntnissen.

Doch, sofern selbst die Prämissen deduktiven Schliessens noch leidlich übereinstimmen, sind die Schlussfolgerungen oft noch verschieden wegen mangelnder oder unvollständiger, nicht gründlich genug vollzogener Prüfung der im Bewusstsein aufgenommenen Objekte des Denkens durch den Verstand vonseiten des einen oder andern Denkenden. Solches kann veranlasst sein durch Denkfaul- (oder zarter ausgedrückt: -träg)heit, Schwerfälligkeit auf der einen Seite, durch die Scheu vor der geistigen Anstrengung nicht nur im gegebenen Falle, sondern auch durch den Mangel an Denkfertigkeit und Gewandtheit, an geistiger Schulung und Disziplin im Denken, welche jene Disposition im Gefolge zu haben pflegt — und der grossen Menge gilt in der That das „Kopfzerbrechen" für die allerunangenehmste Arbeit. Andrerseits wird häufig Ungeduld und Übereilung, ein lapsus attentionis etc., auf das Zustandekommen fehlerhafter Schlüsse hinwirken. So in der That schon bei ganz aufrichtigen Überzeugungen.

Dazu kommt aber noch die Dazwischenkunft, Intervention des Gemütes mit seinen Leidenschaften, welche dahin wirken, dass der Mensch, mitunter sich selbst unbewusst, oder auch sich beschwindelnd, einer in seinem (wirklichen oder vermeintlichen) Interesse liegenden, einer ihm genehmen, erwünschten, schmeichelhaften Konklusion den Vorzug zu geben sucht vor der logisch berechtigten. Namentlich kommt oft das Übergewicht in Betracht, welches die Eitelkeit mit in die Wagschale legt, indem sie den Menschen geneigt macht, bei eingewurzelten, überhaupt bei den einmal von ihm gefassten Meinungen mit dem Dünkel der Unfehlbarkeit zu verharren, und Anderes mehr. Die Logik von Port-Royal[1] schon entrollt uns ein aus feiner Beobachtung hervorgegangenes psychologisches Bild in beregter Hinsicht.

Man könnte auch die Frage aufwerfen, ob für den weiblichen Intellekt dieselbe Denknotwendigkeit verbindlich ist wie für den männlichen.*) Auch die auf diesem Gebiete zutag tretenden Gegensätze schieben wir aber auf Rechnung vor allem der bei beiden Geschlechtern so verschiedenartigen Vorbildung und Schulung des Geistes, sodann auch auf Unterschiede des Temperamentes und der Neigungen, welche beim weiblichen Geschlechte reiner Verstandesthätigkeit im allgemeinen abgewendet sind.**)

Aus alledem geht hervor, dass unser wirkliches Denken in den Urteilen, die es erzeugt, *seinen Zweck häufig verfehlt* (cf. Sigwart[1], p. 9); dass diese Urteile teils von dem einzelnen Denkenden selbst wieder aufgehoben werden, indem die Überzeugung eintritt, dass sie ungültig sind, d. h. dass notwendig anders geurteilt werden muss, teils dass die Urteile von andern Denkenden nicht anerkannt werden, indem diese ihre Notwendigkeit bestreiten, sie für blosse Meinung und Vermutung erklären oder gar ihre Möglichkeit leugnen, sofern über denselben Gegenstand notwendig anders geurteilt werden müsse.

Solche Erfahrungen müssen uns dazu anregen, uns selbst auf die Grundlagen unsres Denkens zu besinnen; in ihnen wurzelt das Bedürfniss einer Disziplin, welche beitragen kann, dem Irrtum vorzubeugen, den Streit vermeiden zu lehren, eventuell ihn zu schlichten, indem sie dem Verstande eine solche Vorbereitung gibt, dass ihm korrektes Denken zur Gewohnheit wird, und so darauf hinwirkt, dass das gemeinverbindliche Denken auch wirklich zum allgemeinen werde.

μ) Wir wollten uns mit den Gesetzen des folgerichtigen Denkens beschäftigen, somit des von einer für alle Intelligenzen verbindlichen Denknotwendigkeit beherrschten Denkens.

Nun kann man fragen: was ist Denken überhaupt, was Notwendigkeit, was sind Gesetze? Würde jemand diese Fragen beantworten, so könnte weiter gefragt werden, was die Worte bedeuten, mit Hülfe deren der Sinn der vorigen zu erklären versucht worden und so weiter

*) Bedeutsam sagt z. B. ein feiner Menschenkenner, Bodenstedt (in Mirza-Schaffy):

> Frauensinn ist wohl zu beugen,
> Ist der Mann ein Mann und schlau,
> Aber nicht zu überzeugen:
> Logik gibt's für keine Frau.
> Frau'n kennen keine andern Schlüsse
> Als Krämpfe, Thränen und Küsse.

**) Nicht ohne Ausnahmen. Wir werden in diesem Werke auch mit den Leistungen einer Dame auf dem Gebiet der rechnenden Logik Bekanntschaft zu machen haben.

in infinitum. Wer diese Fragen fort und fort zu beantworten unternähme, würde in Erinnerung rufen — das Bild des Hundes, der sich in den Schwanz zu beissen sucht; er würde sich immerfort im Ring herum bewegen!

Zudem ist die exakte Beantwortung derartiger Fragen etwas höchst Schwieriges — zumeist wol *ein verfrühtes Unternehmen!*

Und ihr Versuch schon könnte uns von unserm eigentlichen Vorhaben immer weiter abziehen, würde uns möglicherweise gar nicht zu demselben kommen lassen, ja er dürfte uns in Untersuchungen verwickeln, die zu den schwierigsten der Philosophie überhaupt gehören, darunter manche, die Verfasser gern berufeneren Federn überlassen möchte. Daneben aber — und nicht zum mindesten — müsste uns solches Wagniss auch auf Untersuchungsgebiete führen, in Bezug auf welche die Philosophen von Fach noch lange nicht einig sind, wo es annoch heisst: „soviel Köpfe, soviel Sinne", Gebiete, die sich eben einer exakten Behandlung bis jetzt nicht zugänglich erwiesen haben.

Und sich auf Spekulationen in derartigen Gebieten einzulassen, würde als unvereinbar erscheinen mit dem ganzen Charakter der deduktiven Logik, die ja auf das Gemeinverbindliche, unmittelbar *oder mittelbar* Selbstverständliche sich zu beschränken hat, und deren Aufgabe es vorzugsweise ist, in dem Chaos der philosophischen Systeme den gemeinsamen Boden herzustellen, auf dem jedes System fussen muss, den unumstösslich sichern Kern zu gewinnen, um welchen die übrigen Zweige der Philosophie und Wissenschaft überhaupt ankrystallisiren mögen.

Jedenfalls, meine ich, kann es dem Verfasser eines Buches über Logik nicht zugemutet werden, die tiefsten Rätsel des Daseins überhaupt, die schwierigsten Probleme der Metaphysik, Erkenntnisstheorie, Psychologie und vielleicht auch Physiologie schon in dessen Einleitung vorweg zu lösen. Wir können eben hier nur ein *Ideal* aufstellen, und *von dem Standpunkte aus, den jeder Mensch einnimmt, welcher die Sprache beherrscht*, auf dasselbe zusteuern.

Das Ideal ist: *die Gesetze folgerichtigen* (weil als solches einleuchtenden) *Denkens zum Bewusstsein zu bringen,* denselben einen *allgemeinen* und zugleich *möglichst einfachen Ausdruck* zu geben, *sie* namentlich auch *auf möglichst einfache Grundlagen* — auf möglichst wenige Prinzipien oder Axiome — *zurückzuführen,* und überhaupt dieses Denken zu einer *bewussten Kunstfertigkeit* zu gestalten — noch mehr: es in eine Technik zu entwickeln, welche zu irgendwie gegebenen Prämissen oder Annahmen mit leichtester Mühe alle Folgerungen liefere, die nach irgend einer wünschbaren Richtung überhaupt gezogen werden können, auch mit unfehlbarer Sicherheit über die Folgerichtigkeit oder -unrichtigkeit einer Behauptung zu entscheiden, die richtige zu beweisen, die unberechtigte oder falsche zu widerlegen gestatte.

In ihrem ganzen Umfange kann diese Aufgabe begreiflicherweise nicht sofort gelöst werden. Aus dem allgemeinen Hintergrunde derselben hebt sich zunächst ein elementarer Teil hervor, für welchen die Aufgabe nicht nur als lösbar, sondern bereits als definitiv und nahezu vollständig gelöst erscheinen wird (ich meine die im Englischen als „logic of absolute terms" bezeichnete Disziplin). An ihn reiht sich ein höherer Teil (die „logic of relatives"), dessen Behandlung sich mehr noch in den Anfangsstadien ihrer Entwickelung befindet.

Was namentlich den zu allerletzt charakterisirten Teil der Aufgabe betrifft, so muss die künftige Entwickelung der logischen Disziplin erst vollends herausstellen, inwieweit er überhaupt durch allgemeine Methoden lösbar ist, und wann etwa zu seiner Lösung die Spezialwissenschaften einzutreten haben.

Wir könnten uns hienach mit dem bisher Gesagten begnügen, und mit dem Beginn der „ersten Vorlesung" sogleich in medias res eintreten.

ν) Um indessen dem ersten unsrer Motti (in welchem ich eine hohe Weisheit erblicke) thunlichst gerecht zu werden, will ich mir doch gestatten, etwas weiter auszuholen, und versuchen, dem Ursprung des logischen Denkens auch noch von einer andern Seite beizukommen, denselben noch eingehender darzulegen, die angedeuteten Rätsel und Probleme wenigstens streifend.

Ich thue dies nicht ohne Widerstreben, hervorgerufen durch das Bewusstsein subjektiver Fehlbarkeit, sowie der bei der unerschöpflichen Vielseitigkeit des Themas höchst wahrscheinlichen Einseitigkeit der Betrachtungen. Ausdrücklich möchte ich mit diesen einleitenden Überlegungen ebenso anspruchslos auftreten, als ich zuversichtlich der alsdann entwickelten Theorie einen hohen Grad von Vollkommenheit in sachlicher Hinsicht zuspreche, und bemerke ich zum voraus, dass auch solche Leser, die mir bei jenen nicht überall zustimmend zu folgen vermöchten, sich mittelst Überschlagung von etlichen Seiten darüber hinwegsetzen mögen und die Korrektheit sowol als Wirksamkeit der alsdann folgenden Ausführungen gleichwol nicht werden bestreiten können.

Im Anschluss an gedachte Überlegungen werde ich zudem schliesslich Gelegenheit und Veranlassung finden, mich über die Eigenart der hier bevorzugten Darstellungsweise der logischen Theorie, und des Buches insbesondere, noch näher auszulassen, dieselbe in gewissem Sinne zu rechtfertigen.

ξ) Der Mensch ist sich seines Daseins unmittelbar *bewusst*, und schreibt sich einen *Geist* zu. Die Existenz des eignen Ich's in der Form der Zeit ist wol (für dieses selbst) die unzweifelhafteste, die unbestreitbarste und auch unbestrittenste von allen Thatsachen.

Von dieser der allersichersten Thatsache sind vorsichtige Philosophen jederzeit ausgegangen und werden solche es auch in Zukunft voraussichtlich thun müssen.

Mit dem *Bewusstsein* aber ist uns ein Mannigfaltiges gegeben. Eine ganze Welt von Empfindungen, Erinnerungen, Vorstellungen und

Strebungen — auch schon fertiger Gedanken und Überzeugungen — findet der reifere Mensch, wenn er anfängt, über sich und die Welt nachzudenken, zu reflektiren, in seinem Bewusstsein bereits vereinigt. Jedenfalls — um nur das allerwenigste zu sagen — vermögen wir *Verschiedenes in unserm Bewusstsein zu unterscheiden,* wir finden Mancherlei in ihm zusammengefasst. Auch ist der Inhalt des Bewusstseins teilweise in Veränderung begriffen; Einzelnes in ihm Vorhandene schwindet aus demselben, nicht vorhanden Gewesenes wird erzeugt, Getrenntes verknüpft, Verbundenes gesondert.

Solche Thätigkeit des menschlichen Geistes, welche wir *Denken* im weitesten Sinne des Worts nennen (mit andern Worten Innewerden, Bewusstwerden), und welche dessen ganzes Dasein ausfüllt, besteht also jedenfalls wesentlich mit in einer *Vereinigung von Mannigfaltigem im Bewusstsein.*

Schon dieser Vorgang hat, genauer besehen, etwas höchst Rätselhaftes, um nicht zu sagen: geradezu Unbegreifliches.

Der naive, der ungeschulte Verstand, der Verstand auch des Mannes der Praxis, der nur gewohnt ist, über die Dinge der Aussenwelt in Bezug auf diese selbst zu urteilen, dagegen vernachlässigt auch nachzudenken über die Vorgänge, welche im denkenden Subjekte hierbei stattfinden (sowie über die Beziehungen zwischen diesen und jenen), mag sich vielleicht mit Erforschung von Unbekanntem, mit der Lösung von Problemen beschäftigen, doch pflegt er nirgends Unbegreifliches zu erblicken. Dass solches wol vorhanden sein müsse*), wird er eventuell erst mit Verwunderung inne, wenn er versucht, in den Sinn der philosophischen Lehrmeinungen einzudringen und auf den Widerstreit von diesen stösst. Wer dann aber, mit der Vorsicht, zu welcher die Wahrnehmung solcher Diskrepanz auffordern muss, ernstlich strebt in den Born der Erkenntniss einzudringen, wird fast auf Schritt und Tritt gewahr, wie wenig gefestet, bestimmt und vollendet auch die ihm geläufigsten Begriffe sich erweisen, ja wie wenig oft die für unerschütterlich gehaltenen Grundlagen seines gesamten Denkens feststehen.

o) Um jenen Vorgang der Zusammenfassung oder Verknüpfung von Mehrerlei zu einer Einheit im Bewusstsein auf sein einfachstes Urbild zu reduziren, fassen wir einmal den Fall in's Auge, wo das denkende Subjekt *nur zwei* Dinge, z. B. Sinneseindrücke in seinem Bewusstsein vereinigt. Die Sache wird am deutlichsten, wenn wir diese aus verschiedenen Sinnesenergieen entlehnen.

Man hört den Knall des nahen Blitzes, während der Lichteindruck desselben noch nachklingt. Es sind ja wol verschiedene Organe des

*) Schon das blosse *Dasein* kann dafür gelten, wie denn jener indische Weise, dessen L. Büchner Erwähnung thut, sich jeden Morgen von neuem wunderte, dass überhaupt etwas *ist,* und nicht *nichts* ist.

Körpers, welche den Schall und den Lichteindruck aufnehmen und dem Träger des Bewusstseins, dem Gehirne übermitteln; auch von letzterem mögen noch verschiedene Teile bei der Übernahme der beiderlei Botschaften vorzugsweise beteiligt sein. Gleichwol ist der Vorgang von ganz anderer Natur, als wenn etwa *ein* Wesen, das blos zu hören vermag, den Donner vernähme, und *ein anderes* Wesen, das blos sieht, das Aufleuchten des Blitzes wahrnähme, welche beiden Wesen nimmermehr auf einander einzuwirken, einander etwas mitzuteilen, von einander zu wissen in der Lage wären, weil das erste zur Aufnahme von Lichteindrücken unfähig, blind, das zweite taub wäre. Vielmehr ist es *ein* einheitliches Bewusstsein, in welchem beide Eindrücke zusammenfallen, koinzidiren, in eins verschmelzen (das heisst doch wol: sich ver-*ein*-igen), und dennoch unterscheidbar bleiben!

Dasselbe, wie in Bezug auf diese verschiedenartigen Sinneseindrücke, würde sich auch ausführen lassen in Bezug auf die verschiedenen Eindrücke, welche uns von einerlei Sinnesorgan übermittelt werden, z. B. für den Fall, wo wir zwei Lichtpunkte, oder sagen wir zwei Kreidestriche auf der Schultafel, gleichzeitig wahrnehmen. Treffen auch die von beiden Strichen entsendeten Strahlen, fallen ihre (umgekehrten) Bilder auch auf verschiedene Stellen der Netzhaut, so werden schliesslich doch die Eindrücke beider im selben Bewusstsein vereinigt, und in dieser Hinsicht würde die Sache nicht anders liegen, wenn etwa der eine der beiden Striche, oder auch beide, anstatt wahrgenommene, blos vorgestellte, Erinnerungsbilder z. B. wären.

Die Annahme, es sei gar nicht möglich, zwei (wahrgenommenen oder blos gedachten) Dingen zugleich Aufmerksamkeit zu schenken, vielmehr springe letztere immer nur zwischen beiden hin und her, scheint der Schwierigkeit, die sie zu heben trachtet, nicht mit Erfolg aus dem Wege zu gehen. Es ist doch jedenfalls zuzugeben, dass wir zwei Striche — mit dem Augenmaass z. B. — nach ihrer Länge *vergleichen* können, und dieses wäre ganz undenkbar, wenn nicht wenigstens ein Erinnerungsbild vom einen festgehalten und zum andern mit herübergenommen würde, in Bezug auf welches wir eben zu beurteilen vermögen, ob es mit diesem sich deckt oder nicht. Die so überaus häufige Thätigkeit des Geistes, welche auf die Wahrnehmung oder Herstellung von *Beziehungen* zwischen Objekten des Denkens hinausläuft, scheint deren gleichzeitige Betrachtung zur unerlässlichen Voraussetzung zu haben. Nie würden wir — um noch ein anderes Beispiel zu wählen — ein Wort zu lesen im Stande sein, wenn im Bewusstsein nicht (die Auffassung von) mehr als *ein(em)* Buchstaben auf einmal Raum hätte. Nicht nur blos gewissermassen schlummernd, latent im Bewusstsein überhaupt, sondern selbst im Felde der Aufmerksamkeit vermögen wir also zwei oder mehrere Wahrnehmungen oder auch Vorstellungen zu vereinigen.

Als auf ein anderes Beispiel sei auf die kombinirten Töne und Harmonieen noch hingewiesen.

Diese Ver*ein*igung, „In-eins-setzung“ von *Zwei*- oder Mehrerlei, diese Herstellung einer *„Vieleinigkeit“*, welche sich im Bewusstsein des denkenden Sukjektes vollzieht, ist das, was ich als das Unbegreifliche des Vorgangs bezeichne.*) Der Versuch, die Herstellung zweier Bilder an verschiedene Stellen des Hirns zu verlegen — wenn man doch dem letztern insbesondere, und der materiellen Welt überhaupt, Wirklichkeit zuschreiben will — lässt deren Wechselwirkung aufeinander, lässt die Einheitlichkeit des Bewusstseins, der Versuch, sie an dieselbe Stelle (oder dieselben Stellen) zu verlegen, lässt ihre Unterscheidbarkeit wol unbegreiflich erscheinen.

π) Einerlei, wie die Wissenschaft in vorgeschritteneren Stadien sich das Wesen dieses Vorgangs auch zurechtlegen wird, so haben wir uns hier mit der Thatsache abzufinden, dass in dem einheitlichen Bewusstsein des Ich's gar Mannigfaltiges verknüpft, zusammengefasst oder vereinigt erscheint, dass wir unmittelbar inne werden einer ***Mannigfaltigkeit*** (wie gesagt) von Empfindungen und Vorstellungen, Gemütszuständen und Willensstrebungen, welche teilweise als sich forterhaltend oder neu immer wieder erzeugend, teilweise als im Wechsel oder Fluss, in Änderung befindlich sich uns offenbart (zuweilen sich zu eigner Thätigkeitsäusserung steigernd), und in welcher sich namentlich auch die Gedanken entwickeln.

Dieser mannigfaltige Inhalt des Bewusstseins mit seinen aufeinanderfolgenden (genauer: sich an einander reihenden) Zuständen, seinen successiven Phasen, füllt das Leben des Individuums oder denkenden Subjektes aus. Er ist eine Welt für sich, ein (Mikro-) Kos-

---

*) Wer an paradoxen Aussprüchen Freude hat, könnte sich, sofern er obigen Ausführungen folgte — m. a. W. im Hinblick auf das hervorgehobene Mysterium der Zweizahl, Mehrzahl, der Vieleinigkeit im Bewusstsein, oder wie man dasselbe nennen mag — wol versucht fühlen, dem Hegel'schen Ausspruch: „*Sein* ist *Nichtsein;* dieser Widerspruch löst sich auf im *Werden*“ — welchen ich in dieser Fassung Herrn Kuno Fischer's Logik entnehme — einen andern an die Seite zu setzen: „*Zwei* sind *eins;* dieser Widerspruch löst sich auf (verwirklicht sich) im *Innewerden* (Bewusstwerden).“ Sonst allerdings sind zweie nirgends eines.

Wenn — im Ernste gesprochen — ein denkendes Subjekt A im Geist zwei Dinge b und c zugleich erschaut, so erzeugt sich in diesem Geiste *eines* (*ein* „Ding“): die Anschauung von „b nebst c“, aus welcher nicht nur diejenige von b, oder die von c, jeden Augenblick losgelöst und isolirt zu werden vermag, sondern in welcher sogar, obzwar sie „eins geworden“, diese beiden Anschauungen auch stets gesondert, als zweie, empfunden sind.

mos, den wir kurz, wenn auch nicht erschöpfend, die Ideenwelt, *Gedankenwelt* des Individuums nennen mögen.

ϱ) Was uns zur Anerkennung auch des Makrokosmus, der *Aussenwelt* nötigt, zwingt, ist die schon von früh auf gemachte und seitdem fast unaufhörlich wiederholte Wahrnehmung resp. innere Erfahrung, dass wir über gewisse Teile der uns unmittelbar bewussten Gedankenwelt nicht willkürlich verfügen können.

Schon der Säugling kann das Gefühl des Hungers nicht willkürlich beseitigen, kann sich dem Eindruck blendenden Lichtes, wenn er etwa schlafen möchte, nicht verschliessen. Andere Teile unsrer Gedankenwelt, dagegen, sind wir uns unmittelbar bewusst, selbstthätig, frei, nach unserm Willen zu gestalten. Wir können uns z. B., sobald es uns beliebt, einen grünen Tannenbaum vorstellen, oder, wenn wir mögen, auch einen schneebedeckten, desgleichen rote Farbe, etc. etc. Wir mögen uns angenehmer Erlebnisse, einer hübschen Melodie erinnern und uns auch bessere Zustände hoffnungsfreudig ausmalen. Schwerer schon fällt es, unangenehme Erinnerungen los zu werden.

σ) Einzelnes, was in unser Bewusstsein eintritt, empfinden wir *unangenehm* als Schmerz, Leid, Ärgerniss, Kummer; Manches lässt uns als ein gleichgültig Empfundenes *indifferent*, Anderes empfinden wir als *angenehm* mit Genuss, Lust, Wohlbehagen, Freude. Jenes erstere veranlasst uns, die Beseitigung, dieses letztere, die Fortdauer, eventuell Wiederholung seiner selbst zu erstreben. Abermaliges Rätsel: das Wesen der Affekte, von Zu- und Abneigung, von Schmerz und Lust.

Dass beides, wenn auch vermutlich davon bedingt und stets davon begleitet, nicht — wie nach der materialistischen Weltanschauung — *lediglich* in Bewegungszuständen, in einem mehr oder weniger rhythmisch ausgeführten Tanze unsrer Gehirnmoleküle bestehen könne, dass auch der vollendetste Automat noch kein fühlender Mensch wäre, *Empfindung* überhaupt nicht auflösbar ist in *Bewegung*, steht mir vorderhand dogmatisch fest. Dafür gegebene „Beweise" vermag ich indessen als solche nicht anzuerkennen.

τ) Durch unsre physischen und psychischen Triebe, durch die Abneigung, auch Furcht, vor Schmerz, sowie die Erwartung von, Aussicht auf Genuss bedingt, bilden sich Wünsche in uns aus, werden wir uns gewisser Willensstrebungen, eines bestimmten *Wollens* unmittelbar bewusst; wir nehmen Willensakte in uns vor. Und diese Thatsache des Vorhandenseins eines menschlichen *Willens* nun hängt auf das innigste mit der Anerkennung der Aussenwelt zusammen; sie scheint geradezu eine Vorbedingung*) zu dieser zu bilden, indem die

*) Auch umgekehrt würde unser Wille unfähig sein in die Erscheinung zu treten ohne das Hinzukommen der Aussenwelt als eines Gegenstandes, an welchem derselbe sich erprobt, bethätigt und übt.

letztere in dem erkannten Unvermögen wurzelt, das Gewollte sofort, durch blosse geistige Thätigkeit des Ich in allen Fällen zu verwirklichen.

Das Wesen des Willens bildet ein vielbehandeltes und gleichwol noch nicht ergründetes Thema. Es ist eine Frage, welche die Philosophen zur Zeit noch in zwei grosse Lager spaltet: ob der menschliche Wille *wirklich frei* sei (und was ist Freiheit?), oder ob — mit Spinoza — die menschliche Freiheit, deren Alle sich rühmen, lediglich darin besteht, „dass die Menschen sich ihres Wollens bewusst und der Ursachen, von denen sie bestimmt werden, unbewusst sind"; dergestalt, dass die Gedanken und Handlungen des Menschen lediglich eine Funktion sind („Funktion" im mathematischen Sinne) der Zustände, aus denen der Mensch hervorgegangen, der inneren und äusseren Umstände, unter deren Herrschaft er gerade steht — eine Weltanschauung, nach welcher z. B. ein Mensch, der, wie er meint, freiwillig den Arm aufhebt, vergleichbar wäre einer (nur allerdings mit Bewusstsein begabten!) Marionette, die, während ihr mit naturgesetzlicher Notwendigkeit der Arm durch einen Draht emporgezogen wird, blos in dem Wahne stünde, denselben selbst zu heben.*)

Die Frage ist von tiefgreifendster Bedeutung namentlich für die Rechtspflege und für die Beurteilung jenes schlimmsten aller Übel — der Schuld.

Unleugbar zeigen nun die Fortschritte der Naturforschung, besonders auf dem Gebiete der Physiologie und Psychiatrik, unterstützt auch durch die Statistik der menschlichen Gesellschaft, eine stetig steigende Tendenz, das Gebiet der möglicherweise noch für frei zu haltenden, nämlich einer nachweisbar zwingenden Bestimmung entbehrenden Lebensäusserungen des Menschen einzuengen; und es mögen darum Naturforscher und Irrenärzte mehr zu der letzterwähnten Ansicht neigen. Ich stehe meinerseits nicht an, mich zu derselben zu bekennen, und zwar meine ich, dass schon ein Jeder zu demselben Ergebniss kommen muss, wofern wir nur ohne vorgefasste Meinung uns selbst darauf besinnen, was denn eigentlich in uns vorgeht, wenn wir einen Entschluss zu fassen haben? Kommt uns kein Zweifel an bezüglich dessen, was in einem gegebenen, vorliegenden Falle zu thun sei, so handeln wir entweder instinktiv nach einem unbewusst und ohne unser Zuthun von Natur in uns entstehenden Impulse, oder wir folgen dabei sozusagen mechanisch einer schon von früher überkommenen (und seinerzeit naturgesetzmässig erworbenen) Gewöhnung. Von freier Entschliessung wird erst dann zu sprechen sein, wenn mehrere Möglichkeiten des Handelns sich dem Geiste zur Auswahl darbieten, m. a. W. wenn wir im Zweifel sind, was thun. Hier dürfte nun die Thatsache nicht in Abrede zu stellen sein, dass sooft wir so für eine Handlung uns zu entscheiden haben, es wiederum von unserm Willen völlig unabhängig erscheint, *welche* Erinnerungen, Vorstellungen und Überlegungen sich uns bis zum

---

*) Wahrscheinlich ist dieser Vergleich eine Reminiscenz aus einer früheren Auflage von Herrn Ludwig Büchner's „Kraft und Stoff"; in der mir vorliegenden 16. Auflage — Leipzig 1888, 512 Seiten — habe ich denselben jedoch vergeblich gesucht.

Moment des Handelns aufdrängen, und welche zuletzt das Übergewicht erhalten, die That bestimmend.

Des weiteren sei in Bezug auf die angeregte interessante Frage auf Herrn Emil du Bois-Reymond's bekannte Schrift „Die sieben Welträthsel" und den darin citirten merkwürdigen Ausspruch des Abbé Galiani verwiesen. Die Arbeit von Ludwig Dieffenbach[1] bekundet grosse Belesenheit des Verfassers und betrachtet mit Scharfsinn auch juristische Fragen vom deterministischen Standpunkte.*) Von Neueren behandelt Riehl[2] Bd. 2, p. 216 sqq. das Problem der Willensfreiheit besonders eingehend und, wie mir scheint, in mustergültiger Weise.

Ich würde es, nebenbei gesagt, für einen grossen Segen halten, wenn die Überzeugung von der Naturnotwendigkeit alles menschlichen Denkens und Handelns Gemeingut aller Gebildeten würde. Diese Weltanschauung, welcher unter den Dichtern der Neuzeit Herr Arthur Fitger prägnanten und poetischen Ausdruck verliehen, müsste — im Einklang mit dem schönen Gebot der Nächstenliebe und vielleicht wirksamer als diese nur allzuoft nicht vorhandene oder fast unmögliche — naturnotwendig dahin wirken, der Animosität, dem Hass und der Verdammungssucht jeglichen Boden, auf dem sie gedeihen könnten, zu entziehen und auch ein gutes Teil Überhebung aus der menschlichen Gemeinschaft zu tilgen. Sofern die Handlungen des Individuums in erster Linie vom Stande seiner Einsicht abhängig, durch diesen sich bestimmt erweisen, würde sich für einen Jeden das praktische Gebot ergeben, vor allem auf Richtigstellung, Hebung und Vertiefung der Einsicht — eigner, wie fremder — bedacht zu nehmen. Bei der Beurteilung des Nebenmenschen würde man stets die in Madame de Staël's klassischem Spruche: Alles verstehen hiesse alles verzeihen, „Tout

*) Für jede Weltanschauung, ja fast für jede Ansicht, hat die Philosophie einen „. . . ismus" als Namen parat. Da gibt es einen Nominalismus, Realismus und Konzeptualismus, einen Materialismus, Sensualismus, Naturalismus und Rationalismus, einen Idealismus, Spiritualismus, Spiritismus, Supernaturalismus und Mysticismus, einen Eklekticismus, etc. und nicht genug damit: es müssen auch noch Personennamen zu weitern „. . . ismussen" herhalten wie in Platonismus, Skotismus, Kantianismus, Schopenhauerianismus etc.

Wer sich über die damit zu verbindenden Begriffe und ihre im Lauf der Jahrhunderte zum Teil recht schwankenden Bedeutungen orientiren will, mag ein gutes Konversationslexikon zu rate ziehen. Hüten aber muss man sich davor, eine Ansicht über die Dinge, schon darum, weil sie eine derartige Benennung gefunden hat, nunmehr für einen längst abgethanen und überwundenen Standpunkt halten zu wollen. Nicht wenige dieser „. . ismusse" floriren noch lustig weiter und hängen eben mit fundamentalen Fragen zusammen, welche die Philosophie noch keineswegs zum Austrag zu bringen vermocht hat.

Mit unsrer Einleitung gingen wir unsrer Überzeugung gemäss aus vom *„idealistischen"* Standpunkte. Die oben vorgetragenen (damit sehr wohl verträglichen) Anschauungen über die Willensfreiheit, *nach welchen auch der Mensch* mit seinem Fühlen, Thun und Denken *keine Ausnahme in der allgemeinen Gesetzmässigkeit der Natur bildet,* führen den Namen des *„Determinismus"*, und werden die Gegner dieses Standpunktes auch als „Indeterministen" bezeichnet.

comprendre, c'est tout pardonner" (als Subjekt) enthaltene Voraussetzung zu verwirklichen suchen und damit eine Erkenntniss zu gewinnen streben, deren Erwerbung durch jene oben genannten Affekte in der Regel voreilig verhindert wird. Jene Weltanschauung müsste endlich die Mahnung in sich schliessen, bei dem Kampfe gegen das Übel in dem Verfahren gegen Übelthäter nicht über das zum Schutze des Einzelnen und der Gesellschaft erforderliche Maass hinauszugehen.

Wir brauchen indess zu obiger Frage *hier* keine Stellung zu nehmen, und genügt uns die Thatsache, dass unser Wille — sei er auch von einer uns unbewussten Notwendigkeit durchaus bestimmt, sei unsre Willensfreiheit auch nur Illusion — doch innerhalb unsres Bewusstseins wenigstens als frei erscheint, nämlich als ein freier unmittelbar empfunden wird. Diese Thatsache ist nicht nur unbestritten, sondern: dass wir überzeugt sind, frei zu denken, und auch (innerhalb der Grenzen des uns physisch Möglichen) frei zu handeln *glauben*, bildet sogar eine der am tiefsten eingewurzelten menschlichen Überzeugungen. (1. 1. c. c.)

v) Demjenigen nun, was in unserm Bewusstsein als *unfrei* empfunden wird, sich dem unmittelbaren Einfluss unsres Willens entzieht, schreiben wir *eine ausser uns liegende Ursache* zu, und die Gesamtheit dieser Ursachen, denen wir ein eigenes Dasein, eine selbständige Existenz — ähnlich der unsrigen (genauer: derjenigen des Ich's) — beilegen, bildet für uns das Nicht-ich oder die *Aussenwelt*.

So, was wir sehen, hören, tastend fühlen, etc., gestaltet sich (als eine unfreiwillige Empfindung) zunächst zur Anschauung von etwas ausser uns Befindlichem. Der passiv empfangene Sinneseindruck löst in der Regel, um als Empfindung in's Bewusstsein einzutreten, eine rezeptive Thätigkeit des Geistes aus, und diese setzt sich noch über die Empfindung hinaus fort, indem sie Veranlassung wird, dass wir (aktiv) uns eine *Vorstellung* bilden von dem Gegenstand, der sie hervorruft.

Namentlich ist bekannt, wie wir so die Eindrücke der Farbenverteilung und Helligkeitsverhältnisse, die wir aus einem zweidimensionalen Gesichtsfelde empfangen, in den (in einen vorgestellten dreidimensionalen) Raum hinaus verlegen.

Bei der Bildung der Vorstellungen spielt übrigens die Induktion, obwol meist unbewusst geübt, schon eine grosse Rolle. Sie z. B. ist es, die uns veranlasst, *denselben* Tisch, den wir sehend als ausgedehnt resp. raumerfüllend wahrnehmen, auch mit Widerstandskräften auszustatten, dergleichen sich uns beim Anfassen desselben kund geben. Mit Induktionsschlüssen beteiligt sich der *Verstand* schon bei der Vorstellungsbildung; er vereinigt oft die aus verschiedenen Sinnesorganen ihm zuteil gewordenen Botschaften zur Gesamtanschauung eines Dinges, das sie veranlasste.

Besonders sind es Gesichts-, Tast- und Muskelsinn*), aus deren

*) Bekanntlich sollte man eigentlich von *sieben* Sinnen sprechen — zum wenigsten. Denn nicht nur ist das Funktioniren des Tastsinnes ein zwiefältiges

Eindrücken wir, ihre Ursachen lokalisirend, unsre Vorstellung der materiellen Körperwelt mit ihrer dreifachen räumlichen Ausdehnung, ihren Widerstands- und andern Kräften und ihren Bewegungsvorgängen herausentwickelt, uns konstruirt haben.

φ) Wir bethätigen dabei das unser gesamtes Denken beherrschende „*Kausalitätsprinzip*"*): für Alles, was in den Bereich desselben tritt, eine *Ursache* anzunehmen — sonach, sofern wir nicht uns selbst als diese Ursache fühlen, dieselbe ausserhalb zu setzen.

χ) Als ein Teil dieser von uns vorgestellten materiellen Welt findet auch unser körperlicher *Leib* seine Stelle. Im gewöhnlichen Leben zum Ich gerechnet, muss er von der Philosophie doch der Aussenwelt, dem Nicht-ich zugezählt werden. Wenn nämlich auch die Vorstellung, dass wir ihn besitzen, im Bewusstsein stets mehr oder minder lebendig ist, so existirt er doch nicht ganz allein in der Ideenwelt des Ich's und bildet mit seiner Gestalt und Schwere, seinem Aufbau aus Zellen, seinem Gefässsysteme und den darin kreisenden Blutwellen, seinen mannigfachen uns unbewussten Lebensfunktionen, doch keinen freien (d. h. wie gesagt als frei empfundenen) Bestandteil unsres Bewusstseins. Wäre dem so, so würde Jedermann dasjenige

als *Druck*sinn und als *Wärme*sinn, welcher letztere auch dem Geschmacksinn beigegeben, sondern ist dazu neuerdings auch der „*Muskelsinn*", das Gefühl für Muskelanstrengung, getreten. Dieser letztere Sinn ist es z. B., durch welchen wir im stockfinstern Keller eine am leeren Hals gefasste volle Flasche von einer leeren unterscheiden; auch beruht auf den zur Accomodation der Augen und Konvergenz der Augenaxen erforderlichen Anstrengungen der Augenmuskeln ganz wesentlich das Schätzen der Entfernungen, in welchen sichtbare Gegenstände sich von uns befinden. Vergleiche besonders v. Helmholtz's „Thatsachen der Wahrnehmung", sowie die auf S. 73 der Schiel'schen Übersetzung von Mill[1] citirten englischen Werke, als: Brown's Lectures, Mill's Analysis of the mind, Alexander Bain, The senses and the intellect, Herbert Spencer's Principles of psychology (Kapitel über die Wahrnehmung), u. a.

*) Nach Schopenhauer[1] sind vier Wirkungsweisen dieses Prinzips zu unterscheiden, indem dasselbe uns zwingt, einen „zureichenden Grund" anzunehmen für das *Sein*, das *Werden*, das *Erkennen* und das *Handeln*. Nur für den zweiten Fall sollte nach ihm der obige Name angewendet werden. Der erste scheint mir, nebenbei gesagt, von S. unklar formulirt und überhaupt nicht haltbar, vielmehr wesentlich in dem dritten Falle aufgehen zu sollen, welcher seinerseits den beiden übrigen nicht koordinirt zu setzen ist, sondern in einem gewissen Sinne über denselben steht.

Als auf eine der besten mir bekannten Schriften über das Kausalitätsprinzip im engern Sinne sei hier auf Herrn Heinrich Weber's Königsberger Prorektoratsrede[1] verwiesen.

Antlitz, das ihm am schönsten oder gerade am wünschenswertesten dünkt, besitzen, diejenige Körperkraft, die er sich wünscht, ebendadurch erlangen etc.

Die Beziehungen des Leibes, als des dem Ich immerhin am nächsten stehenden Teils der Aussenwelt zu diesem, sind mehrfacher Art.

Erstens: Durch die nach seiner Oberfläche, Peripherie, gehenden Nervenenden, die sich an einzelnen Stellen zu spezifischen Sinnesorganen vervollkommnen und ausgestalten, wird der Leib zum ausschliesslichen Werkzeug, vermittelst dessen die ausserleibliche Aussenwelt auf uns einzuwirken vermag, spielt er die Rolle des allezeit bereiten Boten, welcher, die „peripherischen“ Sinnesreizungen dem Bewusstsein übermittelnd, dem Geiste von dieser Aussenwelt Kunde bringt.

Zweitens: Zufolge seiner eigenen Beschaffenheit, seiner physiologischen Verfassung, Konstitution, entstehen in ihm selbst auch „viscerale“ Reize, wie das Atmungsbedürfniss, Hunger, Durst, Drang jeder Art, durch welche er unabhängig vom Willen des Individuums physische Triebe in dessen Bewusstsein wachruft. Auch können noch hierher gerechnet werden jene (krankhaften) Sinnestäuschungen, die wir erst unter Beihülfe induktiver Schlüsse von sinnlichen Wahrnehmungen zu unterscheiden vermögen.

Drittens endlich: Indem sich gewisse Willensakte unmittelbar in Bewegungen und Kraftentwickelung, Arbeitsleistung seiner Gliedmaassen umsetzen, erscheint der Leib auch als das wiederum einzige*) Werkzeug, durch welches seinerseits der Geist auf die Aussenwelt einwirken kann, deren kommende Zustände beeinflussend.

Die sowol unwillkürlichen als unbewussten Wechselwirkungen zwischen Geist und Leib (deren Vorhandensein wir gleichwol durch induktive Schlüsse erkennen), wie z. B. die Wirkung von Kummer oder Freude auf das körperliche Wohlbefinden, können hier ausser Betracht gelassen werden.

ψ) Wir haben uns hier der gewöhnlichen Ansicht angeschlossen, der die selbständige Existenz der Aussenwelt, und in ihr auch die unsrer Nebenmenschen, für unzweifelhaft, für ausgemacht gilt.

Dem gegenüber steht bekanntlich die Weltanschauung eines hervorragenden Metaphysikers: George Berkeley's, nach welcher ganz allein der Geist existirte, die Aussenwelt aber keine Wirklichkeit besässe, vielmehr nur eine Vision, und ihre Objekte dem Ich von einem göttlichen Geiste vorgespiegelte Wahngebilde, subjektive Erscheinungen wären, das Leben also

---

*) Das Axiom: *„Es gibt keine geistige Einwirkung ohne materielle Vermittelung“* ist die Basis, auf welcher die gesamte Naturwissenschaft steht. Wer dieselbe nicht anerkennt, ist dem *Aberglauben* in jeglicher Form preisgegeben.

gleichwie ein Traum sich abspielte. Solche Ansicht (selbst wenn in die Leugnung der Aussenwelt auch die der Nebenmenschen samt ihrem Geiste noch eingeschlossen würde) lässt allerdings sich weder beweisen noch widerlegen; es bleibt dem Belieben anheimgestellt, sie anzunehmen oder zu verwerfen.

Auch sie gibt übrigens ein Nicht-ich zu, bestehend aus der Gesamtheit der von dem Ich unabhängigen (als von ihm unabhängig empfundenen) durch eine Notwendigkeit ihm oktroyirten Vorspiegelungen. Für unsre Zwecke ist es gleichgültig, ob die Aussenwelt in dieser oder in jener Form anerkannt wird, wofern dies nur überhaupt der Fall ist.

Unstreitig kräftigt es unsre Überzeugung von der Existenz eines wahrgenommenen Dinges der Aussenwelt, wenn wir aus ihren Kundgebungen inne werden, dass auch andre Menschen dasselbe ebenso wie wir erblicken. Aus diesem Umstand aber, mit De Morgan[2] p. 28 sq., erst die Anerkennung von der Existenz der Aussendinge ableiten zu wollen, scheint mir ein Umweg zu sein, und glaube ich (ohne damit einen Anspruch auf Neuheit erheben zu wollen) diesem gegenüber vorstehend — sub $\varrho \,..\, \upsilon$) — den wahren Grund hervorgehoben zu haben.

ω) Empfindungen und Vorstellungen lassen auch durch Erinnerung sich reproduziren, ja wir können die Elemente uns schon geläufiger Vorstellungen auch zu ganz neuen Vorstellungsgebilden erfinderisch verknüpfen.

Wesentlich bleibt jedoch eine jede blos vorgestellte, sei es antizipirend geahnte, sei es in Erinnerung gerufene Empfindung von der durch Sinneseindruck thatsächlich hervorgerufenen verschieden.

Es dürfte schwierig sein, genau festzustellen, in was die faktische Empfindung mit ihrer Erinnerung übereinstimmt und wodurch sie doch von von dieser sich unterscheidet, was sie etwa vor ihr voraus hat. Die freien Vorstellungen scheinen mit einem erhöhten Gefühl von Selbstthätigkeit, einem Gefühl von Anstrengung der Einbildungskraft, Phantasie, verknüpft, unter Fehlen des Gefühls, eventuell Genusses, und auch der Anstrengung rezeptiver Sinnesthätigkeit. „Jedenfalls werden wir nicht satt durch die Vorstellung, dass wir ein leckeres Gericht verzehrten, auch leiden wir ungleich weniger durch blos vorgestelltes Zahnweh."

Stellen wir uns Veilchengeruch z. B. vor, so haben wir doch nicht den Genuss des letztern; wir *haben* die Empfindung selbst nicht. Diese können wir erst durch umgestaltende Einwirkung auf die Aussenwelt erlangen, indem wir uns z. B. wirkliche Veilchen verschaffen.

In diesem unsern Unvermögen, die uns angenehmen Empfindungen und äussern Sinneswahrnehmungen unmittelbar in unserm Bewusstsein herzustellen, wurzelte, wie schon erwähnt, unsre Erkenntniss der Aussenwelt überhaupt.

α_1) Auf ebendieser Beschränkung unsrer Macht über unsern Bewusstseinsinhalt beruht es nun auch ferner, dass wir in Bezug auf

viele vorgestellte Dinge zunächst nur Absichten fassen, uns Ziele oder *Zwecke* vorsetzen können und diese durch *Mittel* zu erreichen suchen müssen, dass wir sie oft erst auf Umwegen zu verwirklichen, zu realisiren im stande sind.

Alles Erkennen der Aussenwelt konnte schon die Voraussetzung nicht entbehren, dass die von den Dingen auf uns ausgeübten Einwirkungen, dass die Art, wie die Dinge uns „erscheinen", von einer *Notwendigkeit* geregelt seien (bestimmt durch die Natur der Dinge an sich, die Natur unsres Wahrnehmungsvermögens und durch die Beziehung, gegenseitige Lage, in welche die Dinge und unsre Sinnesorgane zu einander stehen oder von uns gebracht werden). Und ebenso wäre das Verfolgen von Zwecken durch Mittel aussichtslos, sinnlos, ohne die Annahme, dass die aufzuwendenden Mittel notwendige Wirkungen haben, genauer gesagt: spezifische Wirkungen notwendig haben müssen. Es wird sich uns in letztrer Hinsicht nur darum handeln, diese Wirkungen richtig vorauszusehen, die Gesetze dieser Wirkungen zu erkennen.

Gesetze in dem Sinne von „Naturgesetzen" pflegt man dahin zu formuliren, dass unter gleichen Bedingungen auch jedesmal gleiche Folgen ausnahmslos eintreten. Gleiche Ursachen haben gleiche Wirkungen. Statt „gleiche" wäre beidemal wol genauer zu sagen: „ähnliche, d. i. solche, die einander in einer bestimmten Hinsicht gleichen". Versucht man aber genauer festzustellen, worin das Einandergleichsein von sei es Ursachen, sei es Wirkungen, in der betreffenden Hinsicht besteht, so zeigt sich, dass dasselbe zurückzuführen ist auf die Übereinstimmung zwischen Eindrücken, Empfindungen, die sie unter bestimmten Umständen in unserm Geist hervorrufen, zurückkommt auf die Gleichheit ihrer *Erscheinung* für unser Erkenntnissvermögen, die als solche unmittelbar empfunden und von der Nichtübereinstimmung unterschieden wird. Dieser Rückschluss aber von unsern Empfindungen auf die Dinge, die sie hervorrufen, beruht wieder wesentlich auf der Annahme, dass jene von diesen mit *Notwendigkeit* abhängen, ihnen in *gegebener* Weise mit unabänderlicher Prädestination entsprechen. Notwendigkeit also erscheint als der ursprünglichere und höhere Begriff, ohne welchen auch derjenige einer Gesetzmässigkeit in der Aussenwelt nicht erklärt zu werden vermöchte.

β_1) Unsre eignen Empfindungen — z. B. Schmerz —, unsre Vorstellungen, Affekte und Willenszustände werden wir unmittelbar inne als dasjenige, was sie *sind;* sie sind gerade das, als was sie in unser Bewusstsein eintreten. Auf die analogen Vorgänge im Bewusstsein andrer Menschen vermögen wir darum auch — mit einiger Wahrscheinlichkeit — zu schliessen.

γ_1) Im Gegensatz aber zu den Erkenntnissobjekten der angeführten Klasse, welche sonach als dasjenige, was sie *„an sich"* sind, von uns

erkannt werden können, ist in Bezug auf die Dinge der übrigen Aussenwelt solches *nicht* der Fall. Vielmehr muss hier zuvörderst eine Grundwahrheit konstatirt werden, welche die „Metaphysik“ zutage gefördert und — die einzige fast — im Kreise der Philosophen zu allgemeiner Anerkennung gebracht hat (woneben ihr aber das Verdienst nicht abzusprechen ist, der Oberflächlichkeit wirksam entgegengetreten zu sein, viele Irrtümer, Illusionen als solche aufgedeckt und zerstört zu haben, überhaupt auf Läuterung und Präzisirung der Begriffe, mannigfach zu weiteren Fortschritten in dieser Richtung anregend und zur Gründlichkeit und Behutsamkeit im Forschen erziehend, hingearbeitet zu haben). Es ist die Wahrheit, dass wir, was die Dinge der Aussenwelt *an sich* sind, zunächst überhaupt nicht zu erkennen vermögen.

Längst hat die Physik den Schall, das Licht, die Wärme etc. auf etwas ganz anderes zurückgeführt, als das ist, als was sie uns *erscheinen:* auf Bewegungsvorgänge, Schwingungszustände materieller Teilchen, welche wir bei tönenden oder den Ton leitenden Körpern sogar dem Auge sichtbar machen können. So ist eine grüne Wiese z. B. durchaus nicht „grün an sich“, d. h. ihr haftet nichts an von unsrer Empfindung der grünen Farbe, sondern wir wissen oder glauben mit gutem Grunde es zu wissen, dass diese Wiese nur die Eigenschaft hat, von den auf sie fallenden transversalen Lichtwellen diejenigen von einer bestimmten Wellenlänge diffus zurückzuwerfen, die andern zu verschlucken, sie in Wärme oder auch chemische Arbeit des Blattgrüns (Chlorophylls) umsetzend. Herr Emil du Bois-Reymond hat schon darauf aufmerksam gemacht, dass der schöne Ausspruch „Und es ward Licht“ auf Erden strenge genommen erst zur Wahrheit wurde, als sich die ersten Augenpunkte bei den frühesten Lebewesen (Infusorien) ausbildeten. Ebenso ist die uns umgebende Welt eigentlich stumm, und die Schall- und Tonempfindungen entstehen erst, wenn durch die in das innere Ohr eindringenden longitudinalen oder Verdünnungs- und Verdichtungswellen der Luft von den 60 000 Corti'schen Stäbchen, welche in der das Labyrinth auskleidenden weichen Nervenmasse stecken, einzelne Gruppen erschüttert, in Mitschwingung versetzt werden, u. s. w.

Wir vermögen — bildlich gesprochen — die Farbe der Brille, durch die wir die Welt betrachten, von dem Erscheinungsbild der Welt überhaupt nicht zu trennen, nicht dieses von jener frei zu machen, zu sondern. Denn jene Brille, als das dem Geiste mit den Sinnesorganen aufgesetze Wahrnehmungsvermögen, können wir eben (ohne Selbstvernichtung) nicht abnehmen, und nirgends ist der Geist im stande die Aussendinge selbst zu erfassen. Oder, um mit neueren Philosophen den Sachverhalt noch etwas schärfer zu präzisiren:

Von der Natur der Dinge an sich — a —, zufolge deren sie auf uns einwirken, und einem subjektiven Moment x, welches durch unsre Sinnesorgane sowol als durch die spezifische Natur, eventuell Be-

schränkung, unsres geistigen Auffassungsvermögens dieser Einwirkung hinzugefügt, vielleicht auch aus ihr weggenommen, gelöscht wird, unter allen Umständen aber sich ihr unvermeidlich beimischt, ist die Art A bestimmt, wie die Dinge uns erscheinen, wie wir sie uns kraft einer Naturnotwendigkeit vorstellen müssen; es ist, im mathematischen Sinne des Wortes, A eine *Funktion* von diesem x und a:

$$A = f(x, a).$$

Da wir ausser stande sind, jenes x zu ermitteln, so können wir aus dem A, dessen wir unmittelbar inne werden, nicht mit irgendwelcher Sicherheit oder auch nur Wahrscheinlichkeit auf das a schliessen (und könnten es selbst dann nicht, wenn uns das Gesetz der Zuordnung, oder die Natur der Funktion f schon bekannt wäre), d. h. was die Dinge an sich sind, bleibt uns unbekannt.*)

Anstatt von solchen „*Dingen*", müssten wir eigentlich — vorsichtiger — nur von dem (unbekannten) „ihrer Erscheinung zugrunde liegenden Wirklichen" reden. Auf dem Standpunkt des unbefangenen Bewusstseins nämlich (im Gegensatz zum Standpunkt des wissenschaftlichen Bewusstseins vergl. Harms[1]) identifizirt der Mensch allerdings die Dinge ohne weiteres mit seinen Vorstellungen von denselben.

Nachdem aber in Bezug auf ganze Reihen von Naturerscheinungen die fortschreitende Wissenschaft diese Einerleisetzung, Identifizirung schon als unhaltbar hat erkennen lassen, sie mit dem Streben nach einheitlicher Erkenntniss des Weltganzen unvereinbar zeigte, ist die Philosophie vollkommen im Rechte, wenn sie bei *allen* Erscheinungsformen der Natur und Aussenwelt solche Identität von vornherein wenigstens in Zweifel zieht.

So müssen wir nun auch den „*Raum* an sich" als das der Erscheinungsform des Raumes zugrunde liegende Wirkliche von dieser Erscheinung desselben, d. i. dem vorgestellten Raume, unterscheiden und ebenso die Erscheinungsform der *Zeit* auseinander halten mit dem ihr zugrunde liegenden Wirklichen.

ϑ_1) Die Frage nach der „Ähnlichkeit" eines „Dings an sich" und unsrer Vorstellung von demselben ist wol (vergl. *v. Helmholtz*[1]) sinnlos. Die beiden mögen unvergleichbar sein, wie etwa eine Symphonie und ein Gemälde. Wesentlich ist die Gesetzmässigkeit, mit der sie sich gegenseitig entsprechen — ein Entsprechen, welches nicht weiter zu gehen braucht, als etwa das Entsprechen, die gegenseitig eindeutige Zuordnung des „Zeichens" mit dem „Bezeichneten", des „Dinges" und seines „Namens" (von der weiter unten noch eingehender die Rede sein wird) und bei der von einer Ähnlichkeit zwischen beiden auch

*) Ich möchte gleichwol nicht mit Herrn E. du Bois-Reymond auch allen zukünftigen Fortschritten der Erkenntniss hier schon mit einem „Ignorabimus" vorgreifen.

keine Rede sein kann. Wesentlich insbesondere ist die Wechselwirkung, in die beide unter Umständen treten, nämlich vor allem die unter gewissen Voraussetzungen eintretende Einwirkung des Dinges auf unsre Empfindung und Vorstellung von demselben, wie sie unabhängig von unserm Willen durch eine Naturnotwendigkeit gegeben erscheint, sodann eventuell die Einwirkung unsrer Handlungen auf das Ding, oder vielmehr wiederum deren dadurch hervorgerufene Rückwirkung auf uns selber.

Die Eindeutigkeit solchen Entsprechens kann übrigens schon in Zweifel gezogen werden; ihr Ausdruck ist eventuell zu modifiziren — in Anbetracht der Möglichkeit, dass gleichwie ein geschliffener Krystall mit seinen verschiedenen Facetten das Bild eines leuchtenden Punktes als ein mehrfaches zurückwirft, auch unser Geist in der Lage sein könnte (falls ein Sinnesorgan dem „Facettenauge" vergleichbar), ein Ding an sich stets nur als eine Mehrheit von Dingen wahrzunehmen. Auch umgekehrt ist denkbar, dass wir Dinge a, b und c isolirt nicht zu erkennen vermögen, dass uns wohl aber a, wenn in Verbindung mit b, als ein Ding und ebenso a mit c als ein ander Ding in die Erscheinung tritt, ohne dass wir doch von dem gemeinsamen Element a der beiden eine Ahnung bekommen, und anderes mehr.

ε_1) Aus diesem gesetzmässigen Entsprechen, der erwähnten naturnotwendigen Wechselwirkung zwischen Ding und Vorstellung schöpfen wir nun die Berechtigung, doch in einem gewissen Sinne *von den Dingen selbst zu reden*, und nicht blos von unsern Vorstellungen über dieselben, trotzdem jene „an sich" sich unsrer Erkenntniss beharrlich verschliessen, und nur diese in unser Bewusstsein einzutreten vermögen.

Unstreitig wollen und beanspruchen wir, solches zu thun. Wenn wir z. B. sagen (vergl. Mill[1]): „Die Sonne (genauer: der Stand der Sonne über dem Horizont) ist die Ursache des Tages", so soll damit nicht etwa blos ausgedrückt werden, dass die Vorstellung (oder „Idee") von der Sonne die Ursache (oder Idee von der Ursache?) sei von unsrer Vorstellung des Tages; es soll nicht blos eine Beschreibung des subjektiven Zustands unsrer Vorstellungen damit gegeben werden, der als solcher ja ebenso gut in unsrer Laune oder Willkür blos begründet sein könnte — sondern es soll mit solchem Ausspruch darauf hingewiesen sein, dass in dem den erwähnten Erscheinungen (der Sonne und des Tages) zugrunde liegenden (unbekannten) Wirklichen etwas liegt, was kraft naturgesetzlicher Notwendigkeit uns zwingt, einen ursächlichen Zusammenhang zwischen beiden anzunehmen.

Im Hinblick, unter steter und als selbstverständlich geltender Bezugnahme auf jenen Zwang des Entsprechens und unter dem (allerdings nur zu oft ausser Acht gelassenen) „*metaphysischen Vorbehalt*"

(dass wir die Dinge „an sich“ *nicht* zu erkennen vermögen), können wir darum in der That von den Dingen der Aussenwelt selber (auch im Gegensatz zu unsern Vorstellungen) reden; in diesem Sinne und unter diesem Vorbehalte geschieht dies auch allgemein in den empirischen Wissenschaften und geschieht es von rechtswegen.

So hat nun z. B. die Frage, ob auf den von uns ewig abgewandten drei Siebenteln der Mondoberfläche, ob auf der „Rückseite“ des Mondes sich Wasser befinde, einen ganz bestimmten Sinn, wenn wir auch nicht wissen können, was der Mond, was Wasser, was Materie überhaupt „an sich“ ist, was der Erscheinung einer Oberfläche Wirkliches zugrunde liegt u. s. w. Dies wird wol jedermann ohne weiteres zugeben.

Ebenso ist aber auch — um ein neuerdings vielumstrittenes Beispiel anzuführen — die Frage eine vollberechtigte, ob der *physikalische Raum* wirklich ein „Euklidischer“, eine „ebene“ und sonach unendliche dreidimensionale Mannigfaltigkeit sei, oder ob er etwa als ein durchweg endlicher, nach allen Seiten mittelst vierdimensionaler Krümmung in sich zurückkehre. Auch bei dieser Frage handelt es sich nicht um die subjektive Beschaffenheit unsrer herkömmlichen, gewohnten Anschauung, welche zur Zeit noch unbestritten die des ersteren Raumes ist, sondern darum, ob nicht eine objektive Notwendigkeit vorliegt (oder wenigstens nach dem heutigen Stand unsrer Erkenntniss schon vorliegen *kann* und dereinst vielleicht sich aufdrängen wird) dieselbe zu modifiziren, der Wahrheit zuliebe sie umzubilden, nämlich sie durch die letztere Raumvorstellung zu ersetzen.

Ganz richtig hat auch Lotze hierin den Kernpunkt der Frage erblickt. Im übrigen scheint er mir aber in seiner gegen die Untersuchungen von Riemann und v. Helmholtz gerichteten Polemik (Metaphysik, p. 249 . . 267) (unter anderm) in einen analogen Fehler zu verfallen, wie ihn (nach Whewhell's Geschichte der induktiven Wissenschaften) der Kirchenvater Lactantius*) beging, der gegen die Möglichkeit von Gegenfüsslern auf unsrer Erde eiferte, weil er die ihm geläufige Richtung der Schwere absolut festhielt, und folgerichtig zu dem Schlusse kam, dass solche Antipoden auf dem Kopfe stehen müssten. Ganz ähnlich in der That überträgt auch Lotze in seinem Hauptargumente die ihm geläufige Vorstellung (und Annahme der Existenz) von unendlichen Geraden, dieselbe allzu fest haltend, ohne weiteres auf Wesen (jene fingirten mit ihrer ganzen Existenz an die Kugelfläche gebannten „Flächenwesen“), die sie nach den für ihr Dasein gemachten Annahmen gar nicht zu haben brauchten, ja überhaupt nicht haben könnten (p. 252), und spricht darum mit Unrecht von „Widersprüchen“, in welche solche Wesen durch das Studium ihres Raumes verwickelt werden müssten.

So sehr ich das neuerliche Wiederaufleben der (dermalen nur in einem wissenschaftlicheren Gewand, als früher, auftretenden) Mystik, welches sich an die erwähnte Frage der Raumdimensionen geknüpft hat, missbillige und beklage, halte ich doch die zweiterwähnte Raumanschauung für die richtige. Ich bin überzeugt — doch würde es mich hier zu weit führen, meine

*) Vor ihm, schon im Altertum, auch Tertullian — vergl. Ueberweg[1] p. 370.

Gründe darzulegen —, dass nicht nur jene neueren Untersuchungen der Mathematiker über mehrdimensionale Mannigfaltigkeiten logisch und erkenntnisstheoretisch vollberechtigte sind, sondern dass auch wirklich unsre raumerfüllende Welt eine durchaus „endliche“ ist — natürlich „unbegrenzt“ — jedoch nach jeder Richtung *unsres* Raumes in sich selbst zurückkehrend, wobei sich die successiven Phasen der jeweils augenblicklichen dreidimensionalen Gegenwart zu einem vierdimensionalen Gebilde der Wirklichkeit schichtweise übereinanderlegen. Zu dieser Anschauung bin ich — nebenbei gesagt schon vor der durch Zöllner eröffneten Aera der Kontroversen — angeregt durch die Lektüre des betreffenden von „Dr. Mises“ (Theodor Fechner's) „Vier Paradoxa“ — gelangt. Wer Recht hat, das wird — qui vivera, verra — eine fernliegende Zukunft entscheiden. Jedenfalls kann es nicht als Argument gegen die Richtigkeit einer Ansicht aufgeführt werden, wenn Verfechter derselben zu weit gegangen sind, wenn Einzelne zugunsten derselben auch vielleicht sich kompromittirt haben sollten, und für welche Ansicht man auch immer Partei nehmen möge, wird man doch Bernhard Riemann's (auf der Schluss-Seite seiner Arbeit „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen“ ausgesprochenes) Endziel gelten lassen — in welchem wir auch die Rechtfertigung aller metaphysischen Untersuchungen hauptsächlichst erblicken: dass die Forschung nicht „durch die Beschränktheit der Begriffe gehindert und der Fortschritt im Erkennen des Zusammenhangs der Dinge nicht durch überlieferte Vorurteile gehemmt wird“.

Wenn bei dem vorstehenden Exkurse das Wort „wirklich“ wiederholt gefallen ist, so war dasselbe bereits unter dem metaphysischen Vorbehalt, also *nicht* als gleichbedeutend mit „an sich“, zu nehmen. „Wirklich“ nennen wir (zu einer Zeit), was *ist*, im Gegensatz zu dem was nicht ist, und es bedarf letzteres keiner weiteren Erläuterung für diejenigen Dinge, deren wir unmittelbar inne werden. Erläuterungsbedürftig dagegen bleibt das Wort für die Dinge der Aussenwelt, die wir ja nicht selbst mit unserm Geiste erfassen, sondern von denen nur die Vorstellung, und eventuell der Sinneseindruck, in unser Bewusstsein eintritt. Indem wir solch' einem gedachten oder vorgestellten Dinge „Wirklichkeit“ zuschreiben, bringen wir es zum Ausdruck, dass wir eine objektive Notwendigkeit erkennen, die wir nämlich direkt als über unserm Willen stehend unfrei empfinden — die wir denn als eine objektiv begründete auch für gemeinverbindlich halten — kraft der Natur unsres Vorstellungsvermögens das Ding gerade so und nicht anders zu denken. Das „Ding an sich“ nennen wir die (unbekannte) Ursache, die wir solchem Zwange unterzulegen nicht umhin können.

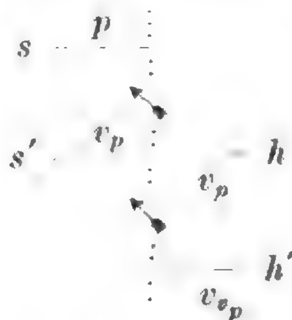
Mit dieser Erklärung wird solchen Dingen, die wir überhaupt nie gedacht haben, die Wirklichkeit nicht abgesprochen.

ζ_1) Durch das Fehlen oder die Bezugnahme auf jenes objektiv notwendige Entsprechen zwischen Ding an sich und Vorstellung werden einige Unterscheidungen bedingt und begreiflich, die sonst unverständlich erscheinen müssten.

Es wird verständlich, wieso die Vorstellung *von* der Vorstellung

eines Dinges verschieden sein kann von der Vorstellung eben dieses Dinges (obgleich wir, wie gesagt, jede Vorstellung als das, was sie „an sich“ ist, inne werden und als ebensolches auch beliebig zu reproduziren vermögen), indem bei letzterer jene Bezugnahme eintreten mag, während sie bei ersterer fallen gelassen ist.

Spreche ich von einem *Pferde* (p), so *habe* ich eine *Vorstellung von dem Pferde* (v_p). *Spreche* ich aber von meiner *Vorstellung von dem Pferde*, so *habe* ich eine *Vorstellung von der Vorstellung von dem Pferde* (v_{v_p}). Das beifolgende Schema



versinnlicht in Zeichen unter s, s' das, wovon wir sprechen mögen, und unter h, h' dasjenige, was wir darunter *denken* oder im Geiste „haben“. Wäre *jenes* nicht verschieden, nicht zweierlei, so müsste, wenn die Vorstellung von dem Pferde (eine) lebhaft(e) ist, auch das Pferd (ein) lebhaft(es) sein. Müssen wir aber Dasjenige, wovon wir beidemal reden, als zweierlei anerkennen, so scheint es, dass wir auch Dasjenige, was wir uns darunter denken, beidemal nicht als identisch dasselbe gelten lassen dürfen.

Es drängt sich die Frage auf, ob das nun ohne Ende so weiter geht, ob wir also die Vorstellung von der v_{v_p} abermals als ein neues Objekt des Denkens anzuerkennen haben, und so fort? Indessen will ich mich begnügen, hier blos die Frage aufgeworfen zu haben; ununtersucht bleibe, ob dabei nicht Gebilde von einer Art entstehen würden, wie sie etwa im Gegensatz zu „rationalitas“ das lateinische Scherzwort „rationabilitudinalitas“ anzudeuten und wol zu persifliren bestimmt war.

Es wird ebenso begreiflich, wie wir unsrer Vorstellung vom Raume — gleichwie schon dem Bewusstsein, das sie in sich fasst — das Merkmal der Ausdehnung abzusprechen vermögen, während wir doch dem (sonst mit jener identisch erscheinen würdenden) vorgestellten Raume eine dreifache Ausdehnung zuerkennen — und anderes mehr.

Haben wir nach den Errungenschaften der Physiologie als das Organ unsres Bewusstseins den cerebralen Teil unsres Leibes anzusehen, so erscheint es (unter anderm) immerhin rätselhaft, wie in diesem, dem Hirne, welches ja ganz im Kopfe Platz hat, die Vorstellung ausgebildet wird von einem Raume, der noch weit über diesen hinaus bis zu den Sternen (und noch weiter) reicht. Lehrreiche und anregende Betrachtungen über diese und noch manche andere Frage über Raum, Zeit, Bewegung und Verursachung finde ich in anziehender Darstellung durchgeführt in dem Werke Herrn Otto Liebmann's[1], welches nunmehr in zweiter Auflage vorliegt.

η_1) Fassen wir (mit Mill) die Ergebnisse unsrer Betrachtungen zusammen, so kommen wir zu dem Schlusse, in welchem die besten Denker jetzt übereinstimmen:

Wie wir von der Welt überhaupt nichts inne werden, als die Reihenfolge der Zustände unsres Bewusstseins, als da sind: Empfindungen (Sensationen), Gemütsbewegungen (Emotionen) und Willensregungen (Wollen), schliesslich Gedanken*)-„Zustände", natürlich, die durch den Wechsel in ihrer Succession auch „Vorgänge" zusammensetzen, wofern sie nicht schon selbst als solche aufzufassen — so machen die Empfindungen und die Ordnung ihres Eintretens auch alles aus, was wir von der materiellen Aussenwelt erfahren, und absolut sicher wissen können, und während die „Substanz" materieller *Körper* die unbekannte Ursache unsrer Empfindungen ist, erscheint die „Substanz" *Geist* als der („an sich" ebenfalls unbekannte**) Empfänger oder Rezipient derselben.

Von den erwähnten Dingen sind es vorzugsweise die Gedanken, welche uns noch weiter zu beschäftigen haben werden.

Dass nun die Dinge der Aussenwelt nicht „an sich" erkennbar sind, ist für uns in jeder praktischen Hinsicht glücklicherweise ganz ohne Belang. „Was die Dinge an sich sein mögen, weiss ich nicht und brauche es auch nicht zu wissen, weil mir doch niemals ein Ding anders als in der Erscheinung vorkommen kann" (Kant, Kritik der reinen Vernunft. Ausgabe 1791, p. 332).

Die Art, wie diese Welt uns notwendig erscheint, wie die Dinge auf uns einwirken, beziehungsweise zurückwirken, das ist und bleibt für uns die Hauptsache. Es kommt dem Landmann darauf an, dass der von ihm bebaute Acker Früchte trägt, welche sich uns wohl-

---

*) Mill[3] will diese (vier) Arten von Bewusstseinszuständen mit *einem* Wort als *„Gefühle"* (im weitern Sinne) bezeichnet wissen und macht darauf aufmerksam, dass, was man „Wahrnehmung" nennt, nichts ist, als ein (an die Empfindung des Sinneseindruckes geknüpfter) Glaube, also eine Art Gedanke, und dass „Handlungen" nichts sind, als Willensthätigkeiten, auf welche eine Wirkung folgt (p. 90 der Schiel'schen Übersetzung). Ich frage noch: wohin gehört die freie Vorstellung?

**) So nach Mill. Ich will es unerörtert lassen, ob und in welchem Sinne diese Qualifikation zutrifft. Ferner will ich hier nicht eintreten in die subtile Frage, unter welchem Gesichtspunkt etwa gerade *Materie* und *Geist* die übereinstimmende Bezeichnung als „Substanz" verdienen möchten. Die Physik hat der *Materie* bis jetzt erst *eine* Art von Substanz gegenübergestellt, als welche die Arbeitsvorräte der Natur, die freie und die gebundene („kinetische" und „potenzielle") *Energie* zu bezeichnen.

schmeckend und nahrhaft erweisen, ganz einerlei, was diese an sich sind oder das denselben zugrunde liegende Wirkliche.

ϑ_1) Um unsre Zwecke zu erreichen, unsre Ziele zu verwirklichen, dazu bedürfen wir der Mitwirkung unsrer Nebenmenschen; wir können deren Kooperation meist nicht entbehren. Um aber solche zu erlangen, müssen wir uns mit ihnen *verständigen*.

Auf die mannigfachen andern Momente, aus welchen das Mitteilungsbedürfniss sich noch zusammensetzen mag und mit denen es im menschlichen Gemüte begründet erscheint, will ich hier nicht eingehen. Es ist ausreichend, den einen praktischen Gesichtspunkt hier hervorgehoben zu haben, welcher schon für sich allein mit Macht zu einer Verständigung unter den Menschen drängt.

Auch bei Tieren sehen wir nicht selten ein planmässiges Zusammenwirken und eine gewisse Arbeitsteilung, vor allem bei den staatenbildenden, wie Ameisen, Bienen, u. s. w. — es genügt schon, an die Bauten, den Ackerbau, die Viehzucht, Kriegführung und Sklavenhaltung bei den erstern zu erinnern. Auf welche Weise, wol unter dem Einfluss des Nachahmungstriebes, derjenige Grad der Verständigung zwischen den Individuen des Stammes, der zu solchen Werken erforderlich ist, doch ohne ein Surrogat der Sprache, zustande kommt, ist nicht ganz aufgeklärt.

Das wirksamste und ausgiebigste, das Mittel zur Erzielung der weitestgehenden und weitreichendsten Verständigung unter den Menschen ist jedenfalls die *Sprache*.

ι_1) In ihr bringt das denkende Subjekt zu dem Ding an sich und zu seiner Vorstellung von demselben noch ein drittes hinzu: den *Namen* oder das *Zeichen* des Dinges.

Um mit dem Seitenblick auf die Metaphysik, zu welchem wir uns oben veranlasst gesehen, thunlichst zum Abschluss zu kommen, sei hier sogleich darauf aufmerksam gemacht, dass — woferne nur die Fälle von etwaiger Sinnestäuschung ausgeschlossen werden — das *Zeichen* ebenfalls zu der Klasse von Dingen zu zählen ist, von welchen wir sagen dürfen, dass wir sie „an sich" erkennen.

Was freilich den Kohlenstoffteilchen, die den gedruckten Buchstaben *a* zusammensetzen, mit ihrer vorwiegenden linearen und Flächenausdehnung Wirkliches zugrunde liegt, wissen wir nicht; es kann uns dies aber auch vollkommen gleichgültig sein. Das Zeichen kommt eben für uns lediglich als dasjenige in Betracht, als was es uns *erscheint;* nur seine notwendige Wirkung auf uns, seine für alle, die es wahrzunehmen vermögen, gleichmässig charakteristische Erscheinung bestimmt und regelt seine Verwendung. Und diese *Erscheinung* des Zeichens, kraft welcher wir den Buchstaben *a* in beliebiger Wiederholung immer als den gleichen erkennen und von allen andern Buchstaben unterscheiden, bildet für uns das *Wesen* desselben.

B. Vorbetrachtungen über Zeichen und Namen.

$\varkappa_1$) Ich glaube, die elementarste aller deduktiven Disziplinen nicht einleiten zu dürfen, ohne zuvörderst auf die enorme Wichtigkeit des Zeichens, das ja an sich als ein unbedeutendes Ding erscheint, gebührend hinzuweisen, und schliesse ich mich dabei grösstenteils — in freier Weise — an die Ausführungen Trendelenburg's[2] (Bd. III, p. 1 .. 4) an.

Erst mit dem Eintritt der „bezeichnenden" oder „symbolisirenden" Thätigkeit (zu welcher aus der bildenden Thätigkeit auch noch die abbildende gerechnet werden mag) scheint in der That das Menschengeschlecht sich aus dem absoluten Nullpunkte der Civilisation und über das Niveau des Tieres erhoben zu haben, und kaum einer wirklichen Sache dürfte der Menschengeist soviel Fortschritte zu verdanken haben, als wie dem *Zeichen* der Sachen.

Das Zeichen, welches in der Geberde und im Ton zum Affekt, zur Lebensstimmung spricht, spricht in Wort und Satz zum Intellekt und hat nach den Gesetzen der Ideenassoziation die Kraft, in dem, der es vernimmt oder anwendet, bestimmte Vorstellungen zu erzeugen und in ihrer Abfolge zu richten.

Indem es mit der Vorstellung zusammenwächst, verschmilzt, wirkt es selber auch auf das Denken zurück. Durch das Zeichen werden die sonst in einander fliessenden, zuletzt zerfliessenden, Vorstellungen gesondert und als getrennte Elemente ein bleibender Besitz, über welchen der Denkende fortan verfügen kann. Mittelst des Zeichens wird unterschieden, das Unterschiedene fixirt und das Fixirte zu neuen und eigentümlichen Verbindungen tauglich gemacht; das Zeichen wird uns zur Handhabe, an welcher wir die Gedankendinge packen. Erst durch das Zeichen löst die Vorstellung von dem sinnlichen Eindrucke, an welchem sie sonst haftet, sich los, und vermag nun in das Allgemeine sich zu erheben. So wird das Denken durch das Zeichen des Worts nach der einen Seite frei, auf der andern bestimmt.

Ferner gibt es nur durch das Zeichen, durch welches in Vielen derselbe Gedanke, derselbe Zweck — *ein* Wille und *eine* Seele — möglich wird, jene Gemeinschaft der menschlichen Kräfte, auf welcher das Leben der Menschen als ein Leben der Individuen im ganzen Geschlecht, auf welcher Gesittung und Bildung beruht.

Diese Wirkung schon des ausgesprochenen Zeichens steigert sich noch ausserordentlich in der *Schrift*.

Das hörbare Zeichen, flüchtig wie der Augenblick*), wird durch die Schrift sichtbar und bleibend, den Verkehr der Vorstellungen zwischen räumlich Entfernten anknüpfend, selbst den — allerdings nur einseitigen — Verkehr der Gegenwart mit längst vergangenen und mit den zukünftigen Geschlechtern vermittelnd.

Sofern das Leben des Menschen ein historisches Leben ist, ein Leben in einer überkommenen durch die Geschichte gebildeten geistigen Substanz, so ist die Schrift das Organ dieses sich fortsetzenden und erweiternden Lebens und Wirkens. Der geschichtliche Geist der Menschheit gestaltet und mehrt sich in der Schrift.

Darum fühlten die Menschen auch seit der ersten Erfindung die Wichtigkeit der Schrift für menschliches Leben. Gesetze, schon seit Jahrhunderten, verpönen ihre Fälschung.

Von den ältesten schriftlichen Urkunden aber, in welchen Glaube und Willensmeinung unter ihren Zeitgenossen hervorragender Persönlichkeiten sich einst verewigte und die als etwas Ausserordentliches dem kindlichen Geist einer früheren Kulturepoche begreiflich imponirten, sehen wir auch manche bis auf den heutigen Tag noch in übermässigem autoritativen Ansehen sich erhalten.

Seit bald einem halben Jahrtausend steigert die Schrift im *Druck* ihre Fähigkeit verbreiteter Mitteilung und an der Aufgabe, die Zeichen der Schrift in kürzester Zeit und grösster Vervielfältigung auf kleinem Raume so herzustellen, dass sie dem Auge sichtbar bleiben, wird immer noch fortgearbeitet. Endlich dürfen wir es rühmen, dass das Menschen verbindende Zeichen schon als ein unsichtbarer Blitz von Land zu Land, von Weltteil zu Weltteil fliegt, den ganzen Erdball mit seiner Herrschaft umspannend.

So hat das Zeichen in Sprache und Schrift schon für den Menschen überhaupt eine Bedeutung, wie gar nichts anderes. In Hinsicht seines Nutzens für die Gesellschaft erstanden allerdings ihm schon Rivalen oder Konkurrenten, wie Steinkohle und Eisen, wie die Dampfmaschine. Je mehr wir aber von dem Leben überhaupt den Gebieten geistiger Thätigkeit uns zuwenden, eine um so hervorragendere Rolle sehen wir dem Zeichen zufallen, und die bedeutendste in den Wissenschaften, vornehmlich den exakten. Erfindungen, auch Entdeckungen, die sachlichen Errungenschaften, welche sich der Menschengeist erwirbt, stehen fast ohne Ausnahme auf der Voraussetzung des verständlichen und konsequent gehandhabten Zeichens, welches gleicherweise den einsamen Umgang des Gedankens mit sich selbst und den Gedankenverkehr in der Menschheit bedingt.

*) Nach dieser Seite scheint indess Edison's Erfindung des Phonographen schon eine neue Aera zu inauguriren.

λ_1) Es haben diese Wissenschaften, mehr oder minder ausgesprochen, die Tendenz, die Schwierigkeiten des Studiums der *Dinge* — der Dinge, die man nicht immer bequem zur Hand hat, die man meist nicht festhalten oder fixiren und ohne weiteres manipuliren kann — möglichst *abzuwälzen* auf das Studium ihrer *Zeichen*, welche letzteren dem Forscher stets zur Verfügung stehen und mit unvergleichlicher Leichtigkeit zu hantiren sind.

Die Erleichterung und Vorteile, welche ein judiziöser Gebrauch der Zeichen in dieser Hinsicht der Forschung zu gewähren vermag, würden sich passend vergleichen lassen mit denjenigen, welche gegenüber dem direkten Tauschverkehr mit Waaren (in Zentralafrika z. B.) die Einführung von Wertzeichen — des Geldes — gewähren müsste. Freilich würde mit solch' illustrirendem Hinweis an Ort und Stelle nicht viel zu gewinnen sein, indem wir finden, dass Völkerschaften, welche sich noch im Zustande analphabetischer Wildheit befinden, auch mit dem Gebrauch des Geldes oft unbekannt sind.

Der vorstehende Vergleich ist ähnlich schon von Leibniz gemacht und verlohnt es, seinen Gedankengang näher darzulegen (vergl. Trendelenburg l. c. auf spätern Seiten).

Leibniz geht von einer psychologischen Betrachtung über die Bedingungen der Deutlichkeit unsres Denkens aus. Ursprüngliche und einfache Vorstellungen, so wie sie z. B. aus der Wahrnehmung stammen, pflegen auch anschaulich reproduzirt zu werden. Hingegen denken wir die zusammengesetzte Vorstellung gemeiniglich nur durch Zeichen. Namentlich wo behufs Bestimmung und Erkenntniss des Wesens eines Dinges eine längere Zergliederung nötig ist, schauen wir die ganze Natur dieses Dinges nicht an, sondern kürzen sie im Zeichen ab, indem wir darin die Fähigkeit zu haben meinen, die Vorstellung, wenn es sein muss, (vollends) zu entwickeln. So betrachten wir z. B. bei dem Begriff eines Tausendecks nicht wirklich alle tausend Seiten, sondern die Zahl tausend und sich aneinander schliessende Seiten schweben uns dunkel vor, und statt der deutlichen Vorstellung bedienen wir uns des Wortes als eines Zeichens, wie z. B. in der Arithmetik und Algebra allenthalben (Meditationes de cognitione veritatis et ideis, zuerst in den Acta eruditorum. Editio Erdmann, p. 79, 80).

Und ferner sagt Leibniz im Eingang seiner deutschen Schrift: Unvorgreifliche Gedanken betreffend die Ausübung und Verbesserung der deutschen Sprache (Dutens VI, 2, p. 7 sqq. — wahrscheinlich 1697):

„Wir haben Zeichen nötig nicht nur (um) unsre Meinung Andern anzudeuten, sondern auch *unsern Gedanken selbst zu helfen.* Denn gleichwie man in grossen Handelsstädten, auch im Spiel und sonsten nicht allezeit Geld zahlet, sondern sich an dessen Statt der Zeddel oder Marken*) bis zur letzten Abrechnung oder Zahlung bedient: also thut auch der Verstand mit den Bildnissen der Dinge, zumal wenn er viel zu denken hat, dass er

*) Wir würden heutzutage sagen: der Buchführung und Wechsel. Der Verf.

nämlich Zeichen dafür brauchet, damit er nicht nötig habe, die Sache jedesmal, so oft sie vorkommt, von neuem zu bedenken. Daher, wenn er sie einmal wohl gefasst, begnügt er sich hernach oft, nicht nur in äusserlichen Reden, sondern auch in Gedanken und innerlichem Selbstgespräch, das Wort an die Stelle der Sache zu setzen. Und gleichwie ein Rechenmeister, der keine Zahl schreiben wollte, deren (In-) Halt er nicht zugleich bedächte und gleichsam an den Fingern abzählete, wie man die Uhr(schläge) zählt, nimmer mit der Rechnung fertig werden würde: also, wenn man im Reden und auch selbst in Gedanken kein Wort sprechen (passiren lassen) wollte, ohne sich ein eigentliches Bildniss von dessen Bedeutung zu machen, würde man überaus langsam sprechen, oder vielmehr verstummen müssen, auch den Lauf der Gedanken nothwendig hemmen, also im Reden und Denken nicht weit kommen. Daher braucht man oft die Worte als Ziffern oder als Rechenpfennige, anstatt der Bildnisse und Sachen, bis man stufenweise zum Facit schreitet und beim Vernunftschluss (? Endergebniss der Überlegung) zur Sache selbst gelanget. Woraus erscheinet, wie ein Grosses daran gelegen, dass die Worte als Vorbilde und gleichsam als Wechselzeddel des Verstandes wohl gefasset, wohl unterschieden, zulänglich, häufig, leichtfliessend und angenehm seien."

„Wenn der Geometer", sagt Leibniz in demselben Sinne in einer andern Schrift (Fundamenta calculi ratiocinatoris, Editio Erdmann, p. 92), „sooft er im Beweisen eine Hyperbel oder eine Spirale nennt, immer genötigt wäre, ihre Erklärungen oder Entstehungsweisen oder wieder die Erklärungen der diese bildenden Begriffe sich genau vor Augen zu stellen, so würde er sehr langsam zu neuen Entdekungen gelangen; wenn der Arithmetiker beim Rechnen die Werte aller Ziffern und die Menge der Einheiten nacheinander dächte, so würde er nie weitläufige Rechnungen zu Ende bringen, und es wäre nicht anders, als wenn er statt der Ziffern soviele Steinchen anwenden wollte; und der Rechtsgelehrte kann nicht immer, sooft er die Aktionen, die Exzeptionen oder die Rechtswohlthaten erwähnt, die wesentlichen Erfordernisse dieser Dinge, welche oft weitläufig sind, im Geiste durchlaufen, und hat es auch nicht nötig."

Wie man sieht, berührt hier Leibniz schon den bedeutsamen Unterschied, welcher zwischen *unmittelbaren* (oder *„intuitiven"*) und *mittelbaren (symbolischen) Vorstellungen* besteht.

Man kann z. B. die fünfhundert Billionen Schwingungen, welche in einem gelben Lichtstrahl an irgend einer Stelle in der Sekunde vor sich gehen, sich nicht im eigentlichen Sinn des Wortes *„vorstellen"*, weil das ganze Leben des Menschen auch beim Alter des Methusalem nicht ausreicht, um auch nur einer einzigen Billion sich mit Gedankenschnelle folgender Vorstellungen, Empfindungen oder Wahrnehmungen als getrennter Dinge inne zu werden — ganz abgesehen von der ihrer Kleinheit wegen auch nicht mehr vorstellbaren Einzelschwingung oder Bewegung eines Teilchens in seiner zum Strahl senkrechten elliptischen oder kreisförmigen Bahn (so wenigstens für den Standpunkt der Fresnel'schen Undulationstheorie, welcher neuerdings aber eine elektrodynamische Theorie des Lichts — von Maxwell, nach den erstaunlichen Entdeckungen von Hertz wol siegreich —

gegenübersteht). Man kann jene gleichwol noch *„denken“* oder mittelbar sich vorstellen. Analog vermögen wir vier gegenseitig zu einander senkrechte Gerade *ohne Widerspruch* uns zwar zu „denken“, aber nicht *mehr*, als (irgend) drei derselben, auf einmal uns anschaulich „vorzustellen“ — eine, wie zu sehen ist, unerlässliche Unterscheidung, die bei der Kontroverse über die Raumdimensionen vielfach missachtet oder übersehen worden ist. Wir bedauern, bei den uns hier gesteckten Zielen auf diese interessante Frage nicht noch näher eingehen zu können.

μ_1) Je nachdem sie ihr obiges Ideal bereits erreicht haben oder nicht, sind die exakten Wissenschaften aus ihrem ursprünglichen, dem induktiven Stadium in das deduktive übergetreten, oder befinden sich noch in jenem.

Hieraus erhellt, dass die allerwichtigsten Funktionen dem Zeichen in den deduktiven Wissenschaften obliegen müssen, ja dass dasselbe schliesslich in diesen den einzigen Gegenstand der Beachtung bilden wird.

Hier ist denn, dieser Wichtigkeit entsprechend, der „Bezeichnung“ überhaupt und spezieller der Namengebung, Terminologie oder Nomenklatur auch die allergrösste Sorgfalt zu widmen. Es erscheint z. B. ein schwieriges mathematisches Problem oft schon halbwegs gelöst, sobald es gelungen, die zweckmässigste Bezeichnungsweise für die zu untersuchenden Gebilde zu entdecken, in welcher die fundamentalen Eigenschaften derselben am übersichtlichsten und angemessensten Ausdruck finden.

Auch zeigt die pädagogische Erfahrung, dass diejenigen Personen, welchen eine geringe Begabung zu exaktem Denken zuzusprechen ist, allemal eine auffallende Gleichgültigkeit, oft eine sich vornehm dünkende Geringschätzung gegen das Zeichen zur Schau tragen und in dieser Stimmung Unlust verraten, sich in die Disziplin des Zeichens zu fügen.

In der Herrschaft über die Zeichen — zunächst der Wortsprache(n) — in der Fähigkeit zum und Gewöhnung an korrekten Gebrauch der Wörter und ihrer Abwandlungen, Flexionen und an richtigen Satzbau, pflegt man überhaupt ein wesentliches Merkmal der *Bildung* mit Recht zu erblicken.

ν_1) Aus all' den angeführten Gründen erscheint es ratsam, auch den Prinzipien der Bezeichnung, wie sie aus der Forderung ihrer Zweckdienlichkeit sich als notwendige ergeben, einige Aufmerksamkeit von vornherein zuzuwenden.

Zunächst müssen wir hier einer Verwechselung von *„Name“* und *„Wort“* vorbeugen.

Was ein *Wort* ist, weiss jedermann (und wird dieser Begriff unter anderm auch in der Telegraphie nach seinem Umfang scharf abgegrenzt).

Nicht alle Wörter aber sind Namen; vielmehr gibt es Wörter, die zwar dazu dienen, in Verbindung mit andern, Namen zusammenzusetzen, für sich jedoch noch keinen solchen vorstellen (Beispiele nachher).

Auf der andern Seite wird nicht jeder Name durch ein Wort repräsentirt, sondern haben wir zu unterscheiden: *einwörterige* und *vielwörterige* Namen. „Die Hauptstadt des deutschen Reiches“, oder auch „die grösste Stadt, die an der Spree liegt“ ist sogut ein Name als wie „Berlin“; es ist zur Zeit ein mit diesem letztern gleichbedeutender Name.

Zu den aus Wörtern zusammengesetzten Namen kommen in der Wissenschaft noch Buchstaben selbst und solche Namen hinzu, die sich aus Buchstaben oder Ziffern mittelst eigener Verknüpfungszeichen zusammensetzen. Solche Namen bezeichnen wir vorzugsweise als „analytische *Ausdrücke*“ (expressions, terms). Es kann und wird uns oft auch ein solcher Ausdruck, wie $a.(b+c)$, als Name oder Zeichen für ein Ding zeitweilig herhalten — und geben wir uns der Hoffnung hin, dass durch dergleichen blosse Namen sich ein grosser Geist nicht abschrecken lassen werde!

Name (nomen, noun) nennen wir ein Wort, Wortgefüge oder Zeichen, welches nach den seinen Gebrauch regelnden Konventionen — wonicht gemäss längst vorhandener Übung — fähig und dazu bestimmt ist, ein Objekt des Denkens, ein „Ding“ selbst zu bezeichnen. Der Name muss demnach (im Nominativ) als Subjekt eines Satzes stehen können, sobald man (in einem solchen) von dem Dinge reden, etwas darüber aussagen will.

Von den Wörtern stellen deshalb die Hauptwörter (Substantiva) ohne weiteres (im Nominativ) Namen vor, und auch die Eigenschaftswörter (Beiwörter, Adjektiva) und Zeitwörter (Verba) sofern sie in substantivischer Verwendung vorkommen, wie „Weiss“ für Etwas weisses resp. die Empfindung weisser Farbe, oder „Schwimmen“ für die Thätigkeit resp. Kunst des Schwimmens. In der Arithmetik werden auch Zahlwörter (Numeralia) substantivisch als Namen gebraucht. Und selbstverständlich werden endlich Fürwörter (Pro-nomina), wie „Dieser“ oder „Jener“ zu den Namen gerechnet werden dürfen, sofern sie blos als Stellvertreter eines schon erwähnten (resp. anderweitig bekannten) Namens fungiren, aus Rücksichten des Wohlklangs aber, oder um Umständlichkeiten in der Rede zu vermeiden, kürzehalber, nur dessen Wiederholung zu ersparen bestimmt sind.

$\mathfrak{k}_1$) Unsre Kultursprachen kennen *zehn* Wortarten, oder wenn wir die ja für die Logik ganz belanglosen Ausrufungswörter (Interjektionen) beiseite lassen, deren neune, von welchen wiederum der Artikel in manchen fehlt, sodass einige dieser Sprachen (wie Lateinisch, Russisch) sich mit acht Arten von Wörtern (nach der Klassifikation der Philologen und Grammatiker) in logischer Hinsicht behelfen.

Die obenerwähnten fünf von diesen Wortarten *können*, wie wir

sahen (auch die vier letztern aber nur bedingungsweise und in bestimmten ihrer Formen, wie Infinitiv des Verbums etc.) als Namen verwendet werden.

Die übrigen, als da sind die Umstandswörter (Adverbia), die Präpositionen und die Bindewörter (Konjunktionen) sind dessen unfähig. Solche Wörter, wie „leider", „zu", „entweder" sind keine Namen, und dasselbe gilt auch von den Flexionsformen des Substantivs, wie z. B. der Genitiv „Arthurs" etc. (vergl. Mill). Die Logiker der Aristotelischen Schule („Scholastiker") bezeichneten sie als *„synkategorematische"* Ausdrücke, weil sie erst „zusammen" mit andern ein Ding bezeichnen können (etwas „aussagen") — im Gegensatz zu den Namen oder *„kategorematischen"* Ausdrücken.

Diese Wörter können auch in der That nicht als Subjekt eines Satzes stehen; man kann nicht sagen: „Arthurs war in dem Zimmer" oder: „Leider ist zu beklagen". Man kann freilich sagen: „Leider ist ein deutsches Adverbium". In diesem Falle aber steht „Leider" für: „Das Wort: leider" — analog wie, wenn wir sagen: „Pferd ist ein Hauptwort", das Subjekt auch nur als ein Wort in Betracht fällt und nicht in Hinsicht auf dasjenige, was es bedeutet. Man könnte solche Verwendung passend als die *„suppositio nominalis"* bezeichnen im Gegensatz zu der *„suppositio materialis*, sive realis" (dies zwar zugunsten der Zweckmässigkeit abweichend vom scholastischen Gebrauche). Wer solchen Unterschied nicht anerkennen wollte, der müsste auch zugeben, dass ein gewisses Hauptwort vier Hufe hat und zwei Ohren! Im Deutschen ist dem Missverständniss allerdings einigermassen vorgebeugt durch den Wegfall des Artikels bei „Das Pferd" oder „Ein Pferd", dessen Beibehaltung die erstere oder nominelle Auffassung unmöglich machen würde*) — nicht so allerdings in den des Artikels entbehrenden Sprachen. Es erscheint darum *hier* beinahe als Luxus, zu statuiren, dass wir die Auffassung des Subjektes als eines blossen Namens, Wortes oder Wortgefüges späterhin stets ausgeschlossen wissen wollen.

o_1) Wie ein Zeichen als solches beschaffen ist, auf welche Weise es eventuell aus einfacheren Zeichen aufgebaut, zusammengesetzt wird, dies ist (zwar) keineswegs ganz gleichgültig:

Es müssen Zeichen, die für häufigen Gebrauch bestimmt, solchem ausgesetzt sind, vor allem angemessen *kurze* sein; es muss Weitläufigkeit, Komplikation derselben thunlichst vermieden werden. Andernfalls würde ja ihre Anwendung allemal einen ärgerlichen Aufenthalt verursachen, und vergegenwärtigt man sich leicht, wie wenig weit wir mit unserm Denken, mit unsern Erörterungen, Diskussionen kommen

*) Wofern wir nicht sagten: „Das Pferd" ist ein mit dem bestimmten Artikel verbundenes Hauptwort der deutschen Sprache. Hierbei weisen nur noch die Anführungszeichen auf die suppositio nominalis hin.

würden, wären wir z. B. genötigt, den Namen jedes Vorzustellenden immer erst in Stein zu meisseln!

Der unter λ_1) erwähnten psychologischen Unterstützung, welche das Denken aus dem Zeichen schöpft, würde es ohne diese Anforderung grösstenteils verlustig gehen.

Von den Zeichen, über welche die Sprache verfügt, erfüllen (als die einfachsten) genannte Anforderung am besten die *Buchstaben.* Deren Anzahl ist allerdings eine geringe. Man hat dieselbe in's Unbegrenzte vermehrt, indem man sie einerseits mit *„Accenten“* wie in a', a'', . . . andrerseits mit angehängten Ziffern oder Zahlzeichen in Form von *„Suffixen“*, *„Stellenzeigern“* oder *„Indices“* versah, wie a_1, a_2, a_3 etc.

Ungeachtet dieser Vermehrung des Vorrates an leidlich einfachen Zeichen hat man aber vorgezogen, denselben keine ein für allemal feststehende Bedeutung für den menschlichen Verkehr überhaupt beizulegen, sondern sie zu vorübergehenden Bezeichnungszwecken sich verfügbar zu erhalten. Für eigenartige Verwendung in bestimmten Spezialwissenschaften (ich erinnere an die Zeichen für die chemischen Elemente), für diverse Untersuchungsgebiete und Untersuchungen (wie Buchstabenrechnungen) — eventuell zu beliebiger Verwendung — sind die Buchstaben reservirt, also dass diese gleichsam die Rolle spielen oder den Dienst zu versehen haben des „Mädchens für Alles“ in dem Haushalte — mit Zeichen.

Zur Unterstützung des Denkens sowol als zur Darstellung und Beschreibung seiner Gesetze werden auch wir in der hier vorliegenden Spezialwissenschaft von dieser Gunst der Situation umfassenden Gebrauch machen und zwar einen viel ernstlicheren, als es in Deutschland bei der einschlägigen Literatur bislang üblich gewesen. Auch nehmen wir gelegentlich das Vorrecht jeder Wissenschaft in Anspruch, sich für die eigenartigen ihrer Betrachtung unterliegenden Objekte noch besondre zu deren Darstellung vorzugsweise geeignete Zeichen zu schaffen.

Im übrigen sind wir aber nicht in der Lage, die Zeichen, deren unser Denken bedarf, vollkommen frei nach unserm Gutdünken — beschränkt lediglich durch objektive Zweckmässigkeitsrücksichten — willkürlich zu wählen, sondern wir finden uns zunächst daran gebunden, aus einem bereits vorhandenen Zeichenvorrat zu schöpfen, indem wir eben angewiesen sind auf den historisch überkommenen Wörterschatz der Sprache.

π_1) Von dem uns schon mit der Sprache gegebenen Zeichenvorrat, mit welchem wir (also) in erster Linie zu rechnen haben, pflegen einwörterige Namen die erwähnte erste der an das Zeichen zu stellenden Anforderungen immerhin schon leidlich gut zu erfüllen.

Das hörbare und sichtbare Zeichen, als welches ein solcher Name erscheint, zeigt sich nun dergestalt mit der Vorstellung verwachsen, dass diese kommt, wenn das Zeichen ruft, sowie auch umgekehrt bei der Vorstellung uns stets der Name einfällt — Vorgänge, bei welchen sogar, wie unter λ_1) auseinandergesetzt, die Vorstellung nicht selten

unvollendet bleibt, und mehr nur im Zeichen als in dieser selbst gedacht wird.

Nur zu einem verschwindend geringen Teile aber besteht ein angebbarer Zusammenhang zwischen diesem Zeichen und dem Bezeichneten, zwischen dem Wortlaut des Namens und dem Inhalt der Vorstellung oder demjenigen, was der Name benennen soll (Trendelenburg l. c.).

Solches ist ja in der That bekanntlich der Fall bei den sogenannten *„Onomatopoetica"*, die z. B. mit dem Klange des Namens eine Schallwirkung des zu benennenden Dinges nachahmen, wie die Hauptwörter: Rabe*), Knall, Donner und andere, wie die Zeitwörter: meckern, miauen, zirpen, rollen etc. Auch manche Interjektionen, wie patsch, plumps, knak, könnten hierzu angeführt werden. Bei dem Wort „Blitz" sollte man meinen, dass die Plötzlichkeit und Kürze der betreffenden Lichterscheinung durch die Kürze der Silbe angedeutet werde. Und um z. B. das griechische Wort *βδέλλα* für Blutegel auszusprechen, müssen die Lippen eine saugende Bewegung andeuten etc. etc.

Der sprachenbildende Geist knüpft überhaupt das Zeichen an eine hervorstechende Seite der Sache an; aber die Anknüpfung an den Inhalt des unter dem Zeichen Begriffenen ist einseitig und zufällig, gestattet keinen hinreichend bestimmten Rückschluss auf den vollen Inhalt, das ganze Wesen desselben. Das andeutende Gepräge des Zeichens schleift sich überdies mit der Zeit ab, und die ursprüngliche Marke ist in ganzen Sprachen verwischt. Die verschiedenen Sprachen bezeichnen in der That dasselbe Ding auch mit den verschiedensten Wörtern.

Der Laut schlägt diejenige Vorstellung in uns an, welche sich *mit blinder Gewöhnung*, aber nicht mit unterscheidendem Bewusstsein, welche sich faktisch, aber nicht *logisch* in *dies* Zeichen und in kein

*) Die meisten wol der hier (zum Teil auch vielfach anderwärts) als solche angeführten Onomatopoetica werden in den Augen eines gründlichen Sprachforschers unechte sein. In seinem berühmten Werke macht Herr Max Müller[1, 2] darauf aufmerksam, wie leicht man sich in dieser Hinsicht täuscht und wie die Mehrzahl der vermeintlich aus Klangnachbildung hervorgegangenen Wörter auf ganz andere Quelle zurückzuführen ist, sodass nur ganz wenige — darunter z. B. das Wort „Kuckuck" — als zweifelloses Onomatopoeticon übrig bleiben. Speziell führt er an, dass unser „Donner", „tonerre", „tonitru" etc. von derselben Sanscritwurzel *„tan"* = strecken, spannen (*dehnen*?) abstammt, die auch im „Ton" der gespannten Saite, sowie in „tendre", lat. „tener" etc. und in „tenuis", „dünn" (ursprünglich = flach ausgespannt) zu finden! Und anderes mehr.

Allein wenn auch bei der Zusammensetzung der Wurzeln, aus der ein Wort hervorgegangen, das onomatopoetische Prinzip nachweislich nicht bestimmend gewesen, so könnte es, scheint mir, doch mit von Einfluss gewesen sein bei dem Prozesse der nachherigen Abschleifung (M. Müller's „lautlichem Verfalle" oder der „phonetischen Korruption"), durch die schliesslich das Wort seine gegenwärtige Gestalt erhalten. Jedenfalls empfinden wir, die wir die fertige Sprache sprechen, solche onomatopoetische Anklänge, glauben sie herauszufühlen, ganz unbekümmert um die historische Berechtigung dieser Empfindung.

anderes gekleidet hat (ibidem). Vielmehr ist es allemal eine hauptsächlich von *psychologischen* Momenten beherrschte, von vielen äusseren Zufälligkeiten*) beeinflusste historische Entwickelung, in welcher eben dies Zeichen als Name für das vorgestellte Ding sich herausgebildet hat.

ϱ_1) Diese Wahrnehmung ist schon geeignet, uns die Bemerkung nahe zu legen, wie es wünschenswert sein muss, dass die Namen oder Zeichen als solche auch noch eine zweite Anforderung erfüllen, die wir einstweilen erst in unbestimmten Umrissen dahin charakterisiren können, dass sie (aus einfacheren oder den einfachsten Zeichen) auch *rationell* zusammengesetzt sein sollen.

Vielwörterige Namen, wie sie in Gestalt einer umständlichen Beschreibung hergestellt und dann oft in Definitionen abgekürzt zu werden pflegen, vermögen allerdings diese Anforderung in gewissem Grade zu erfüllen.

Zufolge zahlloser Unvollkommenheiten der Wortsprache, welche sich zwar historisch erklären, doch nimmermehr sachlich rechtfertigen lassen, ist aber zu ihrer Herstellung oft noch ein hohes Maass von Geschicklichkeit erforderlich: es ist auf verschiedenen Gebieten noch förmlich eine Kunst, mit Ausschliessung von Missverständnissen unzweifelhaft zu sagen, von was man eigentlich reden wolle, und entspringen aus den erwähnten Unvollkommenheiten Schwierigkeiten, mit welchen Redner und Schriftsteller, Unterricht und Gesetzgebung beständig ringen.

Es erwächst uns das Ziel, auf eine Vervollkommnung des elementaren Bezeichnungssystems für unsre Ideenwelt hinzuarbeiten, auf welches wir noch eingehender und wiederholt die Aufmerksamkeit zu richten haben werden. Mit einigem Erfolg können wir dies aber erst thun, wenn wir in unsern Betrachtungen weiter fortgeschritten sein werden.

σ_1) Ist so in der That die äusserliche Beschaffenheit eines Namens immerhin nicht gleichgültig, so tritt solches Moment doch weit zurück gegenüber einem andern: wir meinen die Konsequenz oder *Disziplin* mit welcher das Zeichen gehandhabt wird. Diese, und nicht die Beschaffenheit seiner äussern Erscheinung, ist bei dem Zeichen die *Hauptsache*.

Als das wesentliche oder fundamentale Erforderniss des Namens und Zeichens haben wir es hinzustellen, dass das Zeichen bei denen, die es brauchen, und denen, die es vernehmen, auch bei jeder Wiederholung (wenigstens innerhalb eines bestimmten Zeitbereiches) die *gleiche* Vorstellung begleite oder erwecke, nämlich diejenige Vorstellung, welche die Wahrnehmung oder Erkenntniss — eventuell die Erfassung, Konzeption, das Innewerden — *desselben* Objektes in ihrem Geiste notwendig erregen müsste (und, von subjektiven Störungen abgesehen, in jedem eintretenden Falle auch wirklich erregt).

*) Vergl. z. B. Herrn Otto Behaghel's anregende und lehrreiche Schrift[1].

Es würde den Zwecken der Bezeichnung zuwiderlaufen und uns um alle Vorteile derselben bringen oder die beabsichtigte Wirkung wenigstens in Frage stellen, wenn bei dem zur Verständigung zwischen Menschen stattfindenden Verkehr der Eine dies der Andere das unter demselben als Name fallenden Zeichen verstünde; der Hörer könnte nicht wissen, was darunter zu denken beabsichtigt ist, wenn der Redende selbst von der einmal dem Zeichen von ihm beigelegten Bedeutung zu andern Malen willkürlich abginge, und endlich auch von der auf Erkenntniss irgend welcher Dinge gerichteten (und natürlich in Zeichen zu führenden) Überlegung des einsamen Forschers wäre nicht abzusehen, wieso dieselbe erfolgreich zu sein vermöchte, wenn dabei der Zusammenhang zwischen den Zeichen und ihrer Bedeutung sich verschöbe, wenn die vorgestellten Dinge ihren Namen sozusagen entschlüpften, wenn nicht, wenigstens zeitweilig und bis zur Erlangung bestimmter als Ruhepunkte zu fixirender Endergebnisse solcher Überlegung, die Bedeutung der meisten Zeichen konsequent beibehalten, „*fest*gehalten" würde.

Darin, dass das unter dem Zeichen Gedachte demselben *eindeutig entspreche*, erblicken wir darum die wesentlichste Anforderung, die an den Gebrauch des Zeichens zu stellen ist. Der Name soll von einer bestimmt feststehenden oder konstanten Bedeutung sein; er soll als ein „*einsinniger*" oder nomen *univocum* verwendet werden.

Schon bei oberflächlicher Überlegung malen wir uns leicht die Unsicherheit, eventuell Verwirrung, Konfusion aus, die entstehen muss, wenn z. B. in einer Gesellschaft drei Herrn den Namen Müller führen und nun der Herr Müller gerufen oder erwähnt wird. Das Bedürfniss, den Namen durch Hinzufügung weiterer Bestimmungen zu einem eindeutigen gestaltet zu sehen, liess jenen Spassvogel seine Wette gewinnen, dass er auf die einem jeden seiner Bekannten auf der Börse in's Ohr geflüsterte Mitteilung: „Hast du schon gehört, dass der Meier fallirt hat?" allemal zur Antwort die Gegenfrage erhalten würde: „Welcher Meier?"

Wie selten auch zur Zeit noch die im Wortschatz der Sprache uns gegebenen Namen diese Anforderung erfüllen, so ist es doch als ein *Ideal* hinzustellen, dem die Sprache, um ihren Zweck der Verständigung ausgiebigst zu erreichen, zustreben muss, und dem sie auch in der That in fortschreitender Entwickelung sich immer mehr zu nähern scheint: gleichwie das *Ding* und die *Vorstellung* von demselben einander eindeutig mit Gesetzmässigkeit entsprechen, so auch das Entsprechen zwischen dem Vorgestellten und seinem *Zeichen* zu einem eindeutigen zu gestalten, also dass auch das Ding und sein Zeichen einander eindeutig zugeordnet erscheinen werden und das letztere in Wahrheit der Stellvertreter oder Repräsentant des erstern genannt werden dürfe.

Gehörte ein Ding der Aussenwelt an, so war die Vorstellung, die wir uns von demselben (soweit es überhaupt für uns erkennbar ist) zu bilden haben, durch eine (wir mögen sagen „naturgesetzliche") Notwendigkeit

bestimmt zu denken, und bildete dies, wie wir gesehen haben, eine unerlässliche Voraussetzung der Erkenntnisslehre. Die letztere dürfte sogar der Überzeugung nicht wol entraten können, dass diese Vorstellung nach hinreichend gründlicher Prüfung des Dinges bei allen Intelligenzen in letzter Instanz dieselbe werden *muss*, dass von dem richtig erkannten Dinge die Vorstellung eine (mathematische) Funktion ist, und soferne die Erkenntniss vollständig ist, auch das Ding eine Funktion der Vorstellung — eine Wechselbeziehung, die wir dann als ein gegenseitig eindeutiges Entsprechen hinzustellen berechtigt waren.

Man kann allerdings ein „Ding an sich" auf verschiedene Sinnesenergieen einwirken lassen und dadurch verschiedene Teilvorstellungen von demselben erhalten; es ist zunächst die aus diesen resultirende Gesamtvorstellung, welche bei der vorstehenden Auseinandersetzung gemeint war, welche letztere dann aber auch für (irgend) eine bestimmte dieser Teilvorstellungen in Anspruch genommen werden kann. Durch die Thatsachen der Farbenblindheit, Taubheit etc. erscheint es wol noch geboten, hierzu das Zugeständniss zu machen, dass in jener Gesamtvorstellung oder in Bezug auf gewisse von den Teilvorstellungen anfänglich ein Ausfall bei mangelhaft organisirten Individuen möglich ist, der jedoch mittelst induktiver Schlüsse indirekt ergänzt zu werden vermag: es kann z. B. auch ein Farbenblinder das Vorhandensein roten Lichtes durch die Wärmewirkung im Spektrum von dem des grünen unterscheiden, und ein Tauber mittelst des Tastgefühls die im Tönen begriffene Saite von der lautlos ruhenden.

τ_1) Für ein Ding, soweit es für uns erkennbar ist, mehrere verschiedene Namen zu haben, ist allerdings mit den Zwecken der Gedankenmitteilung sehr wohl vereinbar und es darf dies nicht als ein eigentlicher Misstand, sondern höchstens als ein Luxus, vielleicht eine Verschwendung, hingestellt werden.

In der That stehen uns für dasselbe Ding zunächst oft verschiedene Namen zugebote, indem es möglich ist, dasselbe von sehr verschiedenen Gesichtspunkten aus zu beschreiben — welche Beschreibung dann jedesmal als ein Name für das Ding angesehen werden kann, und manche wissenschaftliche Untersuchung dreht sich darum, ob ein auf diese und ein auf jene Weise definirtes, eingeführtes, beschriebenes Ding das nämliche sein muss, oder ein anderes. Sind aber solche Untersuchungen beendet, ist das Ding voll erkannt, so wird es, auch im erstern Falle, doch praktisch erscheinen, fortan nur *eine*, und zwar die als die zweckmässigste erscheinende von allen Benennungen des Dinges als seine „offizielle" Bezeichnung (standard notation) in der Wissenschaft beizubehalten.

Wie es nun überhaupt möglich gemacht werden kann, dass eine Mehrheit von Menschen dasselbe vorgestellte Ding je mit dem gleichen Namen (eindeutig) bezeichne, und zwar nicht nur auf dem Gebiete der

materiellen Welt, wo man auf die Dinge hinzuweisen vermag, sie mitunter gleichsam etikettiren könnte, sondern auch aus der geistigen Welt, aus der Welt des Bewusstseins, mit dem ganzen Reichtum von Beziehungen, die es wahrzunehmen vermag, aus der Welt des Gemütslebens und Wollens, der Gefühle, auf dem gesamten intellektuellen Gebiete — wie es m. a. W. erreicht werden kann, dass jene Mehrheit dieselbe Sprache rede — dies ist auf den ersten Blick schon sehr erstaunlich.

Indessen unternehmen wir es nicht, diese interessante Frage zu beantworten, hier auseinanderzusetzen, kraft welcher von der Natur in den Menschen gelegter Triebe und auf welche Weise in dem jugendlichen Verkehr des Individuums mit seinen nächsten Anverwandten, durch die Erziehung und das Leben diese Aufgabe lösbar ist und in weitem Umfange auch gelöst zu werden pflegt.

v_1) Es genügt zu konstatiren, dass aber die Aufgabe, welche nationale Gemeinschaft wir auch in's Auge fassen mögen, doch bei weitem nicht vollkommen gelöst ist. Der Sprachschatz einer jeden von unsern Kultursprachen überliefert vielmehr uns eine Fülle von Namen, welche der oben als wesentlich aufgestellten Anforderung der Einsinnigkeit durchaus nicht genügen, im Gebrauch denn auch durch ihren Doppelsinn zur Quelle von Missverständnissen werden und Unbedachtsamen gegenüber nicht selten zu missbräuchlicher Anwendung sich hergeben.

Ein Name, bezüglich dessen jene Anforderung *nicht* erfüllt ist, heisst ein *„doppelsinniger“* oder *„mehrsinniger“*, nomen *aequivocum* oder *ambiguum*, wofern er nämlich — dies müssen wir eigentlich der vorstehenden Erklärung noch hinzufügen — überhaupt (einen) Sinn hat, wirklich Name *für etwas* ist, m. a. W. falls wir nur den sinnlosen oder *„unsinnigen“* Namen, wie „rundes Quadrat“ (dergleichen die Wissenschaften gelegentlich auch hervorbringen) beiseite lassen.

Für „doppelsinnig“ wird auch häufig „zweideutig“ gesagt; doch könnte dieser Gebrauch selbst zur Quelle von Missverständnissen werden, indem, wie wir nachher sehen werden, auch das Wort „zweideutig“ ein doppelsinniges ist — vergl. λ_2).

Das Wesen der Doppelsinnigkeit ist nicht darin zu erblicken, dass der Name eine Mehrheit von Dingen als seine Bedeutung umfasst (wie einerseits der „Kollektivname“ und andrerseits der „Gemeinname“, von denen weiter unten die Rede sein wird). Vielmehr beruht solche lediglich auf dem *schwankenden Gebrauche*, dem wir den Namen unterwerfen. Die Doppelsinnigkeit ist ein Merkmal der *Anwendungsweise* des Namens.

Sie tritt nämlich erst ein, indem wir (ev. gewohnheitsmässig) Urteile fällen, zu denen wir nur berechtigt sind, einmal im Hinblick auf eine bestimmte von den Bedeutungen des Namens und bei Ausschluss seiner übrigen Bedeutungen, ein andermal ebenso im Hinblick auf eine andere von diesen Bedeutungen bei Ausschluss, vielleicht, der erstern, u. s. w.

Begegnen wir z. B. Urteilen, wie: „Alle Metalle sind chemische Elemente" und ferner: „Messing ist ein Metall", so erscheint dadurch der Name Metall zu einem doppelsinnigen gestempelt. Jedes von diesen Urteilen kann für sich als richtig anerkannt werden, wenn nur die Bedeutung des Namens Metall auf eine bestimmte Weise aufgefasst, begrenzt wird. Diese Abgrenzung ist aber beidemal verschieden; sie ist eine andere (und zwar hier blos eine „engere") bei dem erstern Urteile, wo sie mit der in der chemischen Wissenschaft üblichen zusammenfällt, als bei dem zweiten Urteile, wo sie sich deckt mit der („weiteren") Auffassung, welche dem Namen Metall in der Technik und im gewöhnlichen Leben zuteil wird.

Wer nun solche Doppelsinnigkeit übersähe, der würde sich schwerlich der Schlussfolgerung erwehren können, dass Messing ein chemisches Element sein müsse — wogegen es bekanntlich doch eine Mischung, Legirung aus Zink und Kupfer ist.

In ähnlicher Weise vollziehen wir, sooft zwei oder mehr Bedeutungen eines Wortes uns unbewusst vermengt werden, fast unvermeidlich logische Fehlschlüsse — eine Bemerkung, zu welcher spätere Betrachtungen uns noch vielfach Belege liefern werden. (Vergl. besonders § 4.)

Um (mit Jevons) dies noch durch ein Beispiel zu illustriren, wo der Doppelsinn etwas weniger augenfällig ist, so könnte jemand argumentiren: „Strafe ist ein Übel". „Andern (wenn auch in bester Absicht) ein Übel zuzufügen, sollte nicht erlaubt sein, ist unrecht." Ergo: „Andern eine Strafe angedeihen zu lassen (zuzufügen), ist unrecht." Der Doppelsinn liegt im Worte „Übel", welches im ersten Satze aufzufassen war als physisches Übel oder Leid, im zweiten dagegen als moralisches Übel. Etc.

Sehr treffend sagt Baco von Verulam: Die Menschen glauben zwar, dass ihr Verstand die Worte beherrsche, aber es kommt auch vor, dass die Worte ihre Gewalt über den Verstand rückwirkend geltend machen („Credunt homines, rationem suam verbis imperare, sed fit etiam, ut verba vim suam super rationem retorqueant").

φ_1) Es ist darum Jevons[6] beizupflichten, wenn er sagt, dass nichts zur Erlangung korrekter Gewohnheiten des Denkens und Schliessens

mehr in's Gewicht fallen könne, als eine gründliche Bekanntschaft mit den grossen Unvollkommenheiten der Sprache, und dass an praktischem Nutzen kaum ein Teil der Logik denjenigen übertreffen dürfte, der auf die Vielsinnigkeit der Ausdrücke aufmerksam macht. Je mehr man sich in der That in die subtilen Schwankungen (variations) in der Bedeutung ganz geläufiger Worte vertieft, desto mehr wird man die *gefährliche* Natur der Werkzeuge (tools) gewahr, deren wir uns bei allen Mitteilungen und Argumentationen zu bedienen haben.

Wird der Gebildete auf diesen Punkt auch sorgsamer achten als der Ungebildete, so ist doch auch jenem im allgemeinen der Vorwurf nicht zu ersparen, dass selbst da, wo die Sprache zur Vermeidung jeder Doppelsinnigkeit bequeme Ausdrucksmöglichkeiten bietet, er sich diese nicht immer hinlänglich zunutze macht.

Mit Recht hebt z. B. Mill die Doppelsinnigkeit hervor, mit welcher fast allerorten das Pronomen „derselbe (dieselbe, dasselbe)" gebraucht zu werden pflegt — bald im Sinne von „der nämliche" (und dann also auch „gleiche"), bald in dem Sinne von „ein gleicher", aber nicht der nämliche. Es ist im Grunde (im erstern Sinne) nicht derselbe Eindruck, den ich empfange, wenn ich ein sich gleichgebliebenes Ding ein zweites Mal wahrnehme. Wie oft spricht man nicht auch von „Produktionen", wo man eigentlich von den Produkten reden müsste, und dergl.!

Der Doppelsinn des Hülfszeitworts „sein" als Kopula und als Existenzbehauptung — z. B. Der Pegasus ist geflügelt und *ist* (d. h. existirt) doch überhaupt nicht! — hat jahrhundertelang die Logiker vexirt, ja in der Irre herumgeführt. Auf den Doppelsinn mancher Wörter der eigenen Sprache wird man durch das Studium fremder Sprachen erst aufmerksam gemacht; so durch die französische Unterscheidung zwischen „pouvoir" und „savoir" auf den Doppelsinn des deutschen „können"; auf den der Verba „haben" und „sein" (letzteres in noch einer andern als der vorhin erwähnten Hinsicht) durch die Unterscheidung zwischen „haber" und „tener" resp. „ser" und „estar" im Spanischen. Ist „Vorstellung" doppelsinnig als Akt und als Resultat des Vorstellens, so haben wir uns bestrebt, das Wort hier immer nur im letztern Sinne zu gebrauchen.

Triftig bemerkt Jevons, dass hierin selbst die Logiker sich nicht viel besser gezeigt haben, als andere Leute. Unter dem Wort „Negation" werden wir selbst, eben notgedrungen dem Sprachgebrauch huldigend, nicht umhin können, bald zu verstehen die Operation des Negirens, bald aber das Ergebniss dieses Prozesses.

Der Doppelsinn eines Worts ist um so ungefährlicher, je weiter die Gebiete des Denkens (Begriffssphären), denen seine verschiedenen Bedeutungen angehören, auseinanderliegen. So dürfte z. B. der Doppelsinn des Wortes „Widder" zur Bezeichnung des Sternbilds im Tierkreise einer- und des männlichen Schafes andrerseits (ev. auch noch für eine mittelalterliche Belagerungsmaschine) nicht leicht Verwechselungen nahe legen.

Auf die aus Meinungsverschiedenheit unter den Menschen entspringende Mehrsinnigkeit von Ausdrücken, wie „die schönste Frau", „das beste Verfahren", etc. macht die Logik von Port-Royal noch aufmerksam.

Univoken Termen (termini) begegnet man besonders in der Sprache der Technik und Wissenschaft, und sieht sich jede Disziplin genötigt, dergleichen nötigenfalls sich selbst zu schaffen, sei es durch *Restriktion*, Einschränkung eines schon vorhandenen Wortes der Sprache auf eine bestimmte unter seinen landläufigen Bedeutungen — mitunter auch unter *Spezialisirung* oder *Generalisirung*, Verallgemeinerung desselben, also Verengerung oder Erweiterung seiner Bedeutung — sei es durch *Einführung ganz neuer Wortbildungen.*

Überhaupt sehen wir die Sprache, um den beständig sich steigernden Bezeichnungsbedürfnissen zu genügen, in einem notwendigen *Wachstum* begriffen, zu welchem ausser den soeben erwähnten Prozessen noch besonders auch beisteuert das *„Differenziiren" der Synonyme*, welches darin besteht, dass man Wörter, die bisher wesentlich als gleichbedeutende gebraucht wurden, anfängt (mit in bestimmter Weise verschiedenem Sinne) unterscheidend zu gebrauchen. In Illustration dieses Verfahrens mussten wir oben beginnen, die Synonyme „zweideutig" und „doppelsinnig" auseinanderzuhalten, und werden auch noch andere Beispiele als wünschenswert, zweckmässig oder unumgänglich bei Gelegenheit sich darbieten.

Ein einsinniger Name, soviel sich absehen lässt, ist beispielsweise „Kathedrale", obwol er (als ein Gemeinname) sehr vielen individuellen Gebäuden, wie dem Kölner Dome, dem Strassburger Münster, etc. beigelegt werden mag. Als ein sehr vielsinniger Name dagegen erscheint „die Kirche" (Jevons l. c.). Bald wird darunter nur verstanden das Gebäude, in welchem religiöse Handlungen vorgenommen, Andacht verrichtet wird, bald auch bedeutet der Ausdruck die ganze Körperschaft, Gemeinde der Personen, welche zu einem bestimmten Bekenntniss gehören, bald nur die religiösen Autoritäten oder die Körperschaft der Priester, den Klerus, die Hierarchie im Gegensatz zum Laienelemente, bald endlich auch die gesamte Organisation, Institution als solche, und in fast allen diesen Fällen wechselt der Ausdruck noch obendrein seine Bedeutung je nach der Konfession oder Sekte, für welche derselbe (gewöhnlich stillschweigend) in Anspruch genommen wird.

Es bedarf kaum des Hinweises, dass vielsinnige Namen sich besonders leicht zur Irreführung namentlich der unkritischen Menge, der Volksmassen hergeben, und sehen wir solche Praxis auch mit den Schlagwörtern politischer Parteien von Demagogen und Propaganda machenden Agitatoren vielfach geübt. Der Missbrauch gleicht dem Taschenspielerkunststückchen, durch welches dem nichtsahnenden Publikum ein Ding für ein anderes mit Geschick untergeschoben wird, indem unvermerkt für die eine Bedeutung des Namens in Anspruch genommen wird, was genau besehen nur für die andere anerkannt werden konnte und aufrecht erhalten werden könnte — natürlich mit dem Erfolg, das Urteil zu korrumpiren. Auch bieten die doppelsinnigen Wörter bequeme Vorwände und Angriffspunkte für den Streitlustigen dar, indem es leicht ist, mit Unterstellung, Insinuation der einen

Bedeutung des Namens gegen dasjenige zu eifern, erfolgreich zu polemisiren, was unter demselben Namen im Grunde von einer ganz andern Sache — und vielleicht mit Recht — behauptet worden ist. Desgleichen machen sie es leicht, den Gegner, der den Namen in mehrerlei Sinne brauchte, oder (wie sollte er auch anders!) abweichenden Gebrauch bei Andern zuliess, der Inkonsequenz, anscheinend des Widerspruchs zu überführen. Etc.

χ_1) Ungeachtet der hervorgehobenen eminent praktischen Wichtigkeit sorgfältigen Achtens auf etwaige Doppelsinnigkeit verwendeter Namen oder Zeichen gebührt den vielsinnigen Namen doch eigentlich keine Stelle in dem System der Logik selbst. Ihre Betrachtung liegt von rechtswegen nur der *angewandten* Logik ob. In der Theorie müssen wir die fundamentale Anforderung der Einsinnigkeit, kraft welcher erst ein Zeichen seiner Bestimmung voll zu genügen vermag, jeweils als erfüllt voraussetzen und dieses Ideal, bevor wir zu Nutzanwendungen schreiten, allemal vorgängig zu erfüllen trachten.

Hierzu ist es ausreichend, einen etwa vorgefundenen vielsinnigen Namen (wie man nach früheren sagen kann) zu „differenziiren", das heisst hier: so viel verschiedene Namen aus ihm zu machen, als in wie viel verschiedenen Bedeutungen er gebraucht werden soll. Leicht wird dies hingebracht, indem man ihn z. B. durch einen Buchstaben repräsentirt und diesem alsdann Indices 1, 2, 3, . . . anhängt, je nachdem man ihn in seiner ersten, zweiten u. s. w. Bedeutung verstanden haben will.

Der doppelsinnige Name gilt in der Logik für ein *Paar* von Namen, die nur zufällig gleichen Klang haben; er repräsentirt uns ganz verschiedene Objekte des Denkens, Objekte, die darum doch nichts miteinander zu schaffen haben sollen. Von diesen wird zu sagen sein, dass sie „*homonym*" durch ihn bezeichnet seien.

Ein Hauptgrund, weshalb die grosse Mehrzahl der Wörter sich als mehrsinnig erweist, ist darin zu erblicken, dass von psychologischen Momenten beherrscht die Sprache in ihrer historischen Entwickelung sich so häufig bewogen sah, einen Namen von den einen auf andere Dinge zu *übertragen* (zu transferiren), die mit jenen eine hervorragende *Analogie* offenbarten oder auch nur mit ihnen regelmässig sich *assoziirt* zeigten — wie z. B. „(Stände-)Haus" auf die gesetzberatende Körperschaft der Volksvertreter.

Nicht selten *kriecht* so gewissermassen ein Name vom einen Ding zum andern, bis schliesslich oft keine grössere Gemeinschaft zwischen seinen verschiedenen Bedeutungen erkennbar ist, als zwischen irgend welchen mit ganz verschiedenen Namen belegten Objekten (Mill).

Namentlich aber — und dies ist das wichtigste Moment — hatte die Sprache alle Ausdrücke für Objekte, Qualitäten und Verhältnisse auf den geistigen Gebieten einst zu entlehnen aus dem naturgemäss zuerst

erschaffenen Wörterschatze für das sinnlich Wahrnehmbare in der materiellen Welt. Sie musste so neben der *„eigentlichen“* und ursprünglichen, der Bedeutung *„katexochēn“* oder „par excellence“ auch noch eine „uneigentliche“, *„übertragene“* oder *„metaphorische“* Bedeutung den entlehnten Wörtern (oder ihren Zusammensetzungen) beilegen — wie dies z. B. geschieht, wenn wir von einer glänzenden That, einem brillanten Geschäft, einer bittern Enttäuschung u. s. w. reden.

Wer solchen Unterschied missachtet, wird leichtlich den Regeln der Logik gemäss zu absurden oder lächerlichen Folgerungen geführt werden. Treffend illustrirt dies De Morgan, indem er darauf aufmerksam macht, dass der Satz „Nur der Weise ist (wirklich) reich“ (Solus sapiens est dives) logisch vollkommen äquivalent ist mit dem Ausspruche „Jeder Reiche ist weise“ (Omnis dives est sapiens) — jedenfalls sehr schmeichelhaft für die Reichen! Natürlich war das erste „reich“ im übertragenen Sinne genommen, als: reich an inneren, an Schätzen des Gemütes, gesegnet mit Zufriedenheit, etc., das zweite aber konnte — ohne weiteres — nur im eigentlichen Sinne als „reich an Geld und (äusserm) Gut“ — aus psychologischen Gründen — verstanden werden.

Von jenem Recht der Metapher macht auch heute noch die Sprache fortgesetzt und in erspriesslicher Weise Gebrauch, vornehmlich in ihren poetischen Produktionen, und da ist es keineswegs der Wissenschaft und Logik zur Last zu legen, wenn dieselbe mit ihrer Analyse, mit logischwissenschaftlicher Zergliederung oft gleichsam den prachtvollen Farbenschmelz von den Flügeln des Schmetterlinges abzustreifen und blos ein kahles Gerippe übrig zu lassen scheint — sondern nur ihrer unvollkommnen Anwendung. Wir missgönnen der Poesie ihre Freiheit nicht, wir bewundern sie vielmehr ob der Geschicklichkeit und Macht, mit der sie auf die Veredelung des Geschmackes, des ganzen Fühlens und Denkens breiter Bevölkerungsschichten hinzuwirken und gelegentlich auch — vornehmlich auf ethischem Gebiete — erhebende und wichtige Wahrheiten grossen Volksklassen, dem Einfältigen gleichwie dem Gebildeten, zum Bewusstsein und zu Anerkennung zu bringen versteht, allein wir müssen aus dem uns *hier* vorliegenden Untersuchungsfelde solche Freiheit thunlichst bannen.

ψ_1) Wir haben bis jetzt hauptsächlich gehandelt von *Dingen, Vorstellungen* und *Namen*, indem wir uns bestrebten, hierüber eine erste, zum Teil auch wol unerlässliche Basis zu fernerer Verständigung zu gewinnen.

... Im Einklang etwa mit De Morgan's[2] Kapitelüberschrift „On objects, ideas and names“. Dem letzten dieser Themata pflegen deutsche Werke über Logik entweder gar keine oder doch nur eine sehr stiefmütterliche Behandlung angedeihen zu lassen, wie mir dieselben denn überhaupt von Anfang ihren Flug meistens zu hoch zu nehmen scheinen. Ausführliche und gründlichere Betrachtungen dagegen finden sich diesem Gegenstand häufig in englischen Darstellungen der Logik gewidmet und sind in dieser Hinsicht vor allem die Werke von Mill[1] und Jevons[6] empfehlend hervorzuheben (neunte resp. siebente Auflage). Dieselben zeigen hierin sich

wenigstens ernstlich bestrebt — wie dies auch Leibniz von sich sagt (vergl. Trendelenburg l. c.) immer — die ersten Prinzipien zu suchen, „welche sonst als trocken und ohne Reiz die Köpfe kaum kosteten und schnell wieder fahren liessen".

Das dritte der obigen Themata (mit dessen Betrachtung wir noch nicht zu Ende sind), scheint mir nun aber den naturgemässen Ausgangspunkt zu bilden, an welchen die ferneren Themata der Logik als einer Lehre von den *Begriffen, Urteilen* und *Schlüssen* (in neuerer Abgrenzung auch noch *Methoden*) anzuknüpfen sind. In der That:

In der mit Schöpfung einer Sprache verknüpften Notwendigkeit der *Namengebung wurzelt* auch *die Bildung der „Begriffe"*.

Es bedarf und verdient dies näher dargelegt zu werden, doch mögen wir an den Kernpunkt der Frage erst nach einigen weiteren Vorbetrachtungen herantreten — vergl. η_2) und folgende Chiffren.

ω_1) Zunächst wol in der Welt des äusserlich Wahrnehmbaren bemerken wir, dass manche Dinge sich nahezu unverändert, stetig, in der Zeit forterhalten, dass sie, wie man sagen kann, eine zeitlang, oft eine lange Zeit hindurch, *„dieselben"* (genauer: sich gleich-) bleiben. Die Kontinuität wird zunächst in unserm Bewusstsein hergestellt, indem wir bei andauernder sowie wiederholter Wahrnehmung des Dinges inne werden, dass es uns als „dasselbe" (the same) erscheint, als welches es uns schon früher erschienen ist, und schreiben wir auch dem der Erscheinung des Dinges zugrunde liegenden Wirklichen die entsprechende Stetigkeit des Daseins zu. Die Sprache benennt dieses Ding, gibt ihm einen Namen, der bei jeder erneuten Wahrnehmung ebendieses Dinges ausschliesslich gebraucht wird, desgleichen, wenn man kundgeben will, dass man sich dasselbe in freier Erinnerung vorstelle, m. a. W. wenn man von ebendiesem Dinge reden will. Der Name wird ein *„Eigenname"* (nomen proprium, singular term) — im gewöhnlichen Sinne des Wortes — sein.

In des Wortes engster Bedeutung genommen sollte der „Eigenname" nur das Ding in einem bestimmten Augenblick, Momente seines Daseins bezeichnen dürfen. Das gegenwärtige Berlin ist ein anderes als das Berlin vom Ende des vorigen Jahrhunderts, daher „Berlin" streng genommen erst dann ein Eigenname, wenn als bekannt gelten kann, aus welcher Epoche man es sich vorstellen will.

Merkur, Venus, Erde, Mars, etc. sind beispielsweise darnach Eigennamen. Indessen illustriren unsre Beispiele das Wesen des Eigennamens bis jetzt erst einseitig, indem sie hinsichtlich dessen, was sie bedeuten, alle herausgegriffen sind aus der Sphäre der *konkreten* Dinge oder Gegenstände.

Ein Ding heisst ein konkretes, wenn es einerseits vollkommen isolirt denkbar, andrerseits mit allen seinen Merkmalen (Teilen, Attributen und Beziehungen) gemeint ist oder genommen werden soll. So vermögen wir uns den Erdball ganz gut für sich allein zu denken, und wenn wir von ihm reden, so meinen wir denselben mit allem „was darum und daran ist“, ohne irgend etwas ausschliessen zu wollen, was gültig von ihm ausgesagt werden könnte.

Die Gegenstände der materiellen Welt sowol als auch die in ihr wahrnehmbaren lebenden Wesen, Pflanzen, Tiere, Personen und Gruppen von solchen (z. B. der Odenwald, die Familie des N. N., die Güter dieser Familie, das 24. Regiment der gegenwärtigen deutschen Armee, etc. — nicht minder aber auch erdichtete persönliche Wesen, wie Cerberus, Circe, Polyphem und Bucentaur) können darnach als konkrete Objekte des Denkens bezeichnet und mag dementsprechend ihr Name ein nomen *concretum* jeweils genannt werden.

α_2) Aus der Vorstellung eines konkreten Dinges vermögen wir nun aber auch gewisse Elemente abzusondern und mehr oder minder vollkommen in unserm Geiste zu isoliren, eventuell erst, nachdem diese Vorstellung nach gewissen Richtungen noch weiter ausgebildet, entwickelt oder vollendet worden ist. Solche Teilvorstellungen im weitesten Sinne des Worts (resp. das ihnen zugrunde liegend gedachte Wirkliche) nennen wir *„Merkmale“* desselben (nota, mark — im Singular).

Gelingt solche Isolirung vollkommen, so heisst das Merkmal ein *Teil* (pars, part) des Dinges*) und wird sich auch seinerseits wieder als ein konkreter Gegenstand in's Auge fassen lassen.

So ist der Dunstkreis der Erde (die etwa bis zu 1 mm Druckhöhe gerechnete Atmosphäre), so sind die unsre Erde zusammenhängend bedeckenden Wassermassen, der afrikanische Kontinent, ein Berg etc. als Teile des Erdballs, so ist der Kopf, die Hand als Teil eines Menschen zu bezeichnen. Sie sind auch selbst konkrete Gegenstände. Nichts hindert, sie uns auch ohne die übrigen Teile, mit denen sie verbunden

*) Es ist dabei erforderlich und vorausgesetzt, dass man sich das Ding selbst erst isolirt denke. Würden wir einen Körper mitsamt seinem Schatten als das Ding hinstellen, so wäre auch der Schatten als ein „Teil dieses Dinges“ zu bezeichnen; er ist deshalb aber doch nicht ein „Teil des Körpers“, weil letzterer von vornherein ohne den Schatten zu denken gewesen wäre. Eine solche Exemplifikation muss aber hier ausgeschlossen erscheinen, da wir den Schatten nur als solchen über oder in etwas, als auf einem materiellen Körper haftend, zu denken vermögen, und ihn darum selbst nicht als Konkretum (für sich, oder auch mit ganz anderm verknüpft) hinstellen durften.

sind, zu denken, wie denn sehr häufig auch der Teil vom Ganzen mechanisch abgetrennt zu werden vermag, die Möglichkeit solcher Trennung wenigstens allemal einleuchtet und in manchen Fällen auch anfangs blos der Teil bekannt ist, ohne dass man vielleicht von dem Dasein des Ganzen, dem er angehört, auch nur eine Ahnung besitzt. Umgekehrt ist zu merken, dass die *Teile* eines Dinges auch zu den *Merkmalen* desselben in der Logik zu rechnen sind. Es sind auch die Borsten ein Merkmal des Schweins (nicht etwa blos der Umstand, dass es überhaupt Borsten besitzt, welcher allerdings auch ein Merkmal, aber eine durch Abstraktion gewonnene Verallgemeinerung des vorigen wäre, welche wesentlich nur auf dasjenige hinauskommt, worin das Schwein mit andern Borsten tragenden Geschöpfen übereinstimmt), und ist die Mähne, sowie der in ein Haarbüschel endigende Schweif Merkmal eines männlichen Löwen.

Gelingt jene Isolirung (Absonderung, Vereinzelung) *nicht* vollkommen, so nennen wir das vorgestellte Ding etwas Abstraktes, seinen (Eigen-) Namen ein nomen *abstractum.* Wir haben dann Veranlassung zu reden von „*Attributen*“ des gedachten Dinges, als da sind *Qualität* oder Eigenschaften und Thätigkeiten, und *Quantität*, sowie von *Beziehungen* (Relationen), darunter Ursache, Wirkung und anderes.

So die Farbe dieser Blumenkrone, die Elasticität und Festigkeit der Stahlfeder, mit welcher ich eben schreibe, das Gewicht des Erdballs, seine Gestalt, Volum und derzeitige Lage im Weltraum, seine augenblickliche Entfernung von der Sonne, Geschwindigkeit, die Kraft, mit der er angezogen wird, etc. — die Schönheit der Circe etc. — dies alles sind abstrakte Eigennamen.

Die als deren Bedeutung verbleibende Vorstellung ist in der That dadurch gewonnen, dass man sie von der Gesamtvorstellung des konkreten Gegenstandes gewissermassen abzog, sie in den Brennpunkt der Aufmerksamkeit rückte und von dem Komplex aller übrigen Vorstellungselemente (nebst dem, was ihnen zugrunde liegt) absah oder abstrahirte. Solche Isolirung jener aus dem Gesamtbilde hervorgehobenen Vorstellung erweist sich aber bei genauerem Zusehen nicht als eine vollkommen durchgeführte und durchführbare, wie ich dies für das erste und noch ein späteres der angeführten Beispiele versuchen will genauer darzulegen.

Jene beispielsweise rote Farbe können wir uns zwar wol völlig losgelöst von jedem Gedanken an die Blumenkrone, der sie eignete, als eine blos subjektive Lichtempfindung vorstellen, und wenn wir etwa für die vor mir liegende Blumenkrone von Anfang an nur deren

Vorstellung gesetzt hätten, so würde das aufgestellte Unterscheidungsmerkmal uns im Stiche lassen und läge kein Grund für uns vor, das Element der roten Farbe in dieser Vorstellung als ein Abstraktum gegenüberzustellen der ganzen Vorstellung als einem Konkretum (die wir ja vielmehr von unserm Standpunkte auch selbst schon als ein Abstraktum bezeichnen müssen). Es läge dann der Fall vor, dass wir, anstatt von den *Dingen*, blos gesprochen hätten von unsren *Vorstellungen* über diese, ohne jede Bezugnahme auf etwas ihrer Erscheinung zugrunde liegendes Wirkliches. Wollen wir aber nicht aufhören solche Bezugnahme aufrecht zu erhalten, wollen wir fortfahren nach wie vor von *Dingen* zu reden, dann freilich können wir jene rote Farbe nicht anders denken als wie als Farbe *von etwas Farbigem;* und wird auch die Vorstellung ebendieses farbigen Etwas im übrigen möglichst unvollendet gelassen, so musste dasselbe doch als vorhanden notwendig mit gedacht werden und ist die Isolirung jener roten Farbe keine vollständige gewesen.

Ähnlich musste auch der vom Erdball eingenommene Raum z. B. als von etwas erfüllt, als Ausdehnungsform irgend einer Materie gedacht werden, von welcher er nie völlig loszulösen ist.

Wir betreten hiermit allerdings ein streitiges Gebiet. Ob man den Raum sich absolut leer denken könnte, einen Zeitraum ohne jeden Vorgang in demselben, den Geist auch ohne Körper, darüber ist viel hin und her gestritten worden. (Ich würde bis zur Erbringung eines Gegenbeweises diese Fragen verneinen. Die Erscheinung des Todes hat es uns leicht gemacht, den Leib auch ohne Seele, isolirt zu denken — wir nennen ihn Leichnam; ich würde aber, wenn von dem Leibe eines *lebenden* Wesens lediglich als Materie ohne Rücksicht auf dessen Beseelung gesprochen wird, auch diesen strenge genommen für ein Abstraktum zu erklären mich verpflichtet glauben.)

Im Hinblick auf solche Kontroversen dürfte die Bemerkung am Platze sein, dass die Unterscheidung zwischen „abstrakt" und „konkret" für unser Hauptthema (soweit wir dasselbe zu führen vermögen) sich (noch) belanglos erweisen wird (ein Grund für diese Erscheinung wird sogleich, im folgenden Kontext ersichtlich). Wesentlich kommt es uns hier nur darauf an, zunächst die Bedeutung des *Eigennamens* und nachher die des *Gemeinnamens* klarzulegen, zu welchem Ende wir dieselbe allerdings wol in ihre Hauptvarietäten hinein verfolgen müssen.

Ich muss auch gestehen, dass mich die obige Auseinandersetzung für die Scheidung der Merkmale in Teile und Attribute, die wir hier — ich denke wol im Anschluss an das üblichste Verfahren — genetisch zu entwickeln versucht haben, nicht völlig befriedigt. Die Erde z. B. zieht nach dem Gravitationsgesetze ein jedes Massenteilchen des Weltraums an, und können überhaupt zwischen ihr und irgend einem andern Objekt des Denkens

vom Geiste Beziehungen wahrgenommen oder hergestellt werden. Um dasjenige vorzunehmen, was wir oben die Isolirung ihrer Vorstellung nannten, müssen daher grosse Merkmalgruppen von der auf die Erde bezüglichen Gesamtvorstellung von vornherein ausgeschieden und losgelöst werden; es ist auch *dazu* schon eine Art von Abstraktionsverfahren erforderlich, und erscheint es geboten dabei auf die Raumerfüllung der Erde, ihre Charakterisirung als das einen bestimmten Raumteil Erfüllende vermittelst einer ihr zugedachten Begrenzung, sich zu berufen — und ähnlich auch bei den übrigen als konkrete hinzustellenden Gegenständen.

Dass nun solch' spezieller, gleichwie auch irgend ein anderer Abstraktionsmodus, durch welchen eine Vorstellung zu einer isolirten gestaltet wird, für die (allgemeinen) Gesetze folgerichtigen Denkens nicht von Belang sein wird, ist zu gewärtigen.

Die Begriffe von *Quantität* und *Qualität* exakt und allgemein zu charakterisiren dürfte überhaupt zu den schwierigeren Problemen der Philosophie gehören — ich habe eine mir ganz genügende Erklärung nirgends auftreiben können. Gleichwol ist die Frage eine fundamentale, da auf ihr doch die Lehre von den „gleichartigen", vergleichbaren oder durch einander messbaren Grössen und die Scheidung zwischen Mathematik und Logik (im engern Sinne) beruht:

Von einem vorgestellten Dinge vermögen wir durch Abstraktion einen *Teil* abzusondern und ebenso vermögen wir ein *Merkmal* abzusondern welches *nicht Teil* sondern eine Eigenschaft, Thätigkeit oder Beziehung des Dinges ist. Die schwierige Frage ist, worin sich wol jene, die *quantitative* von dieser der *qualitativen* Sonderung der Vorstellungselemente unterscheidet? Wir glaubten den Unterschied in der vollkommenen Isolirbarkeit jener erstern im Geiste (sowol als eventuell in der Wirklichkeit) gegenüber der unvollkommeneren Isolirungsfähigkeit der letztern erblicken zu sollen.

Möglich auch, dass diese Begriffe der Qualität und Quantität (?) zu den Urbegriffen zu zählen sein werden, die in Form einer Definition einer Erklärung überhaupt nicht fähig, oder dass sie auch, wie der Begriff des „Maasses", erst mittelst langer Reihen von Schlüssen aufgestellt werden können.

Mill freilich macht es sich hier bequem, indem er sich im wesentlichen begnügt zu sagen: Quantität sei dasjenige, wodurch sich ein Liter Wasser von zwei, drei oder zehn Litern Wasser unterscheidet, worin er aber mit einem Liter Branntweins oder Schwefelsäure übereinstimmt, Qualität dasjenige, worin jene übereinstimmen und diese sich unterscheiden. So leicht es aber erscheint, treffende Beispiele hier anzuführen, so schwierig erscheint es uns, den Gegensatz allgemeingültig zu charakterisiren.

Es mag auch eine Wissenschaft, die sich ein für allemal nur mit auf eine bestimmte Weise hergestellten Abstraktionsergebnissen beschäftigt — wie die Geometrie mit den räumlichen Gebilden — solche (relativ) als Konkreta hinstellen, und diesen erst und ihren (dann ebenfalls konkret zu nennenden) *Teilen* als Abstrakta gegenüberstellen die *Attribute* der Gestalt, Grösse und Lage, Entfernung etc. jener Gebilde.

Im Grunde würde alsdann nur konkret und abstrakt genannt werden, was eigentlich als abstrakt in erster und in zweiter Potenz oder — wenn man will — im ersten und im zweiten Grade (absolut genommen) hingestellt werden müsste. — Von einem selbst durch den Abstraktionszprozess gewonnenen Objekte lassen sich ja häufig selbst wieder Merkmale noch weiter fort abstrahiren.

β_2) Nicht anders, wie in Hinsicht der Qualitäten verfährt man auch bei (wahrgenommenen) *Beziehungen* zwischen Dingen: auch solche mögen wir mit Eigennamen belehnen.

Bemerken wir z. B., dass drei gewisse Sterne ein gleichschenkliges Dreieck bilden, dessen Schenkel fast doppelt so lang ist, wie die Grundlinie (und zwar allemal wieder, wenn sie allnächtlich wiederkehren), so können wir zunächst die Figur oder Gruppe selbst als ein Sternbild (und Konkretum) mit einem Eigennamen bezeichnen; aber wir können sogar auch das genannte abstrakte Seitenverhältniss (von nahe zwei zu eins), desgleichen den Neigungswinkel α des einen Schenkels gegen den andern, etc. als „Ding" je mit einem aparten Eigennamen belegen (falls solches uns der Mühe wert erschiene). Ich will dies hier besonders hervorheben, um zu erinnern, dass ich das Wort „Ding" in unsern Betrachtungen stets so allgemein wie möglich gefasst wissen möchte, und in diesem Sinne für jedes (nach Ort, Zeit und Abstraktionsmodus) völlig bestimmte „Ding" einen „Eigennamen" für zulässig erachten muss. Einen solchen stellt allemal schon die Beschreibung vor, durch welche uns das zu denkende, zu betrachtende Ding als ein singulares, unzweifelhaft bestimmtes kund gegeben wird — wenngleich die letztere der für Namen in der Regel wünschenswerten Kürze entbehren wird, und um ihrer teilhaftig zu werden etwa durch einen Buchstaben ad hoc zu ersetzen wäre.

Auch der Gewinn z. B., den ein bestimmtes Geschäft für einen bestimmten Teilhaber N. N. abwerfen wird — wir mögen denselben ja x nennen —, ist so ein Eigenname, und ebenso würde sein Anrecht auf diesen Gewinn ein solcher sein.

γ_2) Und nicht blos die Dinge aus der Aussenwelt, wie in früheren Beispielen, sondern auch solche aus der Welt des Bewusstseins, aus dem Geistesleben, sind eines Eigennamens fähig, und sie werden eines solchen teilhaftig, sobald wir sie mit Worten unverkennbar charakterisiren.

Auch meine Absicht, nachher spaziren zu gehen, die freudige Überraschung, die (ein bestimmter) Jemand beim Erfahren einer gewissen angenehmen Nachricht empfinden wird, die Eifersucht, die zwei bestimmte Nebenbuhler zur Zeit auf einander haben — alles dies (immer in der suppositio nominalis betrachtet) sind Eigennamen.

δ_2) Was ein Eigenname bedeutet, das werden wir häufig als etwas Spezielles, *Individuelles*, als ein „*Individuum*" unter den Objekten

des Denkens (in allerdings dem ursprünglichen Sinn dieses Wortes gegenüber sehr erweiterter Bedeutung) anzuführen haben.

Ich muss hier noch einer Ansicht gegenübertreten, zu welcher die Lektüre von Mill (besonders von p. 37 sq. der Schiel'schen Übersetzung[2], desgl. von p. 40 sq.) verleiten könnte: dass der Eigenname an sich bedeutungslos oder nicht-bezeichnend (nonconnotative) sei. Das neben andern ähnlichen von Mill gewählte Beispiel „Johann" erscheint in dieser Hinsicht keineswegs beweisend, denn „Johann" ist (in unserm Sinne) kein *Eigen*name — es sei denn mit solchen Zusätzen, dass er eine ganz bestimmte Person bedeutet — sondern ein *Vor*name, und kommt als solcher einer ausgedehnten Klasse von Personen zu. So ist denn freilich der Name ein ziemlich nichtssagender und gibt uns wenig Aufschluss über das Wesen einer Person, welche denselben führt.

Der Eigenname ganz im Gegenteil ist ein möglichst ausdrucksvoller zu nennen, indem er ein ganz bestimmtes Ding bezeichnet mit allen seinen Merkmalen, bekannten sowol als unbekannten, sofern letztere ihm zukommen.

Mill[2] selbst auch schränkt seine Behauptung auf einer folgenden Seite (p. 38) wieder ein, indem er Ausnahmen statuirt, für welche er die Grenze anscheinend willkürlich zieht; es wäre in der That durchaus nicht abzusehen, weshalb uns zwar „die Sonne" eine Menge Attribute mitbezeichnen sollte, dagegen Mill's eigner Name „John Stuart Mill" z. B. nicht?

Demgemäss erscheint mir auch die Unterscheidung von „mitbezeichnenden" (connotativen) und „nichtmitbezeichnenden" (non-connotativen) Namen, von welchen Mill so grosses Aufhebens macht, als eine gänzlich belanglose, genauer gesagt: überflüssige. Es bleibt mir von dem Gegensatze, wenn ich ihn schärfer in's Auge fasse, nichts anderes übrig als der allerdings sehr belangreiche Unterschied zwischen einem *Eigennamen* und dem (mit einem Begriff verknüpften) *Gemeinnamen;* das übrige löst sich in Dunst auf. Für solchen Gegensatz aber nochmals besondre gelehrt klingende und — fast möchte ich sagen: schwülstige — Benennungen einzuführen scheint keineswegs Bedürfniss.

ε_2) Nicht unwichtig ist es noch, zu beachten, dass die dem abstrakten Substantivum zugeordneten *Adjektiva*, sofern sie überhaupt als Namen gelten können, doch im allgemeinen als konkrete Namen bezeichnet werden müssen.

So ist weisse Farbe oder Weisse ein nomen abstractum, dagegen weiss = ein weisses Ding = Etwas weisses muss offenbar zu den nomina concreta gerechnet werden, indem es ja das (konkrete) Ding selbst bezeichnen soll, welchem das Attribut der weissen Farbe zukommt. Ebenso ist (räumliche) Ausdehnung ein Abstraktum, dagegen ausgedehnt, räumlich = Etwas ausgedehntes, Konkretum: ein jeder Körper kann so genannt werden. Vergl. noch Leben und lebendig, Nutzen und nützlich, Gleichheit, Ähnlichkeit, Verschiedenheit und gleich, ähnlich, verschieden, Dankbarkeit und dankbar etc. hinsichtlich ihres Gegensatzes als Konkreta und Abstrakta.

Ausgedehnte, gleiche, ähnliche oder verschiedene Dinge können freilich ebensogut aus der Sphäre der Abstrakta genommen sein, wie z. B. auch

ein geometrischer (sonach immaterieller) Körper, eine Fläche, mathematische Linie, der Schatten räumlich ausgedehnt, ein Zeitraum wenigstens „ausgedehnt" genannt werden mag. Es lässt demnach (was Mill und Jevons zu übersehen scheinen) sich nur behaupten, dass die aus abstrakten Substantiven abgeleiteten Adjektiva konkret sein *können*, aber nicht müssen, sie können oft auf beiderlei Weise verwendet werden und nehmen in Wahrheit eine Zwitterstellung ein. Andere, wie „dankbar", freilich kann man unbedenklich als Konkreta hinstellen, denn Dankbarkeit lässt sich (es sei denn im übertragenen Sinne) nur einem lebenden Wesen, also Konkretum, zuschreiben.

ξ_2) Versuchen wir nun einmal, uns auf den Standpunkt zu stellen, als ob es uns obläge, eine Sprache zu erschaffen, ganz nach Belieben Wörter oder Zeichen zu bilden und solchen ihre Gebrauchsweise vorzuschreiben.

Auf den Unterschied unsrer Bestrebungen von denen der Volapükisten werden wir noch zu sprechen kommen — vergl. α_3) in dieser Einleitung, Fussnote.

Es erscheint dann keineswegs als eine leichte Aufgabe auch nur zu jenen schon unter ξ_1) erwähnten zehn Wortarten zu kommen, welche wir in unsern Kultursprachen thatsächlich gebildet vorfinden. Dieselben genetisch zu erklären, sie gewissermassen aus den Bedürfnissen der Bezeichnung und Mitteilung herauswachsen zu lassen und so als zur Befriedigung dieser Bedürfnisse erforderliche, in solchem Sinne *notwendige* nachzuweisen, dürfte vielmehr höchst schwierig sein, wofern die Aufgabe überhaupt lösbar.

Das gleiche wäre auch zu leisten für die etwaigen Beugungsformen, Flexionen jener Wortarten, wie namentlich die Konjugationsformen der Verba, und die Deklinationsformen der Substantiva (Adjektiva und Pronomina), mit welchen dann auch die Bestimmung oder Mission der Präpositionen in nächstem Zusammenhange steht, dergleichen ja in vielen Sprachen Kasus vertreten.

Es müsste in solcher Untersuchung auch die Frage beantwortet werden, mit wie vielen und welchen Wortarten, Kasus und Tempora etc. man (im Minimum) bereits auszureichen vermag, wie viele Arten von sprachlichen Gebilden oder — sagen wir kurz — „Sprachformen" also unerlässlich wären, mit welchen Formengruppen man die Zwecke des Gedankenausdrucks gleicherweise, mit welchen aber am besten erreichte und was die etwa überzähligen Formen für Vorteile gewährten.

Soweit die Lösung dieser Aufgabe gelungen wäre, hätten wir eine wirkliche Analyse der Sprache gewonnen, eine zugleich wissenschaftliche und *allgemeine Grammatik*, welche die den Kultursprachen gemeinsamen Elementarformen auch als unentbehrliche und notwendige erkennen liesse, wogegen sie andrerseits die von Sprache zu Sprache wechselnden Gebilde ignoriren würde.

Es würde diese allgemeine Grammatik des Vorzugs geniessen, dass in ihr gerade dasjenige ausser Betracht bleiben dürfte und zu bleiben hätte, was beim Erlernen einer fremden Sprache jeweils die grössten Schwierigkeiten zu bereiten pflegt — als da sind: die verschiedenen Arten von Konjugation und Deklination, welche die „spezielle" Grammatik uns oft so ermüdend als erste, zweite, dritte etc. aufzählt und vorführt, dazu die Unregelmässigkeiten der Verba, der Wortstellung und des Satzbaues, namentlich aber auch die dem Ausländer das Deutsche so sehr erschwerenden drei Genera von den in dieser unsrer Sprache mit „der", „die" oder „das" ganz ohne jeden objektiven Grund zu verknüpfenden (unpersönlichen) Hauptwörtern und ebenso die Divergenzen zwischen Schrift und Aussprache, wie sie vor allem in der unphonetischen Schreibung des Englischen sich so „bemühend"*) kundgeben, auch anderes mehr.

Für ein engeres Gebiet, nämlich für dasjenige der *Zahlen*bezeichnung, sehen wir die analoge Aufgabe bereits gelöst vor uns. Hier kann in der That leicht der Nachweis geliefert werden, dass, wofern nicht mehr als zehn Ziffern sollen verwendet werden dürfen, eine systematische Darstellung aller natürlichen Zahlen nicht besser erreicht zu werden vermag, als sie durch die jetzt allgemein üblichen Ziffernzusammenstellungen in unserm aus Indien überkommnen dekadischen Systeme bereits verwirklicht wird; es kann diese Zahldarstellung als eine aus Zweckmässigkeitsgründen auch notwendige gerechtfertigt werden.

Dass ähnliches aber für das *ganze* Gebiet der sprachlich bezeichneten oder bezeichenbaren Objekte durchaus nicht gelingt, dürfte seinen Grund vor allem darin haben, dass eben dieses mit der Sprache gegebene Bezeichnungssystem sich an Vollkommenheit entfernt nicht messen kann mit dem in der angedeuteten Richtung für die Objekte der Arithmetik bereits verwirklichten Bezeichnungssysteme.

Hat dieses nun seine Richtigkeit, so muss an Stelle jenes obenerwähnten Ideals einer „allgemeinen" Grammatik ein anderes treten: das rationellste Bezeichnungssystem für die Benennung aller Objekte und den Ausdruck aller Vorgänge des Denkens erst zu entdecken und als ein notwendiges zu rechtfertigen.

Auf dieses Ideal werden wir in der That noch weiter hinarbeiten.

η_2) Gehen wir nun von dem eingenommenen Standpunkte auch nur ein Stück weit, auch einen Schritt nur vor, so leuchtet zunächst die Notwendigkeit ein, neben den (bisher besprochenen) Eigennamen, die jeweils ein ganz bestimmtes „Ding" bezeichnen, nur *einem* solchen

*) Der Ausdruck ist besonders im deutsch-schweizerischen Idiome eingebürgert.

zukommen, auch solche Namen zu schaffen, die auf *viele* Dinge passen; es erhellt die Notwendigkeit der Schöpfung auch von *Gemeinnamen*.

Ich denke, dass die Erforderlichkeit von Namen überhaupt zur Bezeichnung von Dingen und insbesondre von Eigennamen um je von einem bestimmten Dinge reden zu können, keiner weitergehenden Rechtfertigung bedarf, und werden auch die Betrachtungen, die wir anzustellen haben, um das Bedürfniss nach Gemeinnamen klar zu legen, zum Teil höchst trivialer Natur sein. Es dürfte solchen gleichwol nicht jedes Verdienst abzusprechen sein.

Denken wir uns eine Anzahl Personen im Vollbesitze einer beliebig grossen Menge von Eigennamen — aber zunächst *nur* von solchen — also dass das gleiche Wort sich bei allen jeweils mit der („gleichen") Vorstellung von dem *nämlichen* bestimmten (übrigens beliebig konkreten oder abstrakten) Dinge mit unfehlbarer Sicherheit assoziirt, so wird sich mit Denknotwendigkeit erkennen lassen, dass diese Personen unfähig sein werden einander irgendetwas mitzuteilen, was sie nicht bereits laut Voraussetzung wussten. Ich will z. B. sagen, dass der Schnee weiss ist, aber weil ich nur über Eigennamen verfüge, kann ich dies nicht in Bezug auf den Schnee überhaupt thun, sondern nur in Bezug auf einen bestimmten Schnee, der z. B. an bekanntem Orte liegt, ich kann es auch nicht sagen in Bezug auf jeden Teil dieses Schnees, sondern nur in Bezug auf eine bestimmte Portion desselben, als Ganzes, die ich kurz als „dieser Schnee" bezeichnen will. Die Weisse dieses Schnee's mag sich durch ihren genauen Helligkeitsgrad auch von derjenigen jedes andern Schnee's unterscheiden. Ich kann nicht sagen, dass dieser Schnee weiss überhaupt ist, wie andre weisse Körper, sondern weil ich auch nur den Eigennamen für „diese Weisse" von dem erwähnten eigentümlichen Helligkeitsgrade zur Verfügung habe, so kann ich auch diesem Schnee nur gerade diese Weisse zu- oder absprechen. Von den Personen, die meinen Ausspruch hören werden, wissen alle, was unter „dieser Schnee" gemeint ist (laut Voraussetzung), desgleichen was „diese Weisse" bedeutet, und werden dieselben sich auch darunter sofort, wenn der Name fällt, etwas jener bestimmten Empfindung weisser Farbe (mit dem erwähnten charakteristischen Helligkeitsgrade) zugrunde liegendes Wirkliches übereinstimmend vorstellen. Es kann nun aber sein, dass der Eine oder Andere der genannten Personen gleichwol noch darüber unwissend ist, dass diesem Schnee gerade diese Weisse zukommt, und dass ich es ihm sagen will. Laut Voraussetzung habe ich nun aber auch blos einen Eigennamen für gerade *dieses* hier vorliegende Zukommen, oder ich habe keinen. Im letztern Falle kann ich es nicht statuiren oder mitteilen; im erstern aber, wo „dieses Zukommen" ein (laut Voraussetzung) im gemeinsamen Besitz der beteiligten Personen befindlicher Eigenname gewesen sein sollte, muss eben der Andre dasselbe schon gekannt haben, er musste damit bereits wissen, dass diesem Schnee diese Weisse gerade *so* zukommt, im Widerspruch zu der obigen Annahme, dass er darüber unwissend gewesen. Ergebniss: ein Bezeichnungssystem, das blos Eigennamen umfasste, ist notwendigerweise zur Übermittelung irgendwelcher Erkenntniss unzulänglich. Dasselbe vermöchte höchstens, bereits vorhandene Erkenntniss-

elemente — durch Anrufen derselben — wiederzubeleben oder in's Feld der Aufmerksamkeit zu rücken.

Um einen Ausspruch thun zu können, der eine Information zu liefern vermöchte, brauchen wir mindestens für die Kopula, welcher in unserm Beispiel „das (erwähnte) Zukommen“ oder „der Besitz“ entspricht, ein Wort von allgemeiner Bedeutung, das einen Gemeinnamen vertritt, und können damit dann allerdings als etwas für den Vernehmenden möglicherweise Neues sagen: „Dieser Schnee“ besitzt „diese Weisse“.

Wir wollen nun nicht weiter ventiliren, mit welchem minimalen Bestand an Gattungsnamen ein Bezeichnungssystem den Zwecken sprachlicher Mitteilung schon ausreichend zu genügen vermöchte — in Anbetracht, dass auch andere Momente dahin drängen, solche in grosser Menge zu schaffen, und dass ein Reichtum der Sprache an Gattungsnamen nur vorteilhaft erscheint.

ϑ_2) Zunächst haben wir aber die *viel*wörterigen Gattungsnamen, welche sich aus einwörterigen und vielleicht auch andern Wortzeichen „ableiten“ — etwa rationell in Gestalt einer Definition oder Beschreibung aufbauen — lassen, von unsrer Betrachtung natürlich auszuschliessen und unser Augenmerk zu richten auf die Erstellung der als „ursprüngliche“ *einwörterig* zu gestaltenden Namen, die zu dem weiteren Aufbau uns erst die Bausteine abgeben sollten.

Schon die oberflächlichste Überlegung zeigt, dass es gar nicht durchführbar sein würde, ein Jedes, was Objekt des Denkens werden mag, mit einem Worte als *Eigennamen* zu benennen.

Das wäre schon in Bezug auf die Dinge der Aussenwelt unthunlich.

Wie möchten wir z. B. Geometrie treiben, wenn jede Seite jede Ecke etc. eines jeden von irgend jemand in Betracht zu ziehenden Dreiecks ihren eigenen Namen führte, wenn sie von der Sprache je mit einem besonderen Worte bezeichnet würde und werden müsste? So ausserordentlich gross die Kombinationsfähigkeit der Buchstaben zu aussprechbaren Silben und so zahlreich die Arten auch sind, auf welche diese Silben sich zu Worten verknüpfen lassen, sie würden doch bei weitem nicht hinreichen um solchen Bedarf an Eigennamen zu decken. Kein menschliches Gedächtniss aber würde die Kraft besitzen, wären solche Namen auch schon geschaffen (irgendwie, beliebig eingeführt), dieselben mitsamt ihrer Bedeutung zu *behalten*, ganz abgesehen von der Schwierigkeit, sie zu *erlernen*.

Das Erlernen würde hier immer noch (in gewissem Umfange) wenigstens als möglich erscheinen.

Prinzipiell unmöglich aber müsste es genannt werden, falls die gleiche Praxis der Belehnung aller Dinge mit Eigennamen auf die Gebilde der geistigen Welt angewendet werden wollte. Da sich die Zustände des Bewusstseins eines Menschen, als namentlich seine Wahrnehmung von Unterschieden oder von Übereinstimmung an den Dingen, seine Empfindungen, Vorstellungen und Absichten etc. für die andern Menschen nicht sinnlich zur Wahrnehmung bringen lassen, da sich nicht, wie auf die Aussendinge auf solche hinweisen lässt, so wäre hier gar kein Weg denkbar, auf welchem

eine Sprache, die alle individuellen Bewusstseinszustände je mit Eigennamen bezeichnete, überhaupt Gemeingut einer Mehrheit von Menschen werden könnte. Schon die Erlernung der Sprache bliebe hier ein vonhause aus unlösbares Problem.

Wir brauchen also Gemeinnamen.

ι_2) Der *Gemeinname* (nomen appellativum, general term) sollte *mehrere* Dinge bezeichnen dürfen, solchen einzeln und sozusagen mit gleichem Rechte zukommen.

Der Gemeinname „Planet" z. B. kann der Erde sogut wie dem Mars, Jupiter oder Saturn etc. beigelegt werden. Wir dürfen darum sagen: Die Erde ist (ein) Planet, Mars ist Planet, Jupiter ist Planet.

Hierdurch erscheint die Anwendungsweise des Gemeinnamens geregelt, soferne *mit* ihm etwas sollte ausgesagt werden, insoweit er also zum Prädiziren dient — zunächst wenigstens: insofern er in der Form des Singulars *Prädikat* einer Aussage wird.

Die mittelst Eigennamen bezeichenbaren singularen, besondern, bestimmten oder individuellen Dinge, welche so der Gemeinname „umfasst", über die sich seine Bedeutung „erstreckt" und von deren jedem er für sich im Singular prädizirt werden darf, setzen eine *„Klasse"* (oder *„Gattung"*) zusammen, von der sie die *„Individuen"* genannt werden. So sind Merkur, Venus, etc. bis Neptun die Individuen der Klasse der Planeten oder der Gattung „Planet".

Das Wesen der obigen Verwendungsweise besteht nun darin, dass der Gattungsname sich auf seine Individuen, wie man sagt: *„distributiv"*, verteilt — so nämlich, dass er jedem einzelnen dieser Individuen ganz (und ungeteilt) zukommt.

Es geht nichts, kein Teil von ihm verloren, wenn er einem Individuum beigelegt, zugeteilt wird, und man behält ihn immer noch ganz übrig, um ihn ebenso auch einem zweiten, dritten etc. Individuum zuzuteilen. Die vorliegende ist sonach eine eigentümliche Art von „Verteilung", welche sich etwa der Ausbreitung einer ansteckenden Krankheit vergleichen liesse: werden hundert Personen von einem Scharlachkranken infizirt, so wird eine jede derselben nicht etwa blos des hundertsten Teiles, sondern der ganzen Krankheit, schlechtweg des Scharlachfiebers, teilhaftig (auch verliert Derjenige, von welchem der Krankheitskeim sich auf die Andern überträgt, die Krankheit dadurch nicht).

Gelegentlich der Erläuterung des „Distributionsgesetzes" werden wir in § 12 Veranlassung nehmen, noch andere (und schönere) Vergleiche heranzuziehen zur Verdeutlichung der eigentümlichen Natur dieser hier in Betracht kommenden Verteilungsweise, der „distributiven" oder „qualitativen", und ihres Gegensatzes zur andern von den beiden denkbaren Haupt-Verteilungsweisen, nämlich der gewöhnlichen oder „quantitativen" Verteilung.

Analog auch dürfen wir mit der Pluralform von den Individuen irgend einer in jener Klasse enthaltenen Gruppe, wie Venus, Erde, Mars, sagen: dieselben seien „Planeten“.

$\varkappa_2$) Auch umgekehrt soll unter dem Gemeinnamen (oder „Gattungsnamen“), wenn *von* ihm etwas ausgesagt wird, *stets* nach Belieben dieses oder jenes („irgendein“ any) Individuum der Klasse verstanden werden dürfen — unter „Planet“ also, wenn man will, die Erde, oder auch der Merkur, etc.

Durch diese wichtige Vorschrift erscheint der Gebrauch, die Anwendungsweise der Gattungsnamen auch in der andern Hinsicht geregelt, soferne er nämlich selbst als Gegenstand, *Subjekt* einer Aussage auftreten wird.

Wird diese Vorschrift konsequent befolgt, so wird also, was von der Gattung ausgesagt wird, auch von jedem ihrer Individuen Geltung beanspruchen.

Eine Aussage, deren Subjekt Gemeinname ist, eine Klasse vorstellt, wird ein *allgemeines* oder *generelles* Urteil (judicium generale, general statement) genannt — im Gegensatz zu einer Aussage, deren Subjekt ein Eigenname ist, ein Individuum vorstellt, welch' letztere wir ein *singulares* oder *Einzel*-Urteil (judicium singulare, singular statement) nennen werden.

So dürfen wir beispielsweise sagen: Der Planet läuft um die Sonne, denn Merkur umläuft die Sonne, Venus umläuft die Sonne etc. Neptun läuft um die Sonne.

Die letztere Aussage ist Beispiel eines *singularen* Urteils, die erste illustrirt ein *generelles* Urteil; dasselbe ist auch gleichbedeutend, äquivalent mit: „*Jeder* (every planet, each) umläuft die Sonne“ sowie mit „*Alle* Planeten laufen um die Sonne“ und exemplifizirt jene besondre Art von generellen Urteilen, die man als „*universale*“ bezeichnet.

Dagegen würde ein Satz wie: „*Einige* Planeten (some planets) haben Monde“ zwar auch als ein generelles, aber nicht als ein universales, sondern als „*partikulares*“ Urteil hinzustellen sein.

Endlich wird eine Aussage von der Art wie: „Ein Planet ist (von lebenden Wesen) bewohnt“ ein „*unbestimmtes*“ Urteil genannt.

Wir wollen auf diese Unterscheidungen, welche zunächst vorwiegend als sprachliche erscheinen, gleich hier schon aufmerksam machen, weil auf sie im Text gelegentlich Anspielung gemacht werden wird, während sie nach ihrem logischen Gehalte, systematisch, erst später in Betracht gezogen werden.

Dagegen ist ein generelles Urteil unrichtig, wenn dasselbe nicht für jede der als zulässig festgesetzten Bedeutungen des als sein Sub-

jekt auftretenden Gattungsnamens, nicht für jedes Individuum der Klasse, zutrifft. Es würde z. B. der Ausspruch: „Der Planet hat (einen oder mehrere) Monde" unberechtigt sein, weil er schon für die Venus (z. B.) als unwahr anzuerkennen ist.

Wir müssen es uns für unser eigentliches Thema vorbehalten, die Wirkung obiger Grundsätze, durch welche der Gebrauch von Gemeinnamen geregelt werden muss, in die verschiedenen Ausdrucksformen der Sprache hinein zu verfolgen, und etwaige Abweichungen von denselben, welche die Sprache sich (inkonsequenterweise) gestattet, gelegentlich zum Bewusstsein zu bringen.

Auf die geschilderte Weise nun ermöglicht es uns der Gemeinname, beliebig viele singuläre Urteile zu einer einzigen — eben der generellen oder allgemeinen Aussage — abkürzend zusammenzufassen. Es wird damit ein ökonomisches Haushalten mit den Mitteln des Ausdruckes erstmalig angebahnt, und erscheint das Verfahren schon wegen der Häufigkeit, mit welcher solche Ersparniss anzubringen ist, von immensem Vorteile. Unabsehbar steigert sich noch diese Wirkung, wenn wir — in Gestalt des „Begriffes" — demnächst ein Mittel erkennen werden, auch „offene" Klassen zu bestimmen, Klassen, welche oft eine unbegrenzte Menge von Individuen umfassen.

λ_2) Der Gattungsname kann als ein *„mehrdeutiger"* oder *„vieldeutiger"* bezeichnet werden, indem ihm eben mehrere Bedeutungen mit gleichem (und vollem) Rechte zukommen.*) Er tritt dadurch in Gegensatz zu dem als *„eindeutig"* (determinative) zu bezeichnenden Eigennamen sowie zu dem Namen „Nichts" (oder „rundes Quadrat"), welchen wir (wie schon früher „unsinnig", so nun auch) *„undeutig"* nennen mögen.

Wie man sieht, ist hiernach zwischen *„zweideutig"* und „doppelsinnig" ein wesentlicher Unterschied anzuerkennen. Ein zweideutiger Name wäre z. B. „meine Hand"; derselbe würde aber vollkommen „*ein*sinnig", univok gebraucht, wenn wir nur logisch berechtigte Urteile fällen, wie: „meine Hand hat fünf Finger" und dergl.

Zweideutig ist in der Arithmetik die Quadratwurzel aus irgend einer von Null verschiedenen Zahl (in ihrer ursprünglichen Bedeutung, als allgemeinste, „volldeutige" oder „Generalwert" aufgefasst). Sie wird erst doppelsinnig, wenn man etwa — was nicht erlaubt ist — dieselbe und ihren „Hauptwert" homonym benennt oder bezeichnet. Einsinnig bleibt

*) Es mag nämlich auch jedes Individuum der Gattung *eine von seinen Bedeutungen* genannt werden, wogegen die ganze Gattung oder Klasse „seine Bedeutung" schlechtweg ausmacht. Die Ausdrücke: „*eine* Bedeutung" und „*die* Bedeutung", als verschiedene gekennzeichnet durch den unbestimmten und den bestimmten Artikel, werden bei Gemeinnamen unterscheidend gebraucht.

sie (bei aller Zweideutigkeit), sobald die Arithmetik eine korrekte Darstellung findet.

Erst durch unberechtigt schwankenden Gebrauch, in der Art, wie wir es unter v_1) geschildert haben, kann ein vieldeutiger Name auch zu einem doppelsinnigen gestempelt werden — gleichwie auch schon ein eindeutiger: man denke z. B. an einen schlechtweg nach „Königsberg" adressirten Brief, wo es doch mehrere Städte dieses Namens gibt, von denen aber nur eine hier gemeint sein konnte und bei einem andern, dem Wortlaut nach ebendahin adressirten Brief auch eine andere gemeint sein mag.

Der Gemeinname kann ebenfalls „abstrakt" oder „konkret" genannt werden, je nachdem die unter ihm begriffenen Individuen *sämtlich* als Abstrakta resp. Konkreta zu gelten haben.

„Mut" stellt ein Beispiel für den ersten, „Pferd" ein solches für den zweiten Fall vor. Doch gibt es, wie wir schon hervorgehoben haben, auch Gattungsnamen von gemischtem Charakter („abstrakt-konkreter" Natur), wie „ausgedehnt". Auch ist hier zu wiederholen, worauf wir bereits hinwiesen, dass diese Unterscheidungen von geringem Belang für unsre nächsten Zwecke sind.

μ_2) Vor allem ist noch einer Verwechselung des „Gemeinnamens" mit dem „*Kollektivnamen*" vorzubeugen. Der letztere umfasst allerdings auch eine Mehrheit von unterscheidbaren Dingen, welche, wenn man will, wiederum eine Klasse konstituiren und sich auch unter einem „Gemeinnamen" oder „Gattungsnamen" zusammenfassen lassen; jedoch wird er dadurch zum Kollektivnamen gestempelt, dass bei seinem Gebrauche wesentlich andere Grundsätze maassgebend sind, als für diesen ihm zugehörigen Gattungsnamen.

Der Kollektivname kann zunächst selbst ein Eigenname sein. Als solcher ist er uns nichts Neues und war bei allen unsern bisherigen Betrachtungen über Eigennamen schon immer mit zugelassen; auch *seine* Bedeutung hat nach wie vor als *ein* „Individuum" unter den Objekten des Denkens zu gelten.

Ein solcher ist z. B. „die (gegenwärtige) deutsche Armee"; ein solcher ist ferner „die Gruppe der Planeten" (sie würde zusammen mit deren Monden und der Sonne abermals einen Kollektivnamen: „das Planetensystem" ausmachen); ein solcher ist „die Bibliothek des Herrn N. N.".

Als zugehöriger Gattungsname würde bezüglich erscheinen: „(gegenwärtig eingekleideter) deutscher Soldat", „Planet" und „dem Herrn N. N. gehöriges Buch".

Wir erinnern, dass nach dem unter ι_2) und $\varkappa_2$) Ausgeführten das Wesen des Gemeinnamens in seiner „distributiven" Verwendung bestand.

Durch seine Vermittelung kommen in erster Linie und hauptsächlich Aussagen zustande, die von den Individuen, welche der Gemein-

name umfasst, auch einzeln abgegeben werden könnten, ohne dass man nötig hätte, dabei auch an andre (die andern) Individuen dieser Gattung zu denken, auf sie zu reflektiren — mit der Berechtigung also, von allen zwischen solchen Individuen etwa bestehenden Beziehungen von vornherein abzusehen, zu abstrahiren. Mit dem Prädikate freilich können dann auch Beziehungen zwischen Individuen der Subjektklasse statuirt werden.

Wird dagegen ein Name als Kollektivname gebraucht, so werden zwischen den Objekten, die er in sich zusammenfasst, gewisse Beziehungen als vorhanden vorausgesetzt und kommen als solche wesentlich in Betracht. Nicht alle Beziehungen, welche zwischen besagten Objekten betrachtbar, brauchen gegeben zu sein oder als unveränderliche festgehalten zu werden, aber gewisse wenigstens von diesen Beziehungen, oder in gewissen Hinsichten wenigstens gelten diese Beziehungen uns als *feste*. Jene Objekte und eventuell Individuen stehen vor unserm Geiste nicht als eine Klasse, sondern als ein *System*.

Jedenfalls, was von dem Kollektivnamen gültig ausgesagt wird, braucht von den Individuen, die er in sich zusammenfasst, nicht einzeln gültig zu sein. Es darf aufhören zu gelten, sobald man solche getrennt in's Auge fasst, sie separirt. Vielmehr *braucht* jenes Prädikat *nur* der „Gesamtheit" der Individuen zuzukommen (d. i. dem der gleichzeitigen Vorstellung sämtlicher Individuen zugrunde liegenden Wirklichen) *mit Rücksicht auf alle Beziehungen, welche zwischen diesen Individuen* schon (faktisch oder theoretisch) *bestehen*, solange man sie also in dieser ihrer Verbindung miteinander belässt*) (zuweilen auch, sobald man sie erst in gewisse feste Beziehungen zu einander gebracht denkt, bringt). Auch kommt dem einzelnen Individuum der Kollektivname (darum) nicht zu.

Der Flügelmann der ersten Kompagnie des ersten Regiments der deutschen Armee ist „deutscher Soldat"; der Oberst desselben auch; aber er *ist* nicht „(die) deutsche Armee". Die deutsche Armee ist schlagfertig; der einzelne Soldat kann dies auch sein. Aber die deutsche Armee mag auch der gegnerischen Armee überlegen sein, und von dem einzelnen deutschen Soldaten könnte doch jedenfalls nicht ausgesagt werden, er sei

*) Die Individuen selbst müssen gleichwol nicht als gleichzeitig existirende vorausgesetzt werden.

Verdient der Kollektivname die Bezeichnung als eine *„Summe"*, *„Quantität"* oder *„Grösse"*, so ist sogar gefordert, dass man die Individuen bereits in eine eigenartige Beziehung, Gedankenverbindung gebracht habe, deren Wesen die Arithmetik auseinandersetzt.

der feindlichen Armee überlegen — ansonst wir unser Militärbudget auf die Erhaltung dieses einen Soldaten einschränken dürften. Das Buch „ist" nicht die Bibliothek; die Bibliothek kann viele Tausende wert sein, das Buch gleichwol nicht, etc.

Als Kollektivnamen könnten wir jedes Ding bezeichnen, an welchem überhaupt Teile sich unterscheiden lassen: also vielleicht allein den Punkt, den Augenblick und das Nichts nicht! So ist ein Buch wieder Kollektivname in Bezug auf die in ihm zusammengebundenen Blätter und deren Seiten, eine Seite ebenso im Hinblick auf die auf ihr gedruckten Sätze, Wörter, Silben und Buchstaben. Fast jeden Namen also, mit dem wir bisher ein Objekt des Denkens bezeichnet dachten, mag man einen Kollektivnamen nennen. Es ist darum für die Logik von sehr geringem Belange, eine Unterscheidung zwischen Kollektivnamen und solchen, die es nicht sind, aufzustellen.

Und gleichwie die Eigennamen, von welchen wir bisher gesprochen, so mögen wir auch Gemeinnamen als *kollektive* hinstellen.

„Armee" ist so ein Gemeinname, sofern das Wort geradesogut die deutsche, wie die französische, die englische etc. Armee bezeichnen kann, und zugleich ist es Kollektivname in Bezug auf die einzelnen Soldaten, welche mit ihrer Ausrüstung die Armee zusammensetzen. Ebenso ist „Bibliothek (überhaupt)" Gemeinname und Kollektivname zugleich, ersteres als die Bibliothek des Herrn A, die der Gesellschaft B, etc. letzteres als die einzelnen Bücher umfassend, die sich in ihr befinden. (Jevons[6].)

Ein psychologischer sowol als grammatikalischer Grund, von Kollektivnamen zu reden, liegt wirklich vor, wenn von einer Reihe von Individuen diese einzeln aufgezählt, erwähnt worden sind, und es nun gilt dieselben kollektiv zu einem Ganzen zusammenzufassen.

Wenn aufgezählte Individuen zu einem Gemeinnamen zusammengefasst werden sollen, so bedient sich die Sprache wesentlich anderer Ausdrücke, als wenn dieselben zu einem Kollektivnamen zu vereinigen sind.

Hat man erstern Zweck im Auge, so spricht man (streng konsequent, oder auch nur mit Vorliebe) von einer

Klasse, *Gattung*, *Art*, *Ordnung*, *Familie* (im weiteren Sinne, z. B. Pflanzenfamilie), einem *Geschlecht*, auch einem *Reich (Bereich)*, einer *Abteilung* etc.

dieser Individuen, im Hinblick dagegen auf letztern Zweck von ihrer (resp. ihrem)

Menge, *(Quantität)*, *Gesamtheit*, *(Summe)*, *Reihe*, *Folge*, ev. *Sequenz*, *Schar*, *Haufen*, *Gruppe*, *System*, *Zusammenstellung*, *Komplex*, *Inbegriff*, *Gebiet*, *Mannigfaltigkeit*,

man spricht von ihnen als von einem *Ganzen*, und vielleicht noch in manchen andern *mehr oder weniger* synonymen Termen.

Das Wort *„Abteilung"* — sowie vielleicht auch schon *Bereich*,

Gebiet und ***Mannigfaltigkeit*** — scheint wol in gleicher Weise für *beide* Zwecke disponibel zu sein.

Auffallend ist der grosse Reichtum an Ausdrücken, welche der Sprache zu solchen Zwecken zur Verfügung stehen. Die Wissenschaft (namentlich die Mathematik) hat übrigens schon angefangen diese Synonyme (besonders die der zweiten Gruppe) erheblich zu differenziiren und dürfte darin noch weiter fortschreiten.

Die häufigste Veranlassung dazu, von Kollektivnamen überhaupt zu reden, liegt in dem Auftreten der *Pluralform* von Substantiven, mit kollektiver Bedeutung. Auch sie ist vorwiegend grammatischer Natur. Die Individuen, welche der zugehörige Singular (als Gemeinname)*) distributiv bezeichnet, bezweckt die Verwendung des Pluralis nicht selten, kollektiv zu einem Ganzen zusammenzufassen, während in der Regel freilich auch der Plural nur bestimmt ist, eine Klasse darzustellen.

Dass man, wenn ein Hauptwort im Plural fällt, demselben oft nicht ansieht, ob es mit der Absicht kollektiver oder aber genereller Auffassung gebraucht wird, ist als eine *sehr grosse* Unvollkommenheit der Sprache zu bezeichnen. Wir werden sehen, dass auf der Verwechselung beider Absichten manche Fehlschlüsse beruhen.

Wenn wir z. B. sagen: „Die Anforderungen, welche sein Beruf an ihn stellte" . . . und fortfahren . . . „erfüllte er mit spielender Leichtigkeit", so lässt sich das Urteil als ein generelles auffassen. Fahren wir dagegen fort: . . . „brachten seine Gesundheit zum Wanken", so erscheint dies ausgeschlossen, und ist solches nicht wol von der einzelnen Anforderung, sondern nur von den vereinigten Nachwirkungen aller der aufreibenden Anforderungen gültig auszusagen gewesen. Etc. Zuweilen werden sogar Kollektivnamen gebraucht, um generelle Urteile zu fällen, z. B. wenn wir sagen: die ganze Familie N. N. hat zur Zeit den Keuchhusten. Seine Eltern sind gestorben. Etc.

In der Regel lässt sich allerdings — durch Aufwendung von nur ein wenig Sorgfalt auf die Ausdrucksweise — der Doppelsinn vermeiden, doch ist zu beklagen, dass in dieser Richtung ausserordentlich viel gesündigt wird.

Wie oft begegnen wir nicht Sätzen wie: „dass die drei Winkel eines

---

*) Ein Eigenname kann überhaupt nicht in den Plural gesetzt werden. Man käme dadurch zu absurden Ausdrücken, wie wenn etwa ein Mensch von „seinen Nasen", Köpfen, Vätern, seinen Geburtsstädten und dergl. reden wollte. Schon die natürliche Zahl, wenn grösser als 1, wird unsinnig (um nicht zu sagen „imaginär") sobald als ihre Einheit ein „Individuum" gesetzt wird, als ihre „Benennung" ein Eigenname auftritt, und ist z. B. „fünf John Stuart Mill's (mit dessen Heimatsorte und Geburtsjahr gedacht)" ein gänzlich sinnloser Ausdruck, desgleichen „7 Sonnen" (unseres Planetensystemes).

Dreiecks gleich zwei Rechten sind"*) oder die Quadrate über den beiden Katheten gleich demjenigen über der Hypotenuse*) — in welchen doch das Prädikat nur *der Summe* der im Subjekte aufgezählten Grössen zukommt! Korrekt gedeutet würden jedoch diese Sätze behaupten, jeder Dreieckswinkel für sich sei gleich zwei Rechten und das Quadrat über der Hypotenuse sei gleich dem über einer jeden Kathete. Wie leicht wäre es aber, in solchen Fällen noch das Adverbium *„zusammen"* in den Text, wie sich gehört, einzufügen!

Ebenso muss es als ein wahrer Verderb bezeichnet werden, wenn im Elementarunterricht der Volksschullehrer sagen lässt: „2 *und* 3 *sind* 5", welches bedeutete: 2 ist 5, desgleichen 3 ist 5. Der Satz enthält zwei Fehler (nur!), indem einmal die Konjunktion „und" für das arithmetische Operationszeichen „plus" gesetzt erscheint — dieses ginge aber noch an mit Rücksicht auf den von der Bequemlichkeit der Aussprache beherrschten Sprachgebrauch. In diesem Buche werden wir uns in der That gewissermassen des umgekehrten Fehlers schuldig machen.

Gar nicht zu rechtfertigen ist aber die *Plural*form der Kopula. „2 und 3", verstanden als die Summe 2 + 3, *ist* eine einzige Zahl, und diese („sind" nicht, sondern) „ist" (gleich) 5. Will man im Plural sprechen, wie dies als Bedürfniss erscheinen kann in dem Falle, wo die Zahlen „benannte" sind, wie bei „2 Birnen und 3 Birnen", so ist zu sagen: „sind zusammen 5 Birnen", wofern man nicht vorzieht zu sagen: *„gibt"* (oder „macht") 5 Birnen.

Eine Ausdrucksweise aber, die, wie gezeigt, den Unterschied zwischen Einzahl und Mehrzahl, kollektiver und genereller Deutung verwischt, kann nur verwirrend auf die jungen Köpfe wirken. [Ebenso dulde der Lehrer nicht, falls a und b Zahlen bedeuten, dass etwa der Schüler spreche, „a *sind* gleich b" — und dergleichen mehr.]

Sehr misslich erscheint es besonders, wenn das adjektivische (sog. „unbestimmte") Zahlwort *„alle"* anstatt generell, einmal kollektiv verwendet wird. Die lateinische hat in dieser Hinsicht schärfer unterschieden als die modernen Sprachen. Sie gebraucht generell nur *„omnes"*, kollektiv dagegen *„cuncti"* (zusammengezogen aus con-juncti, für „alle zusammengenommen", joined together). Wir haben im Deutschen noch das Wort *„sämtliche"*, und wäre zu wünschen, dass dieses bislang mit „alle" synonyme Wort davon differenziirt und mit der gleichen Konsequenz unterscheidend gebraucht würde. Vergl. einen in § 4 besprochenen Fehlschluss.

Abgesehen von den erwähnten Fällen der Zusammenfassung aufgezählter Dinge und der in den Plural gesetzten Hauptwörter, wo ein *grammatikalischer* Grund vorliegen kann, einen (einfachen oder zusammengesetzten) Namen als „Kollektivnamen" hinzustellen, ist die

*) Philosophen — ich könnte deren namhafte citiren — sollten derartige Nachlässigkeiten des Ausdrucks sich am allerwenigsten zuschulden kommen lassen.

zwischen solchen und Einzelnamen angängige Unterscheidung nur von *psychologischer* Art. Sie ist objektiv nur in soweit begründbar, als eben an dem überhaupt Benennbaren sich fast immer noch irgend welche Teile unterscheiden lassen, und erscheint im übrigen in unser subjektives Belieben gestellt.

Den Namen eines materiellen Körpers z. B. haben wir zunächst keinen Grund, anders als wie als einen „Einzelnamen“ zu bezeichnen. Denselben Namen müssen wir aber als einen kollektiven hinstellen, sobald wir den Körper als eine Atomengruppe studiren. Nach Belieben können wir z. B. auch das Schachbrett als einen Felderkomplex behandeln. Etc.

Die kollektive Vereinigung mehrerer substantivisch benannter Dinge zu einem Ganzen, sowie die kollektive Pluralbildung (resp. -verwendung) ist besonders für die mit Zahl und Maass, mit der Quantität der Dinge sich beschäftigenden Disziplinen von Bedeutung.

Das Studium ihrer Gesetze ist demgemäss aber der *Arithmetik und Grössenlehre* und *nicht* der Logik (*im engern Sinne*) zuzuweisen.

An diesem Scheidepunkte zweigt sich eine grosse Gruppe von Disziplinen von der Logik ab, um sich ihr selbständig und — in Anbetracht des Reichtums der Entwickelung, die sie gefunden — als mindestens ebenbürtig gegenüberzustellen. Und beide Richtungen erscheinen unter diesem Gesichtspunkt ungefähr wie Quantität und Qualität geschieden.

ν_2) Bevor wir das *über* ω_1) charakterisirte Ziel noch weiter verfolgen und den Nachweis der dort aufgestellten Behauptung vollends erbringen, scheint es mir wünschenswert, gleich mit den grundlegenden Betrachtungen über *Namen*, ihre Einteilungen und Unterscheidungsmöglichkeiten hier erst zu Ende zu kommen.

Man pflegt Namen auch noch als *positive* (affirmative, bejahende) oder aber *negative* (verneinende) hinzustellen, wie „nützlich“ und „nicht nützlich“ (nutzlos), „schädlich“ und „nicht-schädlich“ (unschädlich), „Ich“ und „Nicht-ich“.

So unleugbar in der That ein Gegensatz zwischen solchen Benennungen (auch ihrer Bedeutung nach) besteht, von denen die eine als „Verneinung“, Negation der andern sich darstellt und gerade diejenigen individuellen Objekte auszuschliessen scheint, welche die andere umfasst (und vice versā), so kann auf diesen Gegensatz doch nicht etwa eine Einteilung der Namen selbst in „positive“ und „negative“ gegründet werden — in Anbetracht, dass es in unser subjektives Belieben gestellt bleibt, *welchen* von den beiden einander „kontradiktorisch entgegengesetzten“ Namen wir als den positiven hinstellen wollen,

So wenn z. B. von geraden Linien in einer Ebene die Rede ist, mögen wir gewisse Paare (oder auch Systeme, Scharen) von solchen Geraden als „*Parallele*“ mit einem positiven, andere als „*Nicht-parallele*“ mittelst negativen Namens darstellen. Nichts hindert aber auch, die erstern als „*Nicht-schneidende* (Gerade)“ negativ, die letztern als „(einander) *Schneidende* (Gerade)“ positiv zu benennen.

Positiv oder negativ zu sein, ist daher blos ein äusserliches, sozusagen grammatikalisches Merkmal des Namens, welchem in seiner Bedeutung kein bestimmtes Merkmal entspricht, ein logischer Gehalt überhaupt nicht zukommt, unter Umständen aber wol ein psychologischer.

Nur die Beziehung, der Gegensatz zwischen dem durch eine Bejahung und dem durch deren Verneinung gebildeten Namen fällt wirklich dem Bereich der Logik anheim, und mit diesem Gegensatz werden wir uns auch noch eingehend zu beschäftigen haben. (Genaueres hierüber und über die auf diesen Punkt bezüglichen Kontroversen siehe in der siebenten und achten Vorlesung.)

Einen Stein kann man als „nicht-sehend“, dagegen nicht wol als „blind“ bezeichnen. Demgemäss noch gewisse unter den für negativ angesehenen Namen als „*privative*“ hinzustellen — wie „blind“, „taub“, „lahm“ etc. — hat nur dann Sinn und ist nur motivirbar, wenn uns eine bestimmte Gattung vorschwebt, zu der ein so prädizirtes Individuum gehört. Entbehrt das Individuum nur eines Merkmals, welches seinesgleichen (den andern Individuen ebendieser Gattung) in der Regel (von rechtswegen, im „normalen“ Zustande) zukommt, so legen wir jenem das „privative“ Prädikat oder Attribut bei. Wegen der einerseits willkürlichen, andrerseits so komplizirten Voraussetzungen (denn was hat wol als „normal“ zu gelten?), auf welchen solche Distinktion beruht, ist dieselbe aber für die elementare Logik von ganz untergeordnetem Interesse.

ξ_2) Dagegen lässt eine wirkliche Einteilung der Namen sich gründen auf ihre Unterscheidung als *absolute* (nicht-relative) und *relative*. Ein „relativer“ Name ist ein solcher, welcher einem Dinge auf Grund des Umstands beigelegt wird, dass es in einer bestimmten Art von *Beziehung* (Relation) zu einem oder mehreren andern Dingen steht — ein Name also, bei dessen Deutung das Vorhandensein auch dieser letzteren Dinge eine Voraussetzung oder Unterstellung bildet.

Z. B. „Ursache, Wirkung, Grund, Folge, Entfernung, Vater, Sohn, ähnlich, gleich, unähnlich, verschieden“ sind lauter relative Namen.

Nichts kann als eine „Ursache“ bezeichnet werden, es sei denn als Ursache *von etwas* (anderem), welches seine „Wirkung“ zu nennen sein wird. Niemand kann Vater heissen, er sei denn Vater *von* Kindern. „Entfernung“ hat keinen Sinn für sich, sondern nur als Entfernung zweier Punkte, Körper oder Dinge im Raume von einander.

Wenn in der Parodie des „Tannhäuser“, welche die Breslauer Studenten-

verbindung Silesia geschaffen, auf die Bemerkung des Landgrafen, der den Tannhäuser aus der Ferne herankommen sieht:

„Mich däucht, ich kenne diesen Wanderer:
Entweder ist er's, oder s'ist ein anderer",

der Dichter den Adjutanten wohldienernd sagen lässt:

„Wen Euer Gnaden meinen, weiss ich nicht —
Doch hat er ein *sehr ähnliches* Gesicht",

so beruht der Witz, resp. die Komik, auf der Verwendung eines relativen Namens, als ob er ein absoluter wäre.

Jene andern Dinge heissen die „Korrelate", ihre Namen die nomina correlativa zu dem, was das nomen relativum bezeichnet; alle miteinander sind die „Beziehungsglieder", membra relationis, und die bestimmte Art der zwischen beiderlei Objekten bestehend zu denkenden Beziehung heisst das „fundamentum relationis".

Das letztere ist oft sehr verwickelter Art, wie bei „Gläubiger", „Schuldner", noch mehr bei „Ankläger" (Kläger), wo das eine Korrelat der „Verklagte" (Beklagte), ein zweites Korrelat das „Delikt", Vergehen, sein würde, dessen der letztere vom ersten beschuldigt wird (resp. die eingeklagte Schuldforderung oder Entschädigungssumme), ein drittes Korrelat der Gerichtshof, das „Forum", vor welchem die Klage anhängig gemacht wird, und endlich ein viertes Korrelat — sofern es nicht durch die vorerwähnten bereits bedingt erscheint und dann nicht mitzuzählen wäre — die Gesetzesbestimmungen, der „Kodex" und Paragraph, auf die sich die Klage beruft.

Das angeführte Beispiel exemplifizirt ein „mehrfaches Relativum" (multiple oder plural relative) im Gegensatz zu dem häufigsten Falle, dem des „zweifachen" (dual relative), wie es z. B. „Wirkung" mit ihrem Korrelate, der „Ursache", darstellen würde.

Auch Abstrakta, wie „Gestalt", „Schönheit" etc. können hienach schon als duale Relative aufgefasst werden (sofern zu fragen ist: wessen?), wobei allerdings in Bezug auf „Schönheit", *wie üblich*, übersehen wäre, dass eigentlich der Geschmack des Publikums oder desjenigen, der dieselbe beurteilt, anerkennt, als ein drittes Glied in die Beziehung eingeht.

Indem wir uns hier mit einer blossen Worterklärung begnügten, verweisen wir in Bezug auf Weiteres und Genaueres auf die letzten Vorlesungen in unserm Buche (24. Vorl.).

o_2) Mit obigem sind unsre Betrachtungen über Namen vorerst zu Ende gekommen, und dürfte es sich darnach empfehlen, die Hauptergebnisse übersichtlich zu rekapituliren. Es konnten unterschieden und einander gegenübergestellt werden:

a) *univoke*, d. h. *einsinnige* (wo nicht *unsinnige*)	und *äquivoke* oder *doppel-* und *mehrsinnige*

Namen — desgleichen auch schon Wörter oder Zeichen überhaupt.

Nicht mehrsinnig zu sein war die fundamentale an das Zeichen zu stellende Anforderung, die auf die Forderung der Konsequenz in seinem Gebrauche hinauslief.

Die Wörter zerfielen in

b) *kategorematische* oder *Namen*	und *synkategorematische* oder *Nichtnamen*.

Die Namen waren entweder

c) *Eigennamen* oder *Gemeinnamen*

— jener ein *Individuum* unter den Objekten des Denkens, dieser (distributiv) eine *Klasse* von Individuen bezeichnend — und es bildete dies die für die Logik fundamentale Unterscheidung, mit deren Besprechung wir uns auf längere Zeit zur Not schon hätten begnügen können.

Die Unterscheidung von

d) *Einzelnamen* und *Kollektivnamen*

liess sich indessen kaum anders als wie grammatikalisch oder psychologisch rechtfertigen, indem ausser dem Nichts (0), der Eins, dem Punkt und dem Augenblick so ziemlich alles Benennbare unter irgend einem Gesichtspunkt als ein Kollektivname hingestellt werden durfte. — Ebenso war von den einander gegenübergestellten

e) *positiven* und *negativen*

Namen nur der Gegensatz zwischen beiden logisch begründbar. — Dagegen erschien jeweils

f) *abstrakt* oder *konkret*

und (bei Gemeinnamen) eventuell auch gemischt „abstrakt-konkreter" Natur zu sein als ein in der Bedeutung des Namens selbst begründetes Merkmal, auf das zu achten jedoch für die Logik weniger in's Gewicht fallen möchte, als für die Philosophie überhaupt.

Endlich war die Einteilung der Namen in

g) *absolute* und *relative*

wieder eine durchaus belangreiche — wozu unter den Gemeinnamen auch wiederum solche von „gemischtem" Charakter denkbar wären (indem die Individuen, welche der Gemeinname umfasst, auch teils durch absolute, teils durch relative Namen charakterisirt sein könnten).

Es ist gelegentlich von Wert, sich bei der Verwendung von Namen über diese Verhältnisse Rechenschaft zu geben und darauf bezügliche Fragen vorzulegen.

Recht instruktiv und zu richtiger Anwendung vorstehender Unterscheidungen erziehend ist ein logisches Gesellschaftsspiel: das Ratspiel, bei welchem, unter zeitweiliger Entfernung eines Mitspielenden, sich die übrige Gesellschaft über irgend ein Benennbares, jenem zum Erraten aufzugebendes Objekt des Denkens einigt. Der Ratende hat der Reihe nach an jeden Eingeweihten eine beliebige Frage in Bezug auf das zu erratende Objekt zu stellen, die aber *nur* mit „Ja" oder mit „Nein" — und im Zweifelsfalle mit „Ja-nein" — beantwortet werden darf und korrekt zu beantworten ist; das Fragen mag so lange im Ring herum fortgesetzt werden, bis die Lösung erfolgt, das aufgegebene Objekt vom Ratenden bei seinem Namen genannt, oder aber der Versuch des Ratens aufgegeben wird. Fragen über die Buchstaben und Silben, die den Namen zusammensetzen, sind ausgeschlossen.

Das Spiel gibt oft die überraschendsten Aufschlüsse über die logische und intellektuelle Verfassung einzelner von den beteiligten Persönlichkeiten, und durch die nach erfolgtem Raten häufig sich anspinnende Diskussion als Erläuterung oder Rechtfertigung für gegebene Antworten, sowie durch die zuweilen schon im Laufe desselben mittelst Protests aus der Gesellschaft erfolgende Remedur für eine unrichtig erfolgende Antwort des Einzelnen gibt es vielfach Anregung zur Klärung der Begriffe.

Es können nicht nur individuelle Gegenstände aus der materiellen Welt aufgegeben werden, bei denen die Kategorieen der Zeit und des Ortes meist rasch auf die Spur zu helfen pflegen, sondern auch allgemein gefasste, mittelst Gemeinnamens dargestellte, Objekte — wie z. B. „Schwefelhölzer". Bei einiger logischen Schulung der Teilnehmer pflegen selbst Abstrakta als Gemeinnamen, wie z. B. „der Sommer", „Wahrscheinlichkeit", „der Prädestinationsglaube", „ein Missverständniss" und dergl. unschwer geraten zu werden. Als überraschend reichhaltig erweisen sich die Kategorieen des Zweckes bei den Erzeugnissen menschlicher Kunst.

Bedingung für die Lösbarkeit der Aufgabe ist die Einsinnigkeit des zum Raten Aufgegebenen: es muss, falls dessen Name ein doppelsinnig gebräuchlicher sein sollte, die Gesellschaft sich zuvor über eine bestimmte unter seinen Bedeutungen als die hier dem Namen beizulegende geeinigt haben.

Natürlich wird in praxi auch bei dem Ratenden eine Kenntniss von der Existenz des betreffenden Objektes oder wenigstens von seinesgleichen, vorauszusetzen sein. Wer nie von dem neuentdeckten Metall Germanium, vom Neptunsmond Oberon oder von der dunklen (sehr lichtschwachen) Nebensonne des Sirius, vom Sehpurpur, von dem kopflosen Wirbeltier des mittelländischen Meeres, dem Fisch Amphioxus etc. gehört hat, wird solche nicht wol zu raten im stande sein. Und auch bei denjenigen, welchen es obliegt, die Antworten zu geben, muss eine hinlängliche Bekanntschaft mit den Eigenschaften und Ingredienzien, mit dem ganzen Wesen des Ratobjektes vorliegen.

C. Über Begriffe. Einteilung, Definition und Kategorieen, Pasigraphie. Logik des Inhaltes oder des Umfangs? Über Urteile, Schlüsse und deren Folgerichtigkeit. Warum Algebra der Logik.

π_2) Nachdem wir die Notwendigkeit erkannt, dass der sprachenbildende Geist neben Eigennamen auch Gemeinnamen schaffe, drängt sich uns als nächste die Frage auf: *welche* Dinge wir denn je mit demselben Gemeinnamen belehnen sollen?

Behufs ihrer Beantwortung müssen wir uns berufen auf das menschliche *Unterscheidungsvermögen*, ein Vermögen, ohne welches ja kein Studium, keine Wissenschaft, kein Erkennen denkbar erschiene:

Wir sind im stande, Verschiedenes zu unterscheiden und an ähnlichen Dingen Gleichheiten wahrzunehmen.

Die *Gleichheit,* Übereinstimmung (agreement) findet immer nur in einer gewissen *Hinsicht* statt und ist mit Verschiedenheiten (differences), — in anderer Hinsicht — verknüpft, ohne welche uns die miteinander verglichenen Dinge gar nicht als *mehrere* Dinge erscheinen könnten, sondern *identisch, einerlei,* einunddasselbe (oder das nämliche), nur *ein* Ding zu nennen sein würden.

Teile oder Elemente der Vorstellung eines — nötigenfalls vollständig, auch mit allen seinen Beziehungen zu noch andern Dingen — gedachten Dinges, in welchen es mit andern Dingen übereinstimmen oder auch von solchen differiren kann, nannten wir *Merkmale* desselben (genauer gesagt: jeweils das solchen Vorstellungselementen zugrunde liegend gedachte Wirkliche).

Insofern wir häufig ein Ding nicht vollständig auszudenken fähig, müssen wir natürlich neben „bekannten“ auch „unbekannte“ Merkmale in der Regel zugeben.

Es sei hier nochmals in Erinnerung gebracht, dass (hienach) dem Namen „Merkmal“ eine möglichst allgemeine Bedeutung unterzulegen ist; es handelt sich dabei durchaus nicht blos um „Eigenschaften“ (oder aber „Thätigkeiten“), die dem Dinge selber, auch wenn es isolirt betrachtet wird, notwendig oder zufällig zukommen (innewohnen), vielmehr kann das Merkmal auch begründet sein in einer „Beziehung“, einem Verhältnisse, einer Stellungnahme, welche andere Dinge *zu dem gedachten* einnehmen. Nicht nur gilt uns der Wellenschlag als ein Merkmal des Meeres, sondern es gilt uns auch der Preis, die Käuflichkeit als Merkmal einer Waare. Schon dass er mir, oder einem Andern, *mir nicht,* (als Eigentum) gehört, dass er mir *gefällt,* und dergl. ist als Merkmal eines Gegenstandes hinzustellen, und auch die Abwesenheit bestimmter Merkmalgruppen kann selbst wieder als Merkmal gelten, z. B. als Merkmal einer gewisser Bergspitze, dass noch kein menschlicher Fuss sie je betreten — einerlei auch, ob etwa ein einwörteriger Name dafür vorhanden ist, oder nicht (Merkmal der Jungfräulichkeit oder Unberührtheit des Gipfels, der „Unerstiegenheit“?). Vergl. hiezu besonders § 15. Dass aber z. B. eine Person A um den Tod einer andern B trauert, lässt sich begreiflicherweise — ohne weiteres — nicht

wol ein Merkmal einer dritten Person (oder Sache) C nennen. Im Merkmal muss eine Bezugnahme auf das Ding zu erblicken sein, sobald wir dieses ausdenken.

Wir pflegen nun jeweils solche Dinge mit *demselben Gemeinnamen* zu benennen, welche dadurch, dass sie einander in Hinsicht bestimmter Merkmale gleichen, sich uns sozusagen von selber zur Belehnung mit dem gleichen Namen empfehlen.

ϱ_2) Schon als Vorbedingung und weiterhin im Verlauf dieses Benennungsprozesses sowie bei dem Gebrauch des dadurch geschaffenen Gemeinnamens treten allemal die übereinstimmenden Merkmale jener Dinge in den Vordergrund der Aufmerksamkeit, denn sie gerade bilden das Band zwischen den wechselnden Vorstellungen der individuell verschiedenen Dinge, welche der Gemeinname umfasst, und dem sich gleichbleibenden Namen. Es wird (in Kant's Ausdrucksweise) auf jene übereinstimmenden Merkmale *„reflektirt"*.

Mit dem Gemeinnamen „teuer" (teures Ding) z. B. werden wir verschiedene Gegenstände nur dann bezeichnen, wenn wir auf die Höhe ihres Preises achten, mit dem Gemeinnamen „rund" nur solche, bei denen auf ihre Gestalt wir unser Augenmerk richten und deren Übereinstimmung mit der Kugelgestalt wahrnehmen. Etc.

Infolgedessen aber spielt sich ab, vollzieht sich im Geiste ein eigentümlicher psychologischer Vorgang, welcher darin gipfelt, dass wir mit dem Gemeinnamen einen *„Begriff"* verbinden.

Die übereinstimmenden Merkmale der Dinge, die wir mit demselben Gemeinnamen bezeichnen, *verstärken* sich gegenseitig im Bewusstsein, werden als wiederholt vorgestellte intensiver gedacht, wogegen deren nicht übereinstimmende Merkmale im Bewusstsein zurücktreten.

In unserm Hirn mag diesem Vorgang ein Prozess entsprechen, welcher treffend verglichen worden ist mit der Vertiefung einer Furche des Ackers, wie sie durch wiederholtes Pflügen entlang derselben bewirkt wird. Schopenhauer[1] zieht zum Vergleiche heran: die durch wiederholte und andauernde Umbiegung längs derselben Kanten sich ausbildende Neigung eines Tuches, sich in bestimmter Faltung zu legen. Bei der unzweifelhaften Feinheit der uns grösstenteils noch unbekannten Vorgänge im Gehirne, welche die Denkhandlungen begleiten und deren Erforschung der Physiologie obliegt, sind jedoch beide Vergleiche nur als sehr rohe Annäherungen aufzufassen, als ein blosser Notbehelf zu nehmen.

Beneke fasst obigen Verstärkungsprozess als eine *Anziehung des Gleichartigen* (in unserm Geiste) auf.

σ_2) Es kann diese Wirkung noch mit bewusster Absicht gesteigert werden kraft eines andern Vermögens des Menschengeistes (auf das

wir nebenher Bezug zu nehmen schon wiederholt Veranlassung fanden) nämlich des *Abstraktionsvermögens:*

Wir sind im stande, auf gewisse Merkmale eines gedachten *Dinges,* m. a. W. in irgendwelchen Elementen unsrer Vorstellung von demselben, *die Aufmerksamkeit zu konzentriren,* dieselben in das Feld der Aufmerksamkeit zu rücken und daselbst mehr oder minder vollkommen zu isoliren, *indem wir von andern Merkmalen absehen* oder „abstrahiren", d. h. die den letztern entsprechenden Vorstellungselemente im Bewusstsein zurücktreten, eventuell sie völlig aus demselben schwinden lassen.

Solch' bewusste Steigerung des durch den Gemeinnamen schon unbewusst eingeleiteten Abstraktionsprozesses wird — aus Gründen der Arbeitsteilung — besonders in den Wissenschaften praktizirt; in diesen pflegt der Geist durch reichliche Übung eine förmliche Virtuosität zu erlangen, von den (für die Untersuchung) unwesentlichen Merkmalen der Dinge abzusehen, alle Nebenumstände jeweils zu vernachlässigen, dieselben zum Behuf seiner eigenen Entlastung zu ignoriren und so befreit dann seine volle Kraft dem Wesentlichen zuzuwenden.

Durch die Abstraktion überhaupt werden Vorstellungselemente soweit isolirt, dass sie auch allein, in gleicher Isolirtheit, reproduzirt zu werden vermögen. Dadurch erlangen resp. erhöhen wir die Fähigkeit, dieselben *allgemein* zu verwenden, nämlich sowol, mit neuen Vorstellungselementen sie zu verknüpfen, als auch in andern Vorstellungskomplexen als diejenigen waren, *aus* welchen sie abstrahirt*) wurden, sie (genauer ihresgleichen) wiederzuerkennen. Vergl. Sigwart[1].

Nachdem wir z. B. vom Schnee das Merkmal der Weisse, weisser Farbe entnahmen, auslösten, abstrahirten, werden wir das gleiche Merkmal in der vorgestellten Nebelwolke, dem Kochsalz, der Gypsfigur, Papier etc. wiederfinden, und würde sich auch jemand eine weisse Maus z. B. vorstellen können, der niemals eine solche gesehen. — Den Anlass zum Vollzug dieser Abstraktion aber bot die Erfahrung, dass es verschiedene weisse Gegenstände gibt, und die Wahrnehmung dessen, worin sie unter sich übereinstimmen und sich von den nicht weissen unterscheiden. Als auf ein anderes Beispiel sei noch hingewiesen auf das Merkmal der „Kugelgestalt" beim Ball, der Seifenblase etc. und auf das Merkmal der „Gestalt" überhaupt, welches wir bei der Melodie, bei einer nach geographischer Länge und Breite bestimmten Himmelsgegend etc. vermissen (als nicht vorhanden erkennen), nachdem es durch Abstraktion aus der Anschauung räumlicher Dinge von bestimmter Begrenzung gewonnen worden.

Die Abstraktion kann schon an der Einzelvorstellung (repraesen-

*) Die Ausdrücke „*etwas* abstrahiren" und „*von* etwas abstrahiren" sind wohl zu unterscheiden. Ersteres ist gleichbedeutend mit „darauf reflektiren", letzteres mit „davon absehen".

tatio singularis) ausgeübt, ihr Verfahren schon auf das Individuum angewendet werden.

Logisch betrachtet ist es gleichgültig für das Ergebniss eines Abstraktionsprozesses, ob man denselben nur *ein*mal, oder öfters, vollzogen habe, ob an *einem* oder an unzähligen Objekten. Psychologisch aber macht solches einen sehr beträchtlichen Unterschied aus, und es dürfte fraglich sein, ob nicht in dieser Hinsicht es geradezu als eine Vorbedingung für die Möglichkeit des Abstraktionsvollzuges hinzustellen ist, dass wir erst der individuellen Verschiedenheit der durch Abstraktion zu sondernden Merkmale inne geworden seien dadurch, dass durch Vergleichung verschiedener Objekte wir die Übereinstimmung der einen neben der Verschiedenheit der andern wahrgenommen.

τ_2) Wir versuchten vorstehend genetisch auseinanderzusetzen, auf welche Weise wir dazu gelangen, uns einen *Begriff*, notio, conceptus, conception zu bilden von den durch einen Gemeinnamen dargestellten Dingen.

Der Begriff ist das — in gewissem Sinne unvollendet, ein „Ideal" bleibende — Resultat des eben (unter ϱ_2 und σ_2) geschilderten Prozesses.

Sein „Wesen" (essentia), oder, wie man auch sagt, seinen „*Inhalt*" (complexus, intent) bilden eben die gemeinsamen Merkmale der mit dem Gemeinnamen bezeichneten Dinge, und zwar seinen „*faktischen*" Inhalt diejenigen der letztern, auf welche bei seiner Bildung reflektirt wurde, seinen „*idealen*" Inhalt aber die sämtlichen gemeinsamen Merkmale überhaupt, welche als solche erkannt werden könnten, die es aber vielleicht niemals vollständig auszudenken möglich.

Im Gegensatz zu diesem Inhalte wird die Gesamtheit, Klasse der unter dem Gemeinnamen (distributiv) zusammengefassten Individuen bezeichnet als der „*Umfang*" (ambitus, sphaera, extent) des zugehörigen Begriffes.

Beispielsweise sind im Begriffe „materielle Substanz" als dessen Inhalt zusammengefasst die Merkmale: ausgedehnt und von bestimmter Raumerfüllung zu sein, d. i. sich irgendwo im Raume zu befinden, die Merkmale der Beweglichkeit, Undurchdringlichkeit, Trägheit und Schwere, überhaupt die Eigenschaft, der Sitz von Kräften zu sein, dazu von unzerstörbarer und unerschaffbarer Masse, also der Masse nach geschätzt, von ewiger Fortdauer zu sein, das Merkmal, eine Temperatur zu besitzen, und anderes mehr. Seinen Umfang macht alles das zusammen aus, was überhaupt Materie heisst: jeder Körper, jeder Teil eines solchen und jede Gruppe von Körpern im Weltall.

v_2) Gemäss der hervorgehobenen zwiefachen Hinsicht — nach

Inhalt und Umfang — in welcher Begriffe betrachtet werden können, sind auch zwei Möglichkeiten denkbar, einen Begriff zu bestimmen.

Dies kann nämlich einerseits geschehen durch Angabe seines Umfanges — sogenannte *Einteilung*, *Divisio(n)*, resp. *Partition**) des Begriffes, und andrerseits durch Angabe seines Inhaltes, das ist *Begriffserklärung, Definition*, auch *Beschreibung*.

So würden wir z. B. durch Aufzählung sämtlicher Planeten eine Umfangsangabe (Division, Partition) des Begriffes „Planet" vollziehen — man würde dazu erst im stande sein, wenn schon alle Planeten bekannt wären. Ebenso aber thun wir dies auch dadurch, dass wir sagen, die Klasse der Planeten zerfalle in die drei Unterklassen der inneren Planeten, der Erde und der äusseren Planeten.

Die Umfangsangabe des grammatikalischen Begriffes *„Satz"* (sentence) wird geleistet durch den Hinweis, dass der Satz entweder ein *Fragesatz* (sentence interrogative) oder ein *Ausrufungssatz* (sentence ejaculative), oder eine *Wunschäusserung* (sentence optative), oder eine *Bitte* (sentence rogative), ein *Befehl* (sentence imperative) oder endlich eine *Aussage* (sentence indicative, statement, lat. enunciatio — ein Urteil, judgement, judicium) sein wird, m. a. W. dass die genannten Gebilde zusammen alles das ausmachen, was man einen „Satz" nennen kann.

Das Entsprechende leisten wir für den Begriff der „einfachen Farbe" (im Gegensatz zur Mischfarbe), wenn wir sagen, sie sei entweder rot, orange, gelb, grün, blau oder violet mit allen Abstufungen und Übergängen, wie sie das Spektrum eines weissglühenden festen Körpers zeigt.

So mögen wir ferner den Umfang des Begriffs „Wirbeltier" kund geben durch den Hinweis darauf, dass mit Einschluss des Amphioxus die Fische, sowie die Reptilien, Vögel und Säugetiere zusammen die Wirbeltiere ausmachen.

Der Ausspruch: „Die Affekte sind: Liebe, Hass, Freude, Kummer, Hoffnung, Furcht, Humor (!) und Zorn" gibt eine Aufzählung (oder Einteilung des Begriffs) der Affekte.

---

*) In Bezug auf den Namen „Partition" ist der Gebrauch unter den Logikern ein schwankender. Viele wollen darunter nur die Angabe der „Teile" eines Dinges verstanden wissen (z. B. bei der Orange die von Schale, Fleisch und Kernen), wogegen Ueberweg[1] pag. 106 auch die Angabe der „Merkmale (überhaupt)", indess nur eines Einzeldinges — vergl. nachher ψ_2) — als „Partition" hinstellt. Ich würde oben diese letztere Bezeichnung der gebräuchlicheren „Division" vorziehen, in Anbetracht, dass mir für jene „Aufzählung der Teile" ein einwörteriger Name überhaupt nicht Bedürfniss erscheint, dass ferner Ueberweg's „Partition" (hier) als ein besondrer Fall der „Definition" hinzustellen ist, der eines aparten von „Definition" verschiedenen Namens ebenfalls nicht bedarf, sodass zunächst der Name „Partition" zu beliebiger Verwendung frei wird, in Anbetracht endlich, dass wir uns genötigt sehen werden, den Namen „Division" (sowie das Divisionszeichen) in einem von dem obigen gänzlich verschiedenen Sinne späterhin zu gebrauchen, womit dann also eine Doppelsinnigkeit mehr in die Wissenschaft der Logik Eingang fände, die nach unserm Vorschlag vermieden wird.

Die *Einteilung* kann geradezu auf eine „*Klassifikation*" hinauslaufen, sofern man nämlich bei ihr nicht (oder nicht durchaus) auf die Individuen selbst zurückgeht, sondern dabei sich auf gewisse Unterklassen als dem Umfange nach schon bekannte Begriffe (die sog. „Einteilungsglieder", membra divisionis) beruft. Durch an sie gestellte wissenschaftliche Anforderungen wird indess der Begriff der „Klassifikation" noch weiter eingeengt.

Fortgesetzte Einteilung auch der zunächst sich darbietenden Unterklassen oder Teilungsglieder führt in letzter Instanz (zuguterletzt) immer auf die *Individuen* als etwas (dem „Umfange" nach) „nicht" weiter „Teilbares" (zurück).

Umfasst — wie in der grossen Mehrzahl der Fälle — der Umfang eines Begriffes *unbegrenzt viele* Individuen, ist deren Klasse eine *offene*, so lässt sich dieser Umfang niemals erschöpfend angeben dadurch, dass man auf die Individuen selbst zurückgeht; vielmehr sieht man sich alsdann genötigt, zur Umfangsangabe auch solche Unterklassen heranzuziehen, die selbst wieder offene sind, und entweder als schon bekannte vorauszusetzen sind, oder, wenn sie erklärt werden sollen, dies nur vermittelst *Inhalts*angabe, Definition eines ihnen zugehörigen Begriffes zu werden vermögen. Bekannt wiederum konnten zwar die Individuen einer beliebig grossen Menge noch einzeln, der unbegrenzte Rest jedoch ebenfalls nur durch Innewerdung ihres begrifflichen Inhalts geworden sein.

Exempel: Die unbegrenzte Reihe der Individuen, welche wir „natürliche Zahlen" nennen, lässt sich zwar beliebig weit, doch niemals fertig aufzählen. Irgendeinmal muss die begriffliche Bestimmung derselben eintreten, und am besten geschieht dies gleich von vornherein; man wird sie „definiren" als „Summen von Einern", d. i. als die Ergebnisse eines Verfahrens, durch welches hinter 1 fort und fort + 1 angehängt wird.

Ebenso lassen sich die Punkte, die innerhalb einer gegebenen Ellipse liegen, nur durch ebendies Merkmal, oder auf eine darauf zurückkommende Weise, sie lassen nur begrifflich sich allesamt bestimmen.

Die Umfangsangabe erscheint darum als das unvollkommnere der beiden Mittel, einen Begriff zu bestimmen. Zudem überlässt sie uns noch ungelöst die Aufgabe, erst den Komplex der in allen unter den Begriff fallenden Individuen übereinstimmenden Merkmale ausfindig zu machen, zu entdecken, durch deren Verknüpftsein dieselben von allen nicht unter diesen Begriff fallenden Individuen unterscheidbar sind. Sie lässt somit das Wesen des Begriffes unerörtert, lässt uns den Reifen vermissen, der gleichsam als Fassdauben die Individuen erst zusammenhält.

Auch ist noch ein Umstand zu beachten: Wenn wir die Bestimmung eines Begriffs durch Umfangsangabe versuchen, so erscheint die Auswahl der Objekte des Denkens, die als seine Individuen hinzustellen sind, von vornherein in unser Belieben gestellt. Wie immer man auch solche Auswahl treffen mag, so lässt sich in dem Zufall, der unsre subjektive Willkür lenkt und sie gerade auf diese und auf keine andern Objekte als die zu Individuen zu erhebenden (vielleicht auf's Gerathewohl, at random) verfallen lässt, in der That ein ebendiesen und nur diesen Individuen gemeinsames Merkmal erblicken, in gewissem Sinne also auch von einem „Begriffe" reden, welcher der so gebildeten Klasse von willkürlich zusammengelesenen Objekten zugeordnet wäre.

Indessen leuchtet ein, dass solchermassen künstlich geschaffenen, „erkünstelten" Begriffen ein wissenschaftlicher Wert in der Regel nicht zukommen wird. Ein solcher wird wol nur solchen Begriffen zuzusprechen sein, die entweder entsprungen sind aus der Erkenntniss übereinstimmender Merkmale an *gegebenen* Objekten, die diesen unabhängig von subjektiver Laune notwendig oder faktisch zukommen, oder welche dadurch, dass sie ein gegebenes, ein bestimmt *angebbares* Merkmal enthalten, eben dienen sollen Objekte unsres Denkens zu bestimmen.

Wenn schon sie allerdings missbraucht werden könnte, so wird es gleichwol nicht ratsam erscheinen, der Freiheit der Begriffsbildung irgend welche Schranken von vornherein aufzuerlegen. Vergl. γ_3).

φ_2) Die Begriffserklärung, Definition*), zu der wir nach obigem zum Behufe der Begriffsbestimmungen greifen werden, sieht sich vor eine andere Schwierigkeit gestellt.

Zunächst lassen die Merkmale, welche den unter einen Begriff fallenden („zu seiner Kategorie gehörigen") Individuen „gemeinsam" sind, und welche in ihrer Verbindung dessen *idealen* Inhalt ausmachen, sich überhaupt nie vollständig aufzählen. Der volle Inhalt des Begriffs lässt nie sich fertig „beschreiben". Denn wieviele Merkmale man auch schon berücksichtigt haben mag, so werden sich stets noch neue gemeinsame Merkmale angeben lassen, auf welche noch nicht geachtet worden ist. (Vergl. nachherige Beispiele.)

Die Definition verzichtet daher in der That auf die *unmittelbare* Angabe des ganzen Begriffsinhaltes. Sie begnügt sich, direkt, *explicite*, nur einen Teil desselben, den Rest aber blos *mittelbar*, *implicite* anzugeben, indem sie unter den übereinstimmenden Merkmalen eine gewisse Gruppe hervorhebt von solchen Merkmalen, welche die übrigen alle involviren, mitbedingen, nach sich ziehen, zur Folge haben — sei es

*) Wir sprechen hier nur von der (allein als haltbar zu erkennenden) „*Nominaldefinition*" der schulmässigen Logik und betrachten das unklare Ideal der sog. „Realdefinition" als durch die Ausführungen von Mill, Sigwart und Andern abgethan.

auf Grund logischer Denknotwendigkeit allein, sei es auch mit denknotwendiger Bezugnahme auf die anerkannten Grundsätze einer wissenschaftlichen Doktrin, wie die Naturgesetze, Rechtsnormen und dergl.

Diese in der Definition hervorgehobenen Merkmale können als *charakteristische* oder „wesentliche" Merkmale des Begriffes (notae essentiales) hingestellt werden; doch ist nicht zu übersehen oder zu vergessen, dass die Bedeutung dieses Namens ein willkürliches Moment in sich schliesst, indem schon Beispiele darthun, dass für denselben Begriff als für ihn charakteristische sehr verschiedene Merkmalgruppen erwählt werden können.

Ein Beispiel zur Erläuterung dieser allgemeinen Bemerkungen: Wir mögen den Kreis (aufgefasst als Kreis*linie*) regelrecht definiren als eine geschlossene, ebene Kurve, deren sämtliche Punkte von einem bestimmten Punkt (etwa ebendieser ihrer Ebene, dem alsdann sogenannten „Mittelpunkte") gleichweit abstehen. [Etwas kürzer gefasst könnte die Definition auch lauten: „Kreis" ist der „geometrische Ort" — d. i. die Gesamtheit der möglichen Lagen — eines („desjenigen") Punktes in einer Ebene, welcher konstanten Abstand hat von einem festen Punkt in dieser Ebene.]

Auf Grund der geometrischen Axiome folgt alsdann denknotwendig der Satz von der Gleichheit aller Peripheriewinkel, welche auf demselben Bogen stehn, im Kreise. Dieser Satz thut aber weiter nichts, als: auf ein weiteres Merkmal, welches allen Kreisen gemeinsam ist, aufmerksam machen, solches konstatiren. Und zwar würde hier sogar sich beweisen lassen, dass dieses Merkmal (wenn auf gewisse Art formulirt) unter allen ebenen Kurven *nur* einem Kreise zukommen kann, weshalb man dasselbe auch benutzen könnte um eine gültige, jedoch von der vorigen gänzlich verschiedene Definition des Kreises aufzustellen.

Ebenso hätten wir aber auch definiren können „Kreis sei eine solche ebene (geschlossene) Kurve zu nennen, welche bei gegebenem oder nicht zu überschreitendem Umfange den grösstmöglichen Flächeninhalt hat. Daraus folgt dann schon logisch allein (wenigstens, falls zugegeben wird, dass der vorigen Definition allemal ein wirklicher Kreis entspricht, ohne Berufung auf weitere geometrische Axiome), dass diese Kurve auch bei gegebenem Flächeninhalt den kleinstmöglichen Umfang haben muss — was folglich ebensogut zu einer Definition des Kreises hätte mitverwendet werden können.

Offenbar sind es Gruppen von zum Teil recht verschiedenen Merkmalen — wir brauchen sie nicht in einzelner Aufzählung zu wiederholen — die in diesen verschiedenen Definitionen als wesentliche Merkmale des Kreises hingestellt wurden. Die einen ziehen aber schon die andern auf Grund der geometrischen Doktrin nach sich.

Den idealen Begriff des Kreises würde jemand erst dann besitzen, wenn alle möglichen für alle Kreise übereinstimmenden Eigenschaften und Relationen (Thätigkeiten fehlen hier) seinem Geiste gegenwärtig wären, in seinem Bewusstsein vereinigt würden. Derselbe müsste darnach alle (unter anderm auch alle geometrischen) Sätze, die überhaupt als von jedem Kreise

gültig ausgesagt werden könnten (auch in Bezug auf seinen Schnitt, seine Berührungen mit andern seinesgleichen sowie mit irgend welchen Kurven und Figuren, auch in Bezug auf Scharen von seinesgleichen, die Kreisschnitte der Flächen etc., nicht zu vergessen seiner Gleichung und analytischen Eigenschaften in *jedem* Koordinatensysteme) schon kennen. Nun lässt sich aber die Möglichkeit nicht leugnen, dass fort und fort neue und allgemeingültige Sätze vom Kreise entdeckt werden. Den idealen Begriff des Kreises besitzt sonach niemand, sondern es ist seine Verwirklichung ein Ziel, auf das die Wissenschaft erst hinarbeitet.

Ein altbekanntes Beispiel, wie man in Bezug auf die Auswahl der als „wesentliche" zur Begriffsbestimmung ausreichenden Merkmale sich versehen kann, liefert Platon's Definition des Menschen als eines zweibeinigen Tiers ohne Federn, welche dessen Schüler Diogenes durch einen gerupften Hahn persiflirte. Bezug sollte bei jener Definition genommen sein auf die anerkannten Thatsachen der Naturgeschichte.

Für einen gegebenen Begriff hat demnach der Ausdruck „die wesentlichen Merkmale" keinen bestimmten Sinn, sofern damit nicht auf eine bereits getroffene Auswahl hingewiesen wird; man kann vielmehr von vornherein nur reden von „einer" Gruppe charakteristischer Merkmale.

Aus dem Gesagten geht hervor, dass eine Definition (auf extralogischem Gebiete) überhaupt nur *innerhalb des Rahmens einer bestimmten Wissenschaft* eines bestimmten Sinnes teilhaftig sein wird — indem sie eben auf die Grundsätze, Axiome einer solchen stillschweigend Bezug nimmt.

Z. B. durch die oben gegebene Begriffserklärung des Kreises würde dieser Begriff in andrer Weise und *als ein andrer* bestimmt, wenn dabei auf die Axiome etwa einer *nicht*-euklidischen Geometrie Bezug genommen werden sollte — anstatt, wie dies oben stillschweigend geschah — auf die der Euklidischen. Es mag sogar der Fall eintreten, dass verschiedene unter den gleichberechtigt zu nennenden, weil einander gegenseitig bedingenden Definitionen des Kreises dort in der That wesentlich verschiedene Begriffe bestimmen, einander nicht mehr gegenseitig zur Folge haben.

Unter allen Umständen aber stützt und beruft sich die Begriffsbestimmung mittelst Definition ganz unvermeidlich (mit) auf die Gesetze des denknotwendigen Folgerns; *sie setzt die deduktive Logik bereits voraus.*

χ_2) Nun stehen zunächst uns nur diejenigen Begriffe zur Verfügung, die mit den fertigen Gemeinnamen der Sprache verknüpft sind und so uns gegeben erscheinen. Diese mögen jeweils durch beigegebene Erläuterungen von jedem Doppelsinn gereinigt, vor solchem fernerhin bewahrt werden, sodass wir mit ihnen einen unveränderlichen und scharfbestimmten Vorstellungsinhalt (vorbehaltlich dessen durch die

fortschreitende Erkenntniss bedingten Zuwachses) verknüpfen. Zur Aufstellung aller ferneren Begriffe von unbegrenzt allgemeiner Anwendbarkeit steht uns dann, wie gezeigt, nur das Mittel der Definition zur Verfügung, bei dessen Anwendung allemal die Logik schon vorausgesetzt werden musste.

Dieser Umstand legt mir erstmalig eine Bemerkung nahe, für die ich noch anderweitige und ausschlaggebende Gründe in's Feld zu führen haben werde. Schon im Hinblick darauf scheint mir nämlich das Bestreben: die Logik selbst als eine Logik des Begriffs*inhaltes* darzustellen, wie es seit Jahrtausenden vorwiegend zu verwirklichen gesucht worden, ein Hysteron-proteron zu sein; es wird damit, wie mich dünkt, das unterste zu oberst gekehrt, genauer: das oberste zu unterst.

Es würde mir bedauerlich erscheinen, es würde ja zu einem Zirkel nötigen, wenn die Grundgesetze folgerichtigen Denkens sich nicht darlegen liessen, ohne diesen subtilsten und schwierigsten Teil der Logik, wenn man will auch den höchsten, schon vorauszusetzen, als welcher die Lehre von den *Inhalten* der Begriffe (den Endzielen der Wissenschaft überhaupt) scheint hingestellt werden zu müssen.

In der That aber zeigt schon in ihrer bisherigen Entwickelung — wie F. A. Lange[1] pag. 147 hervorhebt — die Logik eine zunehmende Tendenz, von einer Lehre des Inhalts eine solche des *Umfangs* zu werden. Der letztern, deren konsequente Durchführung von diesem scharfsinnigen Autor bislang vermisst wird, weissagt derselbe eine „Zukunft“ — mit reicher Entfaltung.

Wir versuchen hier, die Verwirklichung dieser Voraussagung mit anzubahnen. Wenn wir auch die verschiedenen Seiten der Frage noch eingehend beleuchten werden, so sei es doch hier schon ausgesprochen, dass wir die Logik als Lehre von den Urteilen und Schlüssen rein nur als eine „*Logik des Umfanges*“ darstellen werden — desgleichen *zunächst* auch die Lehre von den Begriffen. Damit glauben wir auch den *leichtesten* Weg einzuschlagen, auf welchem sich mit gegebenen Kräften am weitesten wird kommen lassen.

ψ_2) Auch das individuelle oder *Einzelding* wird als „Begriff“ mit zugelassen; es ist der Komplex aller seiner Merkmale, durch deren eigenartige Verbindung miteinander es sich von allen andern Objekten des Denkens unterscheidet und so als ein vollkommen bestimmtes sich darstellt. In ihm und mit ihm selbst fällt Inhalt und Umfang seines Begriffes in eins zusammen.

Durch diese Einziehung des Einzeldinges unter die (bisher nur als „*allgemeine*“ betrachteten) „Begriffe“ erweitern wir die Auffassung, die wir mit dem Worte „Begriff“ verbinden. Wir geben damit kund, dass uns als das Charakteristische beim Begriffe (als das Wesen vom Begriff des Begriffes) nur eben das erscheint, dass unter seinem Namen

eine *bestimmte von allen andern unterscheidbare Merkmalgruppe*, ein bestimmter Vorstellungsgehalt*) — in eigenartiger Verknüpfung**) — zusammengefasst und in unabänderlich *konstanter* Weise diesem Namen zugeordnet werde.

Mit Sigwart (l. c.) betrachten wir als „das Ziel der Begriffsbildung im logischen Sinne eine für alle Denkenden gleiche *Ordnung ihres mannigfaltigen Vorstellungsgehaltes* und damit die allseitige planmässige Vollendung dessen, was die Sprache überall schon mit unbewusster Vernunft begonnen hat“.

In und mit dem Begriff wird in der That *verglichen:* es wird Übereinstimmendes zusammengefasst und Nichtübereinstimmendes auseinandergehalten. Und die Wahrnehmung aller Verschiedenheiten sowie die aller Übereinstimmungen (auch nach der Seite der Relationen, wie Grund und Folge, Ursache und Wirkung) wird die Erkenntniss des Weltganzen zusammensetzen.

Die Wissenschaft aber geht darauf aus, nicht nur logisch vollkommene, sondern auch die *zweckmässigsten* Begriffe zu gewinnen, mit Hülfe deren und ihrer Bezeichnung die grösstmögliche Einfachheit und Abkürzung unsres Wissens zu erreichen ist und die wertvollsten und umfassendsten allgemeinen Urteile ermöglicht werden. (Vergl. Sigwart[1] p. 272 u. 273.)

ω_2) Kehren wir nochmals zu unsrer Betrachtung der Definition zurück. Bei der Erklärung eines Begriffs mittelst Definition konnte es sich nicht um die Angabe eines *einzigen* Merkmals als des „wesentlichen“ handeln. Es müsste sonst das zu Erklärende mit Demjenigen, wodurch es erklärt werden soll, sich dem idealen Vorstellungsgehalte nach schon von vornherein decken und würde ein völlig identisches Urteil resultiren, wie z. B. „Weiss heisst etwas Weisses“, „Wahrheit ist, was wahr ist“; es könnte höchstens die Erläuterung des Sinns eines Wortes vermittelst eines damit synonymen vorliegen, wie etwa

*) Ich glaube mich darin in Übereinstimmung mit Sigwart zu befinden — vergl.[1] pag. 270. Doch möchte ich, im Hinblick auf das Unvollendetbleiben der Begriffe nach der Seite ihres idealen Inhaltes, seiner Forderung der *„festen Begrenzung“* die obige der *Bestimmtheit* vorziehen.

**) Dieser Zusatz ist eigentlich überflüssig, indem die Art und Weise, wie Merkmale miteinander verknüpft auftreten, selbst schon unter die Merkmale eingerechnet werden mag. Die *„sichere Unterscheidung“* eines Begriffs von allen andern wird notwendig mit ihm selbst gegeben sein, sobald nur sein Inhalt hinreichend entwickelt.

„Rotation ist eine Drehung", „Zweifel ist Ungewisssein" und dergl. — was aber niemand als eine Definition gelten lässt.

Als charakteristisch kann immer nur eine Mehrheit, Gruppe, *ein System* von (allermindestens zwei) angebbaren *Merkmalen* in Betracht kommen — welche dem Begriffsinhalte angehören, in ihm enthalten sind.

Würde eines von diesen Merkmalen durch die übrigen von selbst bedingt" (in dem schon erläuterten Sinne), so wäre seine Anführung überflüssig; dasselbe ist dann aus der Definition — behufs deren Vereinfachung — fortzulassen; dann sind ja schon die übrigen Merkmale zur Bestimmung des Begriffes ausreichend.

Jedes von diesen Merkmalen wird nun aber, ausser in dem zu definirenden, auch noch selbständig oder in andern Begriffen auftreten, denn wenn ein solches jenem *ausschliesslich* angehörte, so würde es allein schon für den zu definirenden Begriff charakteristisch sein, zur Bestimmung desselben ausreichen; die Angabe der übrigen Merkmale könnte alsdann unterbleiben und kämen wir auf den oben schon als ausgeschlossen erkannten Fall zurück.

Die in der Definition je als „wesentliche" verwendeten Merkmale müssen also, je für sich, gleichwie einen *„engeren"* Inhalt, so einen *„weiteren"* Umfang haben; sie werden dem zu definirenden *„übergeordnete"* oder mit ihm verglichen *„höhere"* Begriffe sein.

Von diesen Begriffen oder wesentlichen Einzelmerkmalen pflegt man irgend einen — gewöhnlich den durch ein Substantiv dargestellten — als *„genus proximum"*, d. i. als die dem zu definirenden („Art"-) Begriffe *nächst übergeordnete „Gattung"* zu bezeichnen, und sagt von dieser, dass sie durch die noch ferner hinzutretenden Merkmale eingeschränkt, noch näher bestimmt, *„determinirt"* werde.

Jedes neu hinzutretende Merkmal muss in der That, gleichwie es den faktischen durch die bisherigen Merkmale ausgedrückten Vorstellungs*inhalt vermehrt*, so auch den (möglichen) *Umfang* des von letzterm bestimmten Begriffes wirklich *verringern*, ansonst es ja von diesen bereits thatsächlich mitbedingt sein und darum seine Erwähnung überflüssig erscheinen würde.

Diese in der Definition zu dem genus proximum noch hinzutretenden Merkmale werden demgemäss als *„differentiae specificae"* bezeichnet, weil sich durch ihren Komplex, sowie auch schon durch jedes einzelne von ihnen der zu definirende Begriff als eine Unterart des genus proximum von andern Arten dieser Gattung spezifisch unterscheidet.

So erscheint bei unsrer (ersten) Definition des Kreises der Begriff „Kurve" (oder Linie) als nächst übergeordnete Gattung. Dieser ist von weiterem Umfange und dürftigerem Inhalte als der Begriff „Kreis" selbst. Der Kreis erscheint als eine „Art" unter der „Gattung" der Kurven. Als spezifische Unterschiede treten in unsrer Definition drei Merkmale zu dem Begriff der Kurve hinzu, nämlich das Merkmal „geschlossen" zu sein, „eben" zu sein und „gleichen Abstand ihrer Punkte vom Mittelpunkte zu haben".

Liessen wir das erste fort, so würde die Definition auch jeden Kreis*bogen* umfassen (resp. als einen „Kreis" hinstellen), ja — bei hinreichend allgemeiner Fassung des Begriffs „Kurve" — auch jedes System von Bögen und vielleicht isolirten Punkten *derselben* Kreislinie.

Durch Weglassung auch des zweiten Merkmals der Ebenheit bekämen wir einen Begriff, unter dessen Umfang ausser den Kreisen und Kreisbögen auch jeder Linienzug auf einer Kugelfläche fallen würde — der auf eine starre Kugel (als mathematische Linie) geschriebene Namenszug des geehrten Lesers zum Beispiel. Etc.

Was Kurve, was eben, was geschlossen ist, was gleichen Abstand seiner Punkte von einem nämlichen Punkte hat, das sind lauter höhere oder dem des Kreises übergeordnete Begriffe.

Wenn sonach die Definition eines Begriffes nur vermittelst anderer, demselben übergeordneter oder höherer Begriffe geleistet zu werden vermag, so wird man bei fortgesetzter Bestimmung auch dieser und der folgenden Begriffe mittelst Definition schliesslich bei solchen Begriffen anlangen und innehalten müssen, welche als die allgemeinsten, dem Umfange nach weitesten oder höchsten, einer Definition nicht weiter fähig sind, da sich zu ihnen höhere Begriffe (ausser dem einen allumfassenden des „*Etwas*") nicht mehr angeben lassen (resp. im Begriffsvorrat der Sprache nicht vorfinden).

Solche selbst nicht definirbare, aber zur Definition anderer verwendbare Begriffe nennt man „*Urbegriffe*" oder „*Kategorieen*". Dieselben werden dann einfach als von Anfang bekannt, nämlich mit der Sprache selbst gegeben vorauszusetzen sein.

Welches sind nun aber jene Kategorieen, die zum Aufbau aller andern Begriffe ausreichen würden?

Ein erster — nach der zutreffenden Kritik von Mill und Andern noch ziemlich misslungener — Versuch zur Aufstellung einer Kategorieentafel ist bekanntlich von Aristoteles gemacht. Auch haben Kant, Mill selbst, Peirce[1c], Sigwart und Andere schon bessere Vorschläge für das ganze Gebiet oder für einzelne Teilgebiete des Denkens zu machen gewagt. Ich hoffe einleuchtend zu machen, dass und warum derartige Versuche als verfrühte zur Zeit noch nicht zum Ziele führen können.

α_3) Immerhin ist uns mit Obigem das Ideal erwachsen, unser gesamtes Begriffssystem zu einem wissenschaftlich streng gegliederten zu gestalten, indem wir die Begriffe alle aus möglichst wenigen *Ur-* oder *Grundbegriffen* vermittelst möglichst weniger *Grundoperationen* (zu denen die Determination gehören wird) systematisch aufbauen. [Die Begriffe dieser Operationen werden selbst zum Teil den Urbegriffen in gewissem Sinne zuzuzählen sein].

Nachdem erkannt ist, wie viel der menschliche Geist dem Zeichen verdankt, dürfen wir die Möglichkeit nicht ungenutzt lassen, das Zeichen noch weiter auszubilden. Es bietet sich die Aufgabe dar, durch angemessene, adäquate Gestaltung des Zeichens Zeichen und Sache durchweg in gesetzmässiges Entsprechen zu bringen, oder (mit den Worten Trendelenburg's) die Gestaltung des Zeichens und den Inhalt des Begriffs in unmittelbare Berührung zu bringen, indem wir statt des in der Sprache gerade vorhandenen Wortes solche Zeichen ersinnen, welche die im Begriff unterschiedenen und zusammengefassten Merkmale unterscheidend und zusammenfassend darstellen.

Auf einzelnen Gebieten hat die Wissenschaft aus eigenem Bedürfniss schon Anfänge einer solchen Begriffsschrift hervorgebracht. Das Verfahren, durch welches mit unsern Ziffern die nach dem zehnteiligen Gesetz fortschreitende Zahlenbildung ausgedrückt wird (vergl. ζ_2), ist ein hervorragendes Beispiel dazu, an welchem es sich (in der Arithmetik und höheren Rechnung) deutlich zeigt, wie mit dem zutreffenden Zeichen die Herrschaft über die Sache, die Einsicht und Kunst des Menschen in unübersehbarer Wirkung zunimmt. Mit dem „notwendigen", d. h. gemäss der Forderung höchster Angemessenheit als solches sich aufdrängenden Zeichen muss sich die Erkenntniss der bezeichneten Gebiete notwendig weiter und weiter erschliessen.

Eine solche Bezeichnung wird, wenn sie auf das *ganze* Feld der Gegenstände des Denkens ausgedehnt zu werden vermag, im Gegensatz gegen das dem Inhalte der Vorstellungen mehr oder weniger gleichgültige Zeichen des Wortes, eine *charakteristische Sprache* der Begriffe, *„Begriffsschrift"*, und im Gegensatz gegen die besonderen Sprachen der Völker eine *allgemeine* Sprache der Sache *(Pasigraphie)* sein (ibid.). Hiermit sind wir angelangt bei dem Gedanken einer philosophisch wissenschaftlichen *Universalsprache.*

Derselbe war zuerst von Des Cartes erfasst, dann von Leibniz vertieft; doch blieben die beiderseits gemachten Vorschläge mehr Umriss und Versprechen, als Ausführung und Leistung. Ich folge mit den hierauf bezüglichen Bemerkungen wieder Trendelenburg (l. c.). Cartesius (Epistolae I, 111 in der Amsterdamer Ausgabe von 1682, p. 353 sqq.) verlangt, dass eine ähnliche Ordnung unter den Ideen, welche möglich sind, her-

gestellt werde, wie es eine natürliche Ordnung unter den Zahlen gibt. Und wie jemand in einem Tage lernen kann, in einer unbekannten Sprache alle Zahlen in's unendliche zu benennen und zu schreiben, obwol sie mit unzähligen verschiedenen Wörtern bezeichnet werden, so könne ähnliches mit den übrigen zum Ausdruck der menschlichen Gedanken notwendigen Wörtern geschehen. Die Erfindung einer solchen Sprache hänge von der wahren Philosophie ab*); denn ohne diese sei es unmöglich, alle Ideen der Menschen aufzuzählen oder zu ordnen und so zu unterscheiden, dass sie deutlich und einfach wären. Erst wenn man deutlich entwickelt hätte, welches die einfachen Vorstellungen, und aus welchen Elementen die Gedanken zusammengesetzt sind, und wenn dies in der Welt anerkannt worden: so lasse sich eine allgemeine Sprache hoffen, welche leicht zu lernen, auszusprechen und zu schreiben wäre und welche überdies, was die Hauptsache, unsre Urteilskraft fördern würde, indem sie alles so deutlich und unterschieden darstellte, dass eine Täuschung unmöglich würde, während umgekehrt unsre Wörter nur verworrene Bedeutungen haben, an welche sich der menschliche Geist so lange Zeit gewöhnt hat, dass er fast nichts vollkommen einsehe. Cartesius setzt hinzu, dass er eine solche Sprache und die Wissenschaft*), von welcher sie abhängt, für möglich halte; mit ihrer Hülfe werde dann ein Bauer über die Wahrheit der Dinge besser urteilen, als jetzt ein Philosoph. Aber man solle nicht hoffen, sie je zu erleben, denn das setze grosse Veränderungen voraus und es sei dazu notwendig, dass sich die Welt in's Paradies verwandle.

Leibniz indessen hatte kühneren Mut, obwol er die vorangegangenen Versuche*) und ihr Vergebliches kennt.

Des Letztern (nicht von ihm herausgegebenen) Aufsätze über die Pasigraphie sind betitelt: historia et commendatio linguae characteristicae universalis quae simul sit ars inveniendi et judicandi, desgl. dialogus de connexione inter res et verba et veritatis realitate (1677).

Schon die Namen, welche Leibniz dem Unternehmen gibt, kündigen seine Bedeutung an. Bald nennt er es *lingua characteristica universalis*

---

*) Man sieht hier schon den grossen Unterschied, welcher besteht zwischen dem *logischen* Ideal der „Pasigraphie“ und dem linguistischen einer „Weltsprache“, wie es heutzutage die Volapükisten anstreben. Gleichwie die Letzteren es thun, so bezweckten auch die erwähnten vorangegangenen Versuche blos, eine Verständigung zu erzielen zwischen Solchen, die in der Sprache einander fremd sind. Durch die allerdings nicht gering anzuschlagende Beseitigung aller Unregelmässigkeiten vereinfachen sie zwar erheblich die Grammatik, übernehmen aber ohne weiteres fast alle sonstigen logischen Unvollkommenheiten unsrer faktischen Kultursprachen, schliessen an diese sich als an etwas schlechthin Gegebenes an.

Solcher vorgängigen Versuche führt schon Trendelenburg uns eine ziemliche Anzahl (beiläufig fünfe, von Kircher, Becher, Dalgarn, Wilkins und Trede) an. Das ohne Jahreszahl, Druckort und Namen des Verfassers unter dem Titel: „Vorschläge einer notwendigen Sprachlehre“ um 1811 erschienene Werk von Ludwig Benedikt Trede, welches den Grundgedanken des Volapük schon vollständig (indess wol weniger einfach) in seiner Art verwirklicht, konnte ich von der Königlichen Bibliothek zu Berlin entleihen. Einer noch umfassenderen

oder das *Alphabet der menschlichen Gedanken,* bald hingegen *calculus philosophicus* oder *calculus ratiocinator.* [In jenem Briefe vom Jahre 1714 nennt er es *spécieuse générale* — ein Name, welcher an die Verwandtschaft mit der geometrischen Analysis erinnert, da diese, seit Vieta Buchstaben als *allgemeine* Zeichen von Grössen in sie einführte, *analysis speciosa* hiess.] Diese Namen zeigten schon das Ziel, das Leibniz vor Augen hatte: es war eine adäquate und allgemeine Bezeichnung des Wesens der Begriffe durch eine solche Zergliederung in ihre Elemente, dass dadurch eine Behandlung derselben durch Rechnung möglich werden sollte; sein Unternehmen, sagt Leibniz, müsse zustande kommen *characteribus et calculo* als eine *combinatoria characteristica.*

Von den Prinzipien her hofft er Befestigung der Erkenntniss, Verhütung des Widerspruchs, Ausschluss des Streites (man werde, wo solcher droht, einfach sagen: Lasst uns friedlich die Sache berechnen!). Leibniz erwartet einen Einblick und eine Übersicht, durch welche mitten in der sich ausdehnenden Masse der Erkenntniss dennoch die Wissenschaften sich abkürzen, und insbesondere hofft er durch die Einsicht in die einfachen Elemente und deren Verbindungsweisen auch fortschreitende Erkenntniss des Besonderen, Entdeckungen und Erfindungen.

Die Verwirklichung des gedachten Ideals einer wissenschaftlichen Klassifikation und systematischen Bezeichnung alles Benennbaren muss aber nach dem oben von uns Angeführten zur Voraussetzung haben: die vollendete Kenntniss der die Begriffselemente zu verknüpfen bestimmten Grund*operationen* und die Bekanntschaft mit deren Gesetzen. Diese Vorarbeit hat die Logik zu leisten, und solange sie — wie dermalen — unvollendet ist, können Versuche erwähnter Art von Erfolg nicht gekrönt sein.

Vorher schon Kategorieentafeln aufzustellen scheint mir kaum verdienstlicher, als der Hinweis auf einen Haufen Steine als auf die Bausteine zu einem wundervollen Baue, dessen Plan jedoch noch niemand gesehen hat, und bei welchem auch das Bindemittel, der Kitt zum Zusammenhalten der Steine, vergessen ist.

Jene die Begriffe verknüpfenden Operationen werden wir hier in der That erst zu studiren haben.

Und ihre Gesetze werden wir in bestimmten Grenzen vollständig erforschen, aber allerdings zunächst nur für die elementarsten Ver-

---

Reihe derartiger Versuche gedenkt Herr Guntram Schultheiss in einem Aufsatze über „Künstliche und natürliche Weltsprachen“ in Westermann's Monatsheften vom Sept. 1886, p. 796 .. 807.

Des Raimundus Lullius „Summulae logicales“ war hierbei nicht Erwähnung zu thun. — Dass Herrn Frege's „Begriffsschrift“[1] diesen ihren Namen nicht verdient, sondern etwa als eine in der That logische (wenn auch nicht zweckmässigste) Urteilsschrift zu bezeichnen wäre, glaube ich in meiner Rezension[4] dargethan zu haben.

richtungen des Denkens, wie sie als solche sich darbieten. Dieser erste Teil der Logik ist der *Klassenkalkul* — von **Peirce** als die Logik der Dinge hingestellt, welchen „*absolute*" Namen zukommen (vergl. ξ_2).

An die schwankenden Gebräuche der Wortsprache werden wir dabei den Maasstab eines vollkommen konsequenten Bezeichnungssystems anlegen. Mit letzterem werden wir dann auch im stande sein, die Verknüpfungen und Beziehungen, die zwischen *Urteilen* möglich sind, erschöpfend wiederzugeben, sodass als ein zweiter Teil der Logik der *Aussagenkalkul* erscheint, der sich zu einem hohen Grade von Vollendung bereits entwickelt zeigt.

Erst mit dem völligen Ausbau eines dritten (und schwierigsten) Teiles könnte aber die Disziplin der Logik den Anspruch erheben die obenerwähnte Vorarbeit für die dereinstige wahre Philosophie geleistet zu haben. Das wäre die Logik der unter „relativem" Namen zu begreifenden Gedankendinge: die Logik der *Beziehungen* überhaupt und ihrer verschiedenen Kategorieen. Diesen Teil unsrer Disziplin müssen wir dermalen grossenteils noch unfertig lassen.

β_3) Wir haben von π_2) ab versucht, den Begriff des „Begriffes" zu entwickeln.

In einer so fundamentalen Frage, über welche die Philosophen schon seit Jahrtausenden geschrieben und wo deren Lehrmeinungen so himmelweit auseinandergehen, scheint nun aber doch ein kritischer Rückblick noch angezeigt zu sein.

Wir gingen bei unsrer Betrachtung von dem für den Begriff (als Einzelding oder aber allgemeinen Begriff) bereits vorhanden gedachten *Namen* (Eigennamen resp. Gemeinnamen) aus.

Die Annahme, dass der fragliche Begriff einen Namen *habe*, kann nicht wol als eine Beschränkung für die Allgemeinheit unsrer Betrachtungen angesehen werden, wofern nur nicht etwa gefordert wird, dass der Name von Anfang bereits unter den einwörterigen figurire. Denn was auch Gegenstand des Denkens werden mag, es lässt sich doch mit Worten angeben, beschreiben. Und diese Beschreibung stellt uns einen (eventuell eben vielwörterigen) Namen für das Beschriebene vor. So oft wir übrigens einen neuen Begriff gewinnen, empfinden wir alsbald das Bedürfniss nach einem angemessenen (auch angemessen kurzen) Namen für denselben, und diesem Bedürfniss könnte nötigenfalls selbst durch einen einwörterigen Namen — mittelst Einführung eines solchen — immer genügt werden.

Es sollte jedenfalls mit unsrer Erörterung nicht behauptet sein, dass die Bildung des Worts dem Begriffe notwendig oder thatsächlich *voran*gehe.

Wenigstens die Aneignung des Wortes vonseiten des jugendlichen Menschen bei der Erlernung seiner Muttersprache mag in der That nicht selten derjenigen des zugeordneten Begriffes voraufgehen. Auch vermöchte die Wissenschaft wol Beispiele aufzuweisen, wo die Kombination von Worten — z. B. in der Form als „Nicht-a“, nachdem ein Begriff von a bereits vorgelegen — den ersten Anstoss zur Bildung eines Begriffes gab.

Jedoch lassen auch Belege sich erbringen für Fälle, wo die umgekehrte Succession erkennbar ist. Auf p. 177 seiner Schrift[1] erinnert J. Keller an das von Steinthal erwähnte Kind, das jedesmal, wenn es einen Fremden mit Papa anredete, den Kopf dazu schüttelte. „Es befand sich auf dem Stadium seiner Begriffsentwickelung, wo der allgemeine Begriff *Mann*, den es mit dem Worte Papa verband, sich zu spalten anfing in *Mann im allgemeinen* und in den Begriff, den Kinder späterhin mit *Papa* verbinden.“ Wie in diesem Falle, so dürfte auch bei dem Zuwachs an Begriffen, den die Wissenschaften liefern, die geistige Erfassung des Begriffes der wortbildenden Namengebung zumeist vorangehen.

Die ganze Frage mögen wir indess der Psychologie, Sprachwissenschaft und Pädagogik überlassen.

Worauf wir hier sicher fussen zu dürfen glaubten, ist nur: dass die Begriffsbildung mit der Namengebung, der Schöpfung und Fortentwickelung der Sprache, notwendig handinhand geht.

γ_3) Schwerlich dürfte unsre Darlegung beanstandet, sie möchte wol als zutreffend zugestanden werden in Bezug auf die sogenannten „empirischen“ Begriffe.

Begriffe, die ihren Ursprung der Wahrnehmung, *Erfahrung* verdanken, entstehn zweifellos auf die angegebene Weise. Und zwar braucht die Wahrnehmung nicht gerade eine sog. „äussere“ zu sein, die auf dem Sinneseindruck beruht.*) Auch durch „innere“ Wahrnehmung und Erfahrung gewinnen wir Begriffe in ganz analoger Weise. So mögen wir bei der Farbe und dem Ton auf das gemeinsame Merkmal des „Sinneseindrucks“ reflektiren**), wir mögen von den Phantasiegebilden, Absichten, Stimmungen und Gedanken das Merkmal der „Unsinnlichkeit“ abstrahiren.

*) Vergl. γ) Fussnote. Auch diese „äussere“ Wahrnehmung läuft übrigens wesentlich auf eine „innere“ hinaus, indem es nicht das Auge ist, das sieht, sondern der Geist, das *Ich*, in dessen Bewusstsein die Sinnesbotschaft aufgenommen wird.

**) Mit Absicht führe ich dies Beispiel an, um auf die Unhaltbarkeit und Willkür hinzuweisen, welche in der üblichen Erklärung „disparater“ Begriffe liegt.

Eine andere Frage ist indess, ob wirklich *alle* Begriffe *so*, durch Reflexion auf die gemeinsamen Merkmale, in's Dasein treten und treten müssen.

Neben dem geschilderten Prozesse der „unmittelbaren" Begriffsbildung scheint mir in der That eine Möglichkeit auch „mittelbarer" konstruktiver Bildung von Begriffen zugestanden werden zu müssen.

Der Begriff der „Unmöglichkeit" z. B. (den auch Keller hervorhebt) ist sicher nicht empirisch durch Reflexion auf die gemeinsamen Merkmale von allem „Unmöglichen" entstanden, weil solches überhaupt nicht Gegenstand einer Erfahrung werden konnte. Allerdings hegt auch dieser Begriff eine Mannigfaltigkeit von Vorstellungsverbindungen und Gedanken ein, und grenzt sie gegen die übrigen ab, denen wir aus logischen oder (solchen und) physikalischen Gründen die „Möglichkeit" zusprechen. Und es wäre noch immerhin denkbar, dass auch hier durch Reflexion auf ein gemeinsames Merkmal an eben jenen Gedankendingen der Begriff entstanden wäre, in Anbetracht, dass „Unmöglichkeit" ja in der That nicht von Dingen der Aussenwelt, sondern nur von einer Kombination von Erkenntnisselementen in unserm Geiste prädizirt werden kann.

Ob solches aber die wirkliche und notwendige Entstehung des Begriffs der „Unmöglichkeit" darstellt, scheint eine schwierige Frage zu sein.

Zuzugeben ist wol, dass wir in Gestalt der „*Verknüpfung*" (Kombination) und „*Trennung*" (Separation) und — als eine Modifikation der letztern — insbesondre in Form der „Verneinung" (Negation), von durch Abstraktion gewonnenen Vorstellungselementen oder Merkmalen auch das Vermögen besitzen, Begriffe mittelbar zu konstruiren, sodass Reflexion und Abstraktion nicht als die einzigen Quellen der Begriffsentwickelung hingestellt werden dürfen.

Auch die Begriffe des „Dings an sich" und der „Wahrheit", der „Vollkommenheit", des „Ideals", der „Freiheit", und andere, könnten ähnlich dem vorausgeschickten Beispiel verwendet werden, solche Bemerkung anzuregen.

Die angeführten Beispiele genügen wol, um auf die Schwierigkeiten einer *allgemeinen* Theorie der Begriffsbildung und der Erklärung seines Wesens hinzuweisen.

Ungeachtet der mehrtausendjährigen Arbeit sind über eine solche die Philosophen auch noch nicht einig geworden.

Es befehden sich die Schulen der „Nominalisten", der „Realisten" und der „Konzeptualisten" und wenn auch ziemlich unverkennbar geworden ist, dass jene erstern mit der Einseitigkeit ihrer Auffassung sich nicht im Rechte befinden, so können wir uns doch auch auf eine allgemein anerkannte Theorie noch nicht berufen.

Ebenso gehen die Ansichten noch weit auseinander über das Wesen der „*allgemeinen Vorstellung*" (repraesentatio generalis sive universalis) als

Desjenigen, was darunter vorgestellt wird, wenn der Name einer Klasse fällt, z. B. wenn von „einem Baume“ gesprochen wird — im Gegensatz zu der Einzelvorstellung (repraesentatio singularis, wie „*dieser* Baum hier“) und im etwaigen Gegensatz zum Begriff „Baum“. Die Identität solcher Allgemeinvorstellung mit dem zugehörigen Begriffe wird teils behauptet, teils bestritten.

Auf solchem unsichern und vielumstrittenen Fundamente nun das Gebäude einer Wissenschaft errichten zu wollen, die, wie die Logik, den Anspruch erhebt, nur absolut sichere, weil denknotwendige und evidente Wahrheiten aufzustellen, scheint mir kein wissenschaftliches Verfahren. Die Logik von vornherein als eine solche des Begriffs*inhaltes* zu errichten möchte eher wol dem Versuche gleichen, das Dach vor dem Hause zu bauen.

Eine „*Logik des Umfanges*“ in erster Linie anzustreben, darin bestärkt mich auch die Überlegung: dass (gerade wenigstens *von dem Standpunkte, den manche Verfechter* einer solchen „*des Inhaltes*“ einnehmen) viele Begriffe *dem Inhalte nach überhaupt nicht existiren,* die gleichwol eines (begrifflich!) scharfumgrenzten Umfanges sich erfreuen.

So die meisten ursprünglich durch Negation gewonnenen Begriffe, wie etwa „*Nichtmensch*“ — indem es, wie Lotze witzig bemerkt, für den menschlichen Geist eine ewig unlösbare Aufgabe bleibt, von allem, was nicht ein Mensch ist, also „*von Dreieck, Wehmut und Schwefelsäure*“ die gemeinsamen Merkmale zu abstrahiren und zum Begriff des „Nicht-menschen“ zusammenzufassen!

Dem Umfange nach existirt aber dieser Begriff doch unzweifelhaft (wenn man auch mit Lotze gegen die Zweckmässigkeit und den wissenschaftlichen Wert seiner Aufstellung zu Felde ziehen mag), sintemal kein individuelles Objekt des Denkens bekannt ist, über welches wir irgend im Zweifel sein könnten, ob demselben das Prädikat, ein „Mensch“ zu sein, zu oder abzusprechen wäre — vorausgesetzt nur, dass man sich über gewisse Fragen des Doppelsinns, z. B. den Embryo, den Leichnam betreffend, geeinigt, nämlich den Begriff „Mensch“ selbst erst gehörig präzisirt hat.

Und die Lotze'sche Argumentation[1] pag. 58 würde mutatis mutandis ebensogut auf „*einander nicht schneidende Kurven*“ anwendbar sein, wo seine sonstigen Einwendungen wegfielen. Auch hier würde es wol unmöglich sein, ein „positives“ gemeinsames Merkmal zu abstrahiren. Ein „negatives“ aber, genauer: die Abwesenheit eines bestimmten (anerkannten) Merkmals, will Lotze eben nicht als Merkmal gelten lassen. Vergl. hiezu § 16.

Von seinem Standpunkte aus, auf den ich mich soeben stellte, um ihn mit seinen eigenen Gründen zu widerlegen, hätte also auch dieser letztere Begriff keinen Inhalt und existirte doch unzweifelhaft seinem Umfange nach, als Klasse; und als solcher wäre er auch (schlechthin oder in anderweitig noch enger begrenzter Auffassung) für die Geometrie ganz unentbehrlich.

Von einer Logik des Inhaltes müssten (darnach also) ganz unentbehrliche Begriffe ausgeschlossen bleiben und hätte solche keinen

Anspruch darauf, mit ihren Gesetzen unser ganzes Denken zu umfassen, oder die erforderliche Allgemeinheit zu besitzen.

Übrigens steht es auch gar nicht so schlimm um die Einseitigkeit eines Studiums der blossen Begriffsumfänge (ohne Rücksicht auf den Inhalt der zugehörigen Begriffe) — aus dem Grunde, weil sich zeigen wird, dass bestimmten Umfangs*verhältnissen* der Begriffe (wo solche vorhanden) allemal die „umgekehrten" Verhältnisse zwischen ihren Inhalten parallel gehen, z. B. einer Überordnung hier eine Unterordnung dort.

Es wird also das eine zwar unbehelligt vom andern dennoch grossenteils zugleich mit ihm erledigt. Und die Frage: ob Logik des Inhalts oder des Umfangs? müsste darnach sogar für irrelevant erklärt werden, hätte sich nicht jene durch die Anforderung, u. a. immer nur *begrifflich* bestimmte Subjektklassen zu bilden, ganz übermässig eingeschränkt gesehen, und wäre sie nicht in Reaktion gegen solche Einengung notgedrungen allemal über ihre Grenzen hinaus getreten, und — inkonsequent geworden! [Konsequenterweise könnte z. B. die Logik des Inhalts partikulare Urteile überhaupt nicht bilden — es sei denn als identische oder „nichtssagende" Urteile — vergl. die Ausführungen am Schlusse des § 44.]

Was eine „Klasse" ist, scheint auch viel leichter zu begreifen, als der Komplex der psychologischen Motive, welche zu ihrer Aufstellung Veranlassung bieten könnten. Stellte man letztere, d. i. eben den „Inhalt" des zugeordneten Begriffes (falls anerkannt werden mag, dass es einen solchen gibt) in den Vordergrund der Betrachtung und begänne, dergleichen Motive selbst aufzuzählen, so vermöchte niemand vorab zu ersehen, ob nicht die Wissenschaft noch ganz andere Motive zur Klassenbildung dereinst aufdrängen wird, als diejenigen sind, die man heutzutage als einen regelrechten Begriff konstituirend gelten lassen will. Wie schon unter v_2) angedeutet und in Einstimmung mit Dedekind[1] pag. 2, Fussnote können wir es nicht als berechtigt anerkennen, dass man der Freiheit der Begriffsbildung irgend welche Schranken von vornherein auferlege.

Gerade indem sie die Klasse als eine möglicherweise auch ganz willkürlich zusammengesetzte — um nicht zu sagen „zusammengewürfelte" — in's Auge fasst, wird die Logik der *Klassen*, unter denen von selbst auch die Umfänge aller Begriffe mit figuriren, eine wesentlich höhere Allgemeinheit erzielen als jede Logik, welche von vornherein nur von den Inhalten der Begriffe handeln will.

Das letzte Wort über die Frage dürfte der *Erfolg* zu sprechen

haben; und hier scheinen mir zunächst die jahrtausendlangen Bemühungen, von der Betrachtung des Begriffs*inhaltes* aus die Logik in ein gesund fortschreitendes Wachstum zu bringen, gescheitert.

Schlagender dürfte dies kaum zu konstatiren sein, als es von einem der heftigsten Gegner der Umfangslogik selbst geschieht, nämlich von Prantl, indem dieser in der Vorrede zum 4ten Bande seines Riesenwerkes[1] als den Hauptgewinn seiner eingehenden Studien über die Logik-Erzeugnisse von mehrern der neueren und neuesten Jahrhunderte mit drastischen Worten den hinstellt, dass Andere all' den Wust nun nicht mehr durchzulesen brauchen! Sollte da die Disziplin nicht fortgesetzt doch auf dem Holzwege gewesen sein?

δ_3) Ich möchte hiernächst noch einem Vorurteile entgegentreten, welches der Aufstellung einer „Logik des Umfanges" entgegensteht.

Es ist besonders in Deutschland bei geistreichen Philosophen Mode geworden — und neuerdings in verstärktem Maasse*) — die Versinnlichung von Begriffsumfängen durch die Euler'schen Kreise (vergl. § 3) eine *dürre* oder *öde* zu nennen, überhaupt von der Betrachtung der Umfangsverhältnisse als von etwas *Trockenem*, *Langweiligen* oder *Unfruchtbaren* mit einer gewissen Geringschätzung zu sprechen, und vollends einen auf diese Betrachtung gegründeten *Kalkul* als einen *toten Formalismus* oder *leeren Schematismus* zu qualifiziren, solchen von vornherein zu verdammen.

Die Frage, ob dem wirklich so ist, scheint mir von ganz kapitaler Bedeutung zu sein und es besonders im Interesse der *deutschen* Philosophie zu liegen, dass derselben auf den Grund gegangen werde.

Bei dem Versuche, dies zu thun, wende ich mich nicht an Diejenigen, die (vielleicht mehr oder minder bewusst) solche Äusserungen im Grunde blos als einen Deckmantel, eine scheinbare Rechtfertigung für ihre Bequemlichkeit benutzen, zufolge deren sie die Mühe scheuen, welche es unvermeidlich kostet, in den Geist einer konsequent aufgebauten, exakten Wissenschaft einzudringen, die Herrschaft über einen Kalkul sich zu erringen. Diese würden, weil ihnen die Überzeugung unwillkommen, auch schwerlich zu überzeugen sein.

Denjenigen aber, die unbeeinflusst von solch' persönlichem Motive aufrichtig meinen, dass die Sache sich also verhalte, möchte ich folgende Betrachtung nahe legen.

Bringen wir uns einmal zum Bewusstsein, was denn eigentlich

---

*) Es würden sich eine Menge Citate beibringen lassen; ich halte mich aber durch das „nomina sunt odiosa" gerechtfertigt, wenn ich möglichst davon abstehe, solche Beispiele anzuführen, die vielleicht als eine persönliche Invektive aufgefasst werden könnten.

Selbstverständlich indess sind zu obigem auch erfreuliche Ausnahmen zu konstatiren.

vor sich geht beim *Zählen* (der Einheiten einer Menge). — Wenn ich z. B. die Herrn, die hier auf einer Bank vor mir sitzen, zähle, so *bilde* ich *einen jeden* derselben einfach *mit einem Striche* (1) *ab*. Damit das entstandene Bild — sagen wir 11111 — nicht als eilftausendeinhunderteilf gelesen werde, verbinde ich die Striche (Einer) mit dem Zeichen plus. Ich erhalte so ein Schema:

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

und ist es für die Zwecke unsrer Betrachtung nebensächlich, dass für dasselbe auch ein einfacheres Zeichen: 5, nebst zugehörigem Namen eingeführt ist.

Im Grunde ist es also eine *äusserst rohe* Art von *Abbildung*, die wir beim Zählen vornehmen (die Abbildung der Einheiten oder Individuen der Menge blos nach ihrer „Häufigkeit“ oder „Anzahl“) — eine Abbildung, die hinsichtlich ihres Gehaltes bei weitem nicht heranreicht an diejenige, welche der Stift des Zeichners, die Kamera des Photographen, der Pinsel des Malers hervorzubringen vermöchte, von dem Meissel des Bildhauers zu geschweigen, durch welche ja nicht blos die Anzahl, sondern vielleicht die ganze äussere Erscheinung, ja allerhand charakteristische Eigentümlichkeiten der Haltung und der geistige Ausdruck der Gesichtszüge der abgebildeten Persönlichkeiten zur Darstellung kämen. Noch weniger kümmern wir uns bei unserm Abbildungsverfahren um diejenigen Verhältnisse, die den Menschen am meisten vom Menschen zu interessiren pflegen. Von den Anlagen, Kenntnissen und Fertigkeiten, von dem ganzen Charakter der abgebildeten Personen — nicht zu reden von ihren Vermögensverhältnissen (!), die ja von andrer Seite auch wiederum der Darstellung durch Zahlen zugänglich wären — wird einfach abstrahirt. Von der Abstammung und sozialen Stellung, von der Vorgeschichte eines Jeden, seinen Aussichten für die Zukunft . . . von allem, was das Wesen seiner Persönlichkeit ausmacht, wird abgesehen; es wird, sofern es auch bekannt sein sollte, beim Zählen gelöscht, ignorirt.

Welcher gemüt- und phantasievolle Denker möchte sich angesichts dessen nicht versucht fühlen etwa zu sagen: „Natürlich haben auch die Zahlenverhältnisse ihren Wert; aber wo man diesen bedürfen wird, ist er nicht so schwierig zu ermitteln, um sich seiner nicht nebenher augenblicklich zu bemächtigen; *einen Hauptgesichtspunkt für die Betrachtung der Dinge aus ihren Zahlenverhältnissen zu machen halte ich für ebenso unfruchtbar* (irrig) *als langweilig*“*)!

*) Vergleiche einen analogen Ausspruch Lotze's in Bezug auf die begriff-

Langweilig, trocken, dürr etc.? — Vielleicht ja! — Man kann es auch heute noch niemand verwehren, die Arithmetik (als die Wissenschaft, die sich mit den Zahlenverhältnissen beschäftigt) langweilig zu finden. Es thun dies aber zumeist nur Solche, die entweder einen recht schlechten Elementarunterricht genossen oder sich überhaupt nicht der Mühe unterzogen haben, dieselbe kennen zu lernen.

Unfruchtbar? — Nein! — Es dürfte doch heutzutage wol niemand mehr es wagen, die Analysis und Mathematik, die Lehre von *Zahl* (*und Maass*), die messende und rechnende Physik, der Unfruchtbarkeit zu zeihen.

Und dennoch bleibt die Thatsache der Rohheit unsres Abbildungsverfahrens, welches bei jedem Zählen allemal bethätigt wird, bestehen; dennoch ist die ungeheure Dürftigkeit, welche auch der Ermittelung *metrischer* Beziehungen notwendig anhaftet, ganz unverkennbar, und selbst die Geometrie, indem sie noch die „gestaltlichen Verhältnisse" der Dinge in den Bereich ihrer Betrachtung zieht, ist doch unleugbar einseitig, sieht von den allerinteressantesten Eigenschaften der raumerfüllenden Substanz armselig ab.

Wie sind dabei nun die grossartigen Erfolge zu begreifen, die in einer (die Unterbrechungen eingerechnet) allerdings mehrtausendjährigen Geschichte gerade jene Wissenschaften thatsächlich errungen haben (und mit der Zeit nur immer reichlicher zu verwirklichen scheinen), welche sich die Erforschung der Gesetze der Dinge nach Zahl und Maass zur Aufgabe stellten?

Die Antwort gibt das alte Gleichniss von dem Bündel Pfeile, welches allen Versuchen, dasselbe zu zerbrechen, als Ganzes widerstand und sich erst Demjenigen ergab, der dasselbe auflöste, die Pfeile einzeln zu knicken:

Die Schwierigkeiten, welche dem Fortschritt der Erkenntniss entgegenstehen, sind auch nur einzeln zu überkommen, und gerade in ihrer Einseitigkeit, in der durch sie verwirklichten *Teilung der Arbeit* liegt das Verdienst und die Kraft der erwähnten Disziplinen.

In ebendiesem Sinne dürfen wir auch die unsrer Logik der Umfangsverhältnisse zur Last gelegte Einseitigkeit als einen *Vorzug* derselben in Anspruch nehmen. Indem die ältere Logik solche Einseitigkeit verschmähte, ist sie in den Jahrtausenden verhältnissmässig stehen geblieben, das Sprichwort illustrirend: qui trop embrasse, mal étreint.

lichen Umfangsverhältnisse, den wir in § 15 citiren. Das Wort „unfruchtbar" fällt an andrer Stelle.

Versuchen wir — es ist hohe Zeit — es jetzt einmal ernstlich *mit* solcher Einseitigkeit und gehen über den Vorwurf der Dürftigkeit, die ja allerdings in gewissem Sinne mit solcher naturnotwendig verknüpft ist, sich aber durch intensivere Entwickelung in ihrem eigenen Bereiche, durch grossen, ja ungeahnten, Reichtum der Entfaltung in andrer Hinsicht ausgleicht, zur Tagesordnung über.

Nicht übergehen dürfen wir jedoch diese Frage:

War es denn aber auch *wahr*, dass die Zahlenverhältnisse der Dinge gar „nicht so schwierig zu ermitteln seien, um sich ihrer (im Bedarfsfalle) nicht nebenher augenblicklich zu bemächtigen?" Sind nicht vielmehr in der That Generationen scharfsinniger Forscher in unermüdlicher Arbeit fort und fort in Anspruch genommen, nur um dieser Zahlenverhältnisse sich immer mehr zu bemächtigen?

Und was zeigt sich nun auch in Bezug auf die Begriffsumfänge beim Vordringen auf unserm „einseitigen" Pfade?

Es zeigt sich, dass schon diese „dürftigen" Umfangsverhältnisse durchaus nicht so einfach zu übersehen sind, wie man anfangs sich einbilden mochte, ferner dass selbst bedeutende Philosophen in Fehler darin verfallen sind, und dass sich schwierige Probleme zur Lösung darbieten. Wer letzteres mit Aussicht auf Erfolg bestreiten wollte, der müsste wol erst einmal die in diesem Buch als noch ungelöst signalisirten Probleme lösen!

Ganz Zutreffendes über die vorliegende Frage sagt F. A. Lange auf p. 18 seiner citirten Schrift[1], wo er Ueberweg's Stellungnahme gegen die schematisirende formale Logik geisselt. Der sehr beachtenswerte Passus lautet:

„Wie nahe übrigens Ueberweg in Folge seines ungemeinen Scharfsinns, seinem eigenen erkenntnisstheoretischen Vorurteil zum Trotz, an die richtige Auffassung der logischen Technik streifte, zeigt eine zum § 84 (S. 234) gehörige Anmerkung, welche speziell gegen die geringschätzige Art gerichtet ist, in der Hoppe (Logik, Paderborn 1868) von dem »Denken nach dem Schema« redet im Gegensatz zu einem angeblichen Denken nach dem Begriff. Hier sagt Ueberweg wörtlich: »Mit gleichem Recht könnte man die mathematisch-mechanische Betrachtung als einseitig und willkürlich schelten, wenn sie untersucht, was aus gewissen einfachen Voraussetzungen folgt und dabei von andern Datis absieht, von denen jene in der Wirklichkeit nicht abgesondert vorzukommen pflegen, wenn sie z. B. die Bahn und die Stelle des Falls eines irgendwie geworfenen Körpers nur auf Grund der Gravitation und der Beharrung berechnet, ohne den Miteinfluss des Luftwiderstandes zu erwägen, sodass anscheinend die konkrete Anschauung das Resultat genauer zu bestimmen und über die Rechnung zu triumphiren vermag; wollte aber die mathematische Mechanik jenes abstraktive Verfahren nicht üben, so würde sie die Bewegungs*gesetze* über-

haupt nicht zu erkennen vermögen und die Wissenschaft würde aufgehoben sein.« Es folgt die in der That schlagende Anwendung auf die Logik. Wer in ähnlicher Weise das abstrakte Verfahren der Logik von der Realität aus korrigiren will, »hebt durch dieses Verfahren nicht eine falsche Logik zugunsten einer bessern, sondern die Möglichkeit einer methodisch fortschreitenden logischen Erkenntniss der Denkgesetze selbst auf.«"

Erst nach beendeter Untersuchung über das, was aus den Umfangsverhältnissen der Begriffe schon allein folgt, wird die wissenschaftliche Theorie des Denkens auch andere Momente mit in Betracht ziehen dürfen. Wer freilich sich an ein gerade vorliegendes Beispiel hält und solches anderweitige Wissen, den nicht auf Umfangsverhältnisse bezüglichen Gehalt desselben, mit hinzunimmt, kann wol ein volleres Resultat zu besitzen glauben und auf den Logiker herabsehen, der sich mit dem dürftigen Schema des Umfangsverhältnisses plage. Allein Der wird auch stets am Beispiel hängen bleiben und sich ohne die Reflexion auf diese Verhältnisse, welche durch das Abstrahiren von allem übrigen bedingt ist, niemals zur Erkenntniss des allgemeinen Denkgesetzes erheben (vergl. Ueberweg l. c. mutatis mutandis).

So wird es auch Demjenigen, der ein Gemälde nach den Regeln der Perspektive beurteilt, nicht zu verargen sein, wenn er die Abstufungen der Farbentöne und die dem Bilde zugrunde liegende Idee des Künstlers dabei ausser Acht lässt. Soll das Bild gut sein, so muss vor allem die „dürftige" Zeichnung, die wieder übermalt wird, jenen Gesetzen genügen. (Vergl. De Morgan[5] p. 83.)

Wenn gar aber Lotze seine Logik mit dem Wunsche schliesst, dass die deutsche Philosophie zu dem Versuche sich immer wieder erheben werde „den Weltlauf zu *verstehen* und ihn nicht blos zu *berechnen*", so ist zu sagen: könnten wir ihn nur erst *berechnen*! dann würden wir gewiss ihn auch „verstehen", soweit überhaupt ein Verständniss auf Erden erzielbar.

ε_3) Den Begriffen wird ihre Bildungsweise vorgeschrieben durch das „*Urteil*". Durch das Urteil wird ausnahmslos einem Subjekte ein Prädikat beigelegt, zugeschrieben oder aber abgesprochen.

Für die komplizirteren Fälle, in welchen das Urteil sich aus Teilsätzen zusammensetzt, die durch Konjunktionen verbunden sind, behalten wir uns vor, dies in der Theorie erst genauer darzulegen; in solchen ist das Subjekt selbst ein Urteil, eine Aussage. In den einfacheren Fällen treten zumeist anderweitige Objekte des Denkens als Subjekt auf.

Dies Subjekt ist entweder ein Einzelding — und als solches ohnehin ein Begriff — oder es ist eine Klasse von Einzeldingen, und auch diese erscheint gewöhnlich zusammengehalten und bestimmt durch das Band eines ihre Individuen verknüpfenden Begriffes. Das Urteil *bejaht* dann, oder *verneint*, das Prädikat von allen Individuen dieser Klasse und damit zugleich von ihrem Begriffe.

Soferne das Urteil anerkannt, zur Überzeugung erhoben, adoptirt wird — und dies zu werden ist der letzte, der Endzweck aller Urteile, welcher nur vorübergehend durch den mittelbaren Zweck einer blos provisorischen Annahme des Urteils verdrängt zu werden vermag — erfüllt es alsdann folgende Mission, Bestimmung.

Sofern es *bejahte*, begründet es hinfort, wird es zum Ausgangspunkt für — eine Gewöhnung des Geistes, die Merkmalgruppe des Subjektbegriffes (und damit zugleich eines jeden seiner Individuen) stetsfort zu verknüpfen mit den Merkmalen des Prädikatbegriffes, die letztere geradezu in den Subjektbegriff selbst aufzunehmen und als einen integrirenden Bestandteil seines Inhaltes mit diesem zu verschmelzen.

War solche mentale Gewöhnung schon ehe das Urteil fiel vorhanden, so erscheint dasselbe als überflüssig, oder es dient doch nur dazu, gedachte Gewöhnung zum Bewusstsein zu bringen, in diesem wieder aufzufrischen und zu festigen.

Sofern das Urteil *verneinte*, beugt es jedenfalls der genannten durchgängigen Verknüpfung vor.

Im übrigen lässt der Sinn und die Tragweite der sog. „verneinenden" Urteile verschiedene Auffassungen zu (als negativ prädizirende oder aber negative), in Bezug auf welche ich mich in Gegensatz zu Sigwart werde stellen müssen. Die Kontroversen können nicht kurzerhand vorweg abgemacht werden und ist in ihrem Betreff auf die Theorie (7[te] Vorlesung) zu verweisen. Es wird sich zeigen, dass, was wir — um den streitigen Fragen hier noch auszuweichen — nunmehr im Hinblick auf die bejahenden Urteile sagen werden, sich auch auf die „verneinenden" übertragen lässt.

Das Prädikat ist selbst ein Begriff. Und dieser ist, wenn nicht mit dem Subjektsbegriffe „identisch", so allemal ein „höherer" Begriff, die Prädikatklasse dann der Subjektklasse „übergeordnet".

Psychologisch jedoch ist es nicht erforderlich das Prädikat überhaupt als eine *Klasse* zu denken.

Wenn ich z. B. sage (cf. Mill[2] pag. 113, 117) „Schnee ist weiss", so will ich dies von irgend welchem, von *allem* Schnee gesagt haben, und ist es richtig, dass aller Schnee enthalten ist in der Klasse der „weiss" zu nennenden Dinge. Thatsächlich brauche ich aber bei jener Aussage an sonst nichts Weisses zu denken und will ich in der That damit nur kundgeben, dass in meiner Vorstellung vom Schnee das Merkmal der „Weisse" ein Element bildet, dass er mir die Empfindung erregt, die (durch Abstraktion von irgend welchen weissen Dingen gewonnen) als die Vorstellung von „weiss" ein isolirter und bleibender Besitz meines Geistes geworden ist. Die analoge Betrachtung in Bezug auf den Satz: „Blut ist nicht weiss (sondern rot)" durchzuführen überlassen wir dem Leser.

Wir heben dies ausdrücklich hervor, um uns gegen den Vorwurf

zu verwahren, als ob wir den Umstand übersehen hätten, wenn wir späterhin aus Gründen wissenschaftlicher Zweckmässigkeit auf das Verhältniss zwischen der Subjekt- und der Prädikat*klasse* vorwiegend reflektiren, die beiden Begriffe gleichwol nach ihren Umfangsbeziehungen ins Auge fassen.

Aus alledem wird zunächst ersichtlich sein, wie die Urteile bezwecken, auf die (definitive) Gestaltung der Begriffe hinzuarbeiten und einzuwirken.

Ich will nunmehr noch den Gedankengang Herrn Charles S. Peirce's darlegen, durch welchen er in der Einleitung zu seiner grundlegenden Arbeit[5] das Wesen der Urteile und auch der *Schlüsse* von einer neuen Seite beleuchtet. Damit werden wir dann auch auf die Frage nach dem Wesen der *Folgerichtigkeit* der letztern zurückkommen. Indem ich hinsichtlich des Wortlautes auf pag. 15 sqq. der Peirce'schen Schrift verweise, darf ich mich seiner Betrachtungsweise in *freier* Reproduktion anschliessen und mir auch kritische Zwischen- und Zusatzbemerkungen gestatten.

ζ_3) Denken — sagt Peirce ungefähr — Denken *als Gehirnthätigkeit* („cerebration") ist ohne Zweifel den allgemeinen Gesetzen der Nerventhätigkeit (nervous action) unterworfen.

Es erscheint darum gerechtfertigt, zunächst einmal die letztere im allgemeinen zu betrachten.

Wenn eine Gruppe von Nerven gereizt (erregt, stimulirt) wird, so werden die Nervenknoten (Ganglien), mit denen die Gruppe im engsten Zusammenhange steht, — und schliesslich das Centralorgan des Geistes selbst — in einen Zustand der Thätigkeit versetzt, welcher seinerseits nicht selten Bewegungen des Körpers veranlasst.*) Wenn der Reiz (the stimulation) fortdauert, verbreitet sich die Erregung (irritation) von Ganglion zu Ganglion, gewöhnlich dabei anwachsend. Bald auch beginnen die zuerst erregten (excitirten) Nerven Ermüdung zu zeigen, und so ist aus doppeltem Grunde die körperliche Thätigkeit von einer wechselnden Art. Wenn die Reizung beseitigt wird, hört auch meist die Erregung rasch auf.

Aus diesen Thatsachen geht hervor, dass wenn ein Nerv affizirt wird — solange bis die Stimulation unangenehm wirkt — die Reflexthätigkeit, wenn sie nicht von vornherein von solcher Art ist, den

*) Man denke z. B. an das Hinblicken auf eine auffallende (Licht-)Erscheinung im Gesichtsfelde, an das Blinzeln, Ausweichen bei drohendem Stoss, das Schlagen nach dem Insekt bei Mosquitostich und dergleichen.

Reiz zu beseitigen, ihren Charakter wieder und wieder verändern wird, bis der Reiz beseitigt ist, und darnach erst wird diese Thätigkeit aufhören.

Nun haben alle Lebensprozesse eine Tendenz und die Fähigkeit durch *Wiederholung* (repetition) leichter zu werden — innerhalb gewisser Grenzen wenigstens, deren Überschreitung als Übermüdung, Überanstrengung, beziehungsweise Altersabnahme und -schwäche zu bezeichnen wäre. Längs was immer für einem Pfade eine nervöse Entladung (a nervous discharge) einmal gegangen ist, längs ebendieses Pfades wird eine neue der vorigen gleichartige Entladung um so leichter und wahrscheinlicher wieder stattfinden. Es beruht auf dieser allbekannten Thatsache der Nutzen und Erfolg der *Übung*.

Demgemäss wenn eine Nervenerregung wiederholt wird, so sind alle die verschiedenen Thätigkeiten, welche bei vorhergegangenen ähnlichen Veranlassungen stattgefunden haben, in der günstigeren Lage, auch jetzt wieder stattzufinden, und zwar werden diejenigen am ehesten wieder eintreten, welche am häufigsten stattgefunden haben bei jenen vorausgegangenen Veranlassungen. Nun mögen die verschiedenen Handlungen, welche die Reizung nicht beseitigten, vorher manchmal ausgeführt worden sein und manchmal nicht; aber diejenige That, welche die Reizung beseitigt, muss am häufigsten ausgeführt worden sein, weil die Einwirkung in der Regel fortgedauert haben wird bis sie vollzogen wurde.*) Darum muss eine starke *Gewöhnung* daran, der gegebenen Reizung auf diese besondre Weise zu begegnen, rasch sich ausbilden.

Eine so erworbene Gewohnheit kann auch als eine Disposition, eine Anlage zu ihrer Ebenfallserwerbung weiter vererbt werden — sagt Peirce ungefähr; dies dürfte jedoch als eine von der Physiologie noch nicht völlig entschiedene Frage zu bezeichnen sein und wird bekanntlich solches von einer Autorität wie die des Herrn *Weismann* entschiedenst bestritten.

η_3) Zu unsern wichtigsten Gewohnheiten gehören diejenigen, kraft deren gewisse Klassen von Antrieben oder Reizungen uns zuerst in eine blos geistige, physiologisch betrachtet, blos cerebrale oder Hirnthätigkeit versetzen.

---

*) Es dürfte fraglich erscheinen, ob wirklich der angeführte Grund der ausschlaggebende ist, ob nicht vielmehr das Residuum, welches die vorangegangnen Erlebnisse, in Gestalt der Erinnerung an die früher erfolgreich gewesene Thätigkeit, im Geist und seinem Organe hinterlassen, dabei wesentlich mitwirkt (unter der Konkurrenz einer Gewohnheit, als vergeblich Erkanntes nicht wieder zu versuchen).

Der Anblick eines hübschen Gegenstandes z. B. mag den Wunsch erzeugen, denselben zu besitzen, welcher in dem Vorsatz gipfelt, bei nächster Gelegenheit sich seinesgleichen zu kaufen.

Sehr oft aber ist es auch nicht eine äussere Empfindung, ein Sinneseindruck (an outward sensation), welcher den Gedankengang in Fluss bringt (which starts the train of thought), sondern die Reizung, statt *„peripherisch"* zu sein, ist *„visceral"* (aus den Eingeweiden, aus dem Innern des Leibes stammend).

So wenigstens Peirce. Für diese für ihn charakteristische Ausdrucksweise scheint mir aber eine Modifikation wünschenswert zu sein. Gemeinhin möchte man wol die eigentlich oder im engeren Sinne „visceralen" Reize — wie Hunger, Geschlechtstrieb, Kopfweh — mitsamt den peripherischen Sinneseindrücken als *physische* Antriebe gegenüberstellen den *psychischen*, von denen Peirce nunmehr reden will, im Hinblick wenigstens auf die Hirnthätigkeit, die sie begleitet.

Solche Antriebe zu Denkhandlungen oder wirklichen Thaten, wie sie als Hass, Liebe, Furcht etc. und namentlich, durch den Stand unsrer Einsicht bedingt, als Beweggründe (Motive) mannigfachster Art, wie Eigennutz, Selbstsucht, Pflichtgefühl, Gemeinsinn, in unserm Bewusstsein existiren, zu den „visceralen" (vielleicht Unterabteilung der grosshirnig-cerebralen) Reizungen zu rechnen, dürfte doch etwas gewagt erscheinen und überhaupt nur angängig sein, sofern man einseitig lediglich die Zustände oder Vorgänge in's Auge fasst, welche im (als „wirklich" supponirten) Nervensystem den Bewusstseinsvorgängen — nach heutigem Stand der Physiologie — parallel gehen. Hierauf allerdings hat Peirce von vornherein schon hingewiesen durch die Bemerkung, dass er das Denken (nur) „as cerebration" betrachten wolle. Nunmehr führt er fort:

In solchem Falle hat die Thätigkeit in der Hauptsache denselben Charakter: eine innere Thätigkeit beseitigt die innere Reizung. Eine vorgestellte Konjunktur von Umständen veranlasst uns dazu, eine geeignete Richtschnur des Handelns (line of action) vorzustellen.

Man findet, dass solche Vorkommnisse, auch wenn keine äussere Handlung eintritt, doch in hohem Maasse dazu beitragen, dass in uns eine Neigung, Gewohnheit sich ausbilde, wirklich auf die vorgestellte Weise zu handeln, wenn die vorgestellte Gelegenheit annähernd eintritt.

Eine cerebrale Gewöhnung (Gewohnheit? — „cerebral habit") der höchsten Art, welche für eine unabsehbare Reihe von Gelegenheiten bestimmen wird, sowol, was wir in Gedanken, als was wir in Wirklichkeit thun, wird ein *„Glaube"* genannt.

Peirce sagt durchweg „belief", nicht *Überzeugung*, conviction, oder Meinung, Ansicht, opinion, view. Wegen der Schwierigkeit, die spezifisch religiöse Nebenbedeutung („faith"), mit welcher (im Deutschen) das Wort „Glaube" behaftet erscheint, nicht unnötig in den Vordergrund treten zu

lassen, würde ich das Wort „Überzeugung“ vorziehen, wenn nicht dieses seinerseits wieder eine zu enge Bedeutung hätte, indem es auf ein schon ganz feststehendes, über jedes Zweifeln erhabenes Glauben hinzuweisen pflegt. Das Wort „ein Glaube“ soll hier nur irgend etwas, was jemand eben glaubt, bezeichnen.

Bringen wir es uns *zum Bewusstsein*, dass wir eine spezielle Gewöhnung (specified habit) dieser Art *haben*, so vollziehen wir ein „*Urteil*“ (judgment).

Unter Umständen möchte ich vorziehn zu sagen: ... dass wir sie erwerben, sie begründen oder fortan *haben werden*. Indessen hat Herrn Peirce's Ausdrucksweise hier den Vorzug, für alle Fälle wenigstens zuzutreffen, wenn sie dafür auch nicht alles erschöpfen dürfte, was im Urteil liegen kann.

Zum Beispiel: schliessen wir uns dem Urteil an: „der Mars ist von intelligenten Wesen bewohnt“ (wie dies neuerdings sehr wahrscheinlich geworden ist), so konstatiren wir (für uns und Diejenigen, die wir etwa durch den Hinweis auf die schnurgeraden Kanäle von Sciaparelli's areographischer Karte ebendavon überzeugen oder überreden) — eventuell bebeginnen und festigen, *gewinnen* wir damit eine *Gewohnheit*, die Oberfläche jenes (die Erde an Alter wol weit übertreffenden) Planeten belebt zu denken mit Wesen, die auf die Umgestaltung dieser Oberfläche, ja auf die Konfiguration des Festlandes dortselbst zweckbewusst und mit erfolgreicher Technik einwirkten. —

Es tritt, wie mir scheint, auf diesem, dem intellektuellen Gebiete die merkwürdige Thatsache hervor, dass oft ein Augenblick schon genügt (ein Augenblick, nämlich, des „Einleuchtens“), um die allerfestesten und unerschütterlichsten Gewohnheiten sich anzueignen, Gewohnheiten, die nicht selten mit äusserster Zähigkeit für's ganze Leben festgehalten werden.

Die Kraft, mit welcher eine Überzeugung so als eine Denkgewohnheit festgehalten wird, pflegt mehr oder minder vollkommen die reichliche Übung zu ersetzen, die sonst — auf dem Gebiet der äusseren körperlichen Thätigkeiten wenigstens und auch bei vorwiegend mechanischem Auswendiglernen — unerlässlich scheint zur Erwerbung und Festigung einer Gewohnheit. Die Intensität dieser Kraft erscheint mitbedingt durch den Grad der Evidenz; sie steigert sich nach Maassgabe, je deutlicher wir (einmal oder zu immer wiederholten malen) das im Urteil Gedachte als ein durch objektive Notwendigkeit zu denken Gebotenes zu erkennen glauben. Bei den unmittelbar einleuchtenden, „analytischen“ oder selbstverständlichen Wahrheiten ist die Tyrannei dieser Gewohnheit eine so grosse, dass man von vornherein gar nicht anders kann, als derselben huldigen. Der Begriff der Gewohnheit erhält in solchem Falle einen volleren Inhalt als gewöhnlich, den reichsten wol, der überhaupt ihm zukommen kann: sie artet in einen Grenzfall aus und fällt geradezu zusammen mit einem absoluten Zwange (der „Denknotwendigkeit“).

Eine Denkgewohnheit kann natürlich auch verhältnissmässig unwichtig und kurzlebig sein. Wer z. B. urteilt: „ich bin hungrig“, manifestirt damit eine Gewohnheit, sich, sooft er an seinen gegenwärtigen Zustand zurück-

denken mag, von Hungergefühl befallen zu denken — eine Gewohnheit indess, die meistens wieder verloren gehen wird, sobald darnach Sättigung stattgefunden.

In den meisten Fällen möchte das, was Peirce hier als das Bewusstwerden und den Anfang einer Denk*gewohnheit* hinstellt, vielleicht treffender als das Innewerden einer permanenten *Neigung* (wo nicht subjektiven Notwendigkeit) des Denkens bezeichnet werden. Doch mögen wir — nach dem Billigkeitsanspruche „sit venia verbo" — das Wort „Gewohnheit" immerhin cum grano salis beibehalten.

ϑ_3) Eine Glaubensgewohnheit (belief-habit) kann in ihrer Entwickelung damit beginnen, noch unentschieden, schwankend und schwach zu sein; sie vermag jedoch unbeschränkt zu werden: schärfer ausgeprägt, stärker und von weiterer Sphäre der Wirksamkeit — Peirce lässt sie anfangs unbestimmt, mit Besonderheiten behaftet und dürftig (vague, special and meagre) sein, hernach präziser, allgemeiner und vollständiger (more full) werden.

Der Vorgang dieser Entwickelung, *soweit er im Bewusstsein* (in imagination) *stattfindet*, heisst *Denken* (thought).

Urteile werden gebildet, und unter dem Einfluss einer Glaubensgewohnheit erzeugen sie oft ein neues Urteil, welches als ein Zuwachs zu dem Glauben erscheint. Ein solcher Vorgang wird *Schliessen* (an inference) genannt.

Das oder die vorangegangenen Urteile heissen die Voraussetzungen oder *Prämissen*, das nachfolgende Urteil der Schluss, die *Konklusion*.

Die Gewohnheit des Denkens, welche den Übergang von den ersten zu der letzten vermittelte und bestimmte, wenn als Satz formulirt zum Bewusstsein gebracht, heisst das „leitende Prinzip" (the leading principle) des Schliessens. (Beispiele weiter unten.)

Während aber dieser Prozess des Schliessens oder die spontane Entwickelung von Überzeugungen (des „Glaubens") fast beständig in uns vorgeht, erzeugen auch neue peripherische Reizungen immerfort neue Glaubensgewohnheiten.

Für unsre Kulturepoche glaube ich als einen höchst wesentlichen Teil dieser neuen Anregungen die durch Beispiel, Unterricht, Wort, Schrift, Druck und Bild bewirkte Mitteilung resp. Übertragung der Ansichten und Überzeugungen andrer Menschen, von Sachverständigen, Fachgenossen etc. doch ganz besonders hervorheben zu sollen.

So wird der Glaube (das Glauben) zum Teil durch frühere Überzeugungen bestimmt, zum Teil durch neue Wahrnehmungen.

Herrscht nun aber eine Gesetzmässigkeit in allen diesen Wandlungen?

Die Forschung besteht darauf (maintains), dass dies der Fall ist, nämlich dass sie alle hinsteuern auf *ein Endziel* (gerichtet, angepasst sind, are . . adapted to an end), nämlich das: den Glauben mit der Zeit gewissen vorbestimmten Erkenntnissen entgegenzuführen (that of carrying belief, in the long run, toward certain predestinate conclusions), welche die nämlichen sind für alle Menschen und welche bleiben.

Dies ist der „*Glaube*" (the faith) des Forschers.

Auf dieser stillschweigend angenommenen Thatsache beruhen alle Maximen des Überlegens (maxims of reasoning) und auf Grund derselben wird das, was zuletzt geglaubt werden muss, unabhängig sein von dem, was bisher geglaubt worden ist, und wird den Charakter der Wahrheit (reality) haben.

Kommt diese Wahrheit auch für den Einzelnen vielfach noch nicht zum Durchbruch, so wird sie doch (mehr und mehr auf jedem Gebiete) einst ihre Herrschaft entfalten für das Geschlecht. Der Glaube an ihre Erkennbarkeit, an ihren endlichen und definitiven (endgültigen) Sieg oder Triumph, liegt ganz gewiss der Forschung zugrunde und an der Verwirklichung dieses Ideals mitzuarbeiten schwebt jedem Forscher vor.

Diesen Glauben nimmt nun Peirce auch für den *Logiker* in Anspruch (dem Wortlaute nach sogar *nur* für diesen) und sagt:

Wenn darum eine gegebene Gewohnheit des Folgerns (a given habit, considered as determining an inference) von solcher Art ist, dass sie auf das gemeinsame Endziel hinwirkt (is of such a sort, as to tend toward the final result), so ist sie korrekt und andernfalles nicht. So zerfallen die Schlussfolgerungen (inferences become divisible) in *gültige* (the valid) und in *ungültige* (the invalid), und daraus schöpft die Logik ihre Existenzberechtigung.

Man sieht, dass hier Peirce dem Ergebnisse der Erkenntnisstheorie sozusagen teleologisch vorgreift.

Da nun diese Auffassung der Folgerichtigkeit die Ergänzung, deren sie bedürftig erscheint, durch Sigwart bereits gefunden hat — vergl. unter A der Einleitung die Absätze β) und $\zeta \ldots \iota$) — so glauben wir der Auseinandersetzung nach dieser Richtung nichts mehr hinzufügen zu sollen.

ι_3) Das Eigentümliche und Verdienstliche an dieser den Kern der Sache jedenfalls nahe streifenden Auseinandersetzung von Peirce scheint mir zu sein: die nachdrückliche Hervorhebung des Moments der *Gewohnheit* in Bezug auf das Urteilen (mit Überzeugung, das Glauben) sowol, wie auf das Folgern oder Schliessen.

Ein spezielles, individuelles Handeln kann niemals selbst als eine Gewohnheit bezeichnet werden; es kann, als ein *ein*maliges, höchstens zum Ausgangspunkt für eine solche werden oder ein Ausfluss einer

solchen sein. Gewohnheit (und Neigung, Disposition) ist etwas Gemeinsames, übereinstimmend Wirkendes in einer ganzen Klasse von Handlungen (die, sofern sie auch bei verschiedenen handelnden Personen verglichen werden, sogar unbegrenzt, eine offene Klasse sein mag und in Bezug auf den Einzelnen die gleiche Bezeichnung nur insofern nicht verdienen wird, als das Leben desselben eine unbegrenzte Menge von Handlungen überhaupt nicht in sich fassen kann); die Gewohnheit ist immer von einem mehr oder weniger *allgemeinen* Charakter.

Eine Gewohnheit veranlasst uns, unter ähnlichen Umständen auch immer ähnlich zu handeln, d. h. unter Umständen, die einander in einer bestimmten Hinsicht *gleichen*, stets Handlungen zu vollziehen, die wiederum in bestimmter (vielleicht in einer ganz andern) Hinsicht einander gleichen. Die zeitliche Succession der übereinstimmenden Merkmale jener Umstände und dieser Handlungen, wenn aus einem physiologischen Grunde erfolgend (und zugleich vielleicht durch ein psychologisches Motiv verursacht), macht das Wesen der Gewohnheit aus.

In den verschiedenen Fällen, in denen „dieselbe" Gewohnheit wirksam ist, werden darnach die „spezifischen Differenzen" zwischen den Gruppen jener Umstände sowol als auch zwischen diesen Handlungen nebensächlich, ohne Belang sein.

Gelingt es, die übereinstimmenden Merkmale (eventuell auch nur „wesentliche" von diesen Merkmalen) jener Umstände und dieser Handlungen in Zeichen darzustellen, bei denen jene spezifischen Differenzen unausgedrückt bleiben, offen gelassen werden — m. a. W. vermögen wir nur den „Begriff" der Umstände, unter welchen gedachte Gewohnheit wirkt, und den „Begriff" der Handlungen, die sie dann hervorruft, darzustellen, so werden wir ein *Schema* für die Gewohnheit erhalten: *sooft Umstände* (von den Merkmalen) *A eintreten, thun wir B* (vollziehen eine Handlung von den Merkmalen *B*).

Jede Gewohnheit muss so ein *allgemeines Schema* haben.

Als Umstände haben wir jetzt hauptsächlich Zustände des Bewusstseins und zwar besonders *Meinungen*, als Handlungen ebenso vorzugsweise Denkhandlungen, *die Bildung neuer Meinungen* im Auge.

Es wurde erkannt, dass solche Meinungen wesentlich selbst schon Gewohnheiten im Denken sind oder zu solchen werden.

$\varkappa_3$) Aus solchen, den „Prämissen" p kann sich eine neue Denkgewohnheit und Meinung entwickeln: die „Konklusion" c. (Vergleiche wieder Peirce l. c.)

„Es gilt *p*, ergo gilt auch *c*“, oder abgekürzt:

„*p*, ergo *c*“

ist darum das Schema jeder Folgerung.

Die Konjunktion „ergo, folglich, also (therefore)“ ist das Zeichen des Schliessens (sign of illation).

Der Übergang von der Prämisse (oder dem System der Prämissen, set of premises) *p* zu der Konklusion *c* findet beim Schliessen statt gemäss einer in uns wirksamen Denkgewohnheit oder Regel.

Obwol diese das Folgern beherrschende oder „leitende“ Gewohnheit gewöhnlich nicht vom Bewusstsein objektivirt wird (is not present to the mind), sind wir uns doch bewusst, nach einem allgemeinen Prinzip (on „some“ general principle) zu schliessen.

Alle Schlussfolgerungen, welche ebendiese Denkgewohnheit bestimmen würde sobald nur die geeigneten (d. i. die unter den ersten Teil ihres Schemas fallenden) Prämissen zugelassen wären (when once the proper premises were admitted), bilden eine Klasse. Und die Denkgewohnheit ist vom Standpunkt der Logik eine *gute* zu nennen, wenn sie niemals (oder im Falle eines Schlusses nach der Wahrscheinlichkeit, in case of probable inference, selten) von einer wahren Prämisse zu einer falschen Konklusion führen würde; andernfalles ist sie *verwerflich* (logically bad). M. a. W. Jeder denkbare Fall der Wirksamkeit einer *guten* Gewohnheit des Schliessens würde entweder ein solcher sein, in welchem die Prämisse falsch, oder ein solcher, in welchem die Konklusion wahr ist. Wogegen, wenn eine solche Gewohnheit schlecht ist, Fälle denkbar sein würden, in welchen die Prämisse wahr ist, während die Konklusion falsch bleibt.

Wir sahen, dass eine jede Gewohnheit ein allgemeines Schema haben muss. Dies gilt mithin auch von einer Denkgewohnheit, welche beim Folgern wirksam ist, das Ziehen von Schlüssen beherrscht: dieselbe wird sich allemal durch einen Satz darstellen lassen, dass ein Urteil (proposition) *C* von einer gewissen allgemeinen Form, welches in einer bestimmten Beziehung steht zu einem Urteil (oder einer Gruppe von Urteilen) *P* von ebenfalls allgemeinem oder schematischem Ausdruck, wahr sein muss, sobald dieses letztere wahr ist.

Ein solcher Satz ist dann das *„leitende Prinzip“* der Klasse von Schlussfolgerungen, deren Gültigkeit (validity) es in sich schliesst (implies).

Wird der Schluss erstmalig gezogen, so pflegt (wie schon angedeutet) das leitende Prinzip, solchergestalt formulirt, dem Geiste

nicht gegenwärtig zu sein. Aber die Gewohnheit, deren Schema es darstellt, ist in einer solchen Weise wirksam, dass bei Vergegenwärtigung (upon contemplating) der angenommenen (believed) Prämissen durch eine Art Intuition (Wahrnehmung, perception) auch die Konklusion für wahr erachtet wird.

Mit diesen Worten „by a sort of perception" beruft sich auch Peirce auf das von Sigwart mit Recht stärker hervorgehobene, ja in den Vordergrund gestellte Bewusstsein der objektiven Denknotwendigkeit oder Gefühl der Evidenz.

Wenn hernach die Schlussfolgerung einer logischen Kritik unterworfen wird, so vollziehen wir eine neue Schlussfolgerung, deren eine Prämisse jenes leitende Prinzip der vorigen ist (gemäss welcher Urteile, die in bestimmter Beziehung zu einander stehen, geeignet erscheinen, Prämisse und Konklusion eines gültigen Schlusses zu sein), während die andere Prämisse eine Thatsache der Wahrnehmung (observation) ist, nämlich der Beobachtung, dass die genannte (gegebene) Beziehung wirklich besteht zwischen der Prämisse und der Konklusion der in Frage (under criticism) stehenden Schlussfolgerung, dass m. a. W. das Schema jenes leitenden Prinzips im vorliegenden Falle zutrifft, und woraus dann geschlossen wird, dass diese Folgerung berechtigt, gültig war.

Ein Beispiel, an das wir noch weitere Unterscheidungen anknüpfen, mag dies verdeutlichen. Wir wählen hier das folgende (obzwar sehr abgedroschene, weil fast in allen Schriften über Logik einmal erwähnte):

Cajus ist ein Mensch,	a ist ein b,
ergo: Cajus ist sterblich.	ergo: a ist c.

Das rechts dem Schlusse beigefügte „Schema" desselben zeigt, dass ihm (so wie er zunächst sich darstellt) *logische Gültigkeit* nicht zukommen kann. Es kann nicht eine (gute) Denkgewohnheit uns von einer Prämisse der Form „a ist ein b" hinüberleiten zu einer Konklusion „a ist c".

Dass vielmehr eine solche Gewohnheit, falls sie überhaupt bestünde, eine schlechte sein müsste, wäre leicht an beliebigen Beispielen darzuthun: indem wir dem a dieselbe Bedeutung „Cajus", dem b die „Mensch" wie in dem Beispiel belassen, brauchen wir etwa nur dem c die Bedeutung „unsterblich" (oder „vollkommen" und anderes) beizulegen, um die Haltlosigkeit des Schlusses zu erkennen. Die Folgerung wäre alsdann eine solche, deren Prämisse wir als richtig, deren Konklusion wir aber als falsch (mit einer gewissen Denknotwendigkeit) anerkennen müssen.

Gleichwol lässt sich die obige Konklusion sowol, als die Prämisse.

für richtig erklären, und die Schlussfolgerung besitzt darum das, was man die „extralogische Gültigkeit" derselben nennen könnte: sie ist „*materiell*" (aber nicht „formell") richtig.

Von der angeführten Prämisse *allein* konnte, wie gezeigt, eine Denknotwendigkeit die Konklusion hier nicht liefern. Da diese letztere aber richtig ist, so *kann* es dennoch eine gute Denkgewohnheit gewesen sein, die zu ihr hinführte (auch eine, die vom Gefühl der Denknotwendigkeit begleitet sein mag), aber dann von andern Prämissen aus, nämlich von einer Gruppe solcher, die aus der angegebenen durch geeignete Ergänzung, Vermehrung hervorgehen.

Thatsächlich wirkte bei obigem Schlusse noch etwas, eine Denkgewohnheit, mit, die uns zur richtigen Konklusion leitete, indessen als Prämisse unausgesprochen blieb. Man kann den Schluss gelten lassen als einen *unvollständigen*, als ein sog. „*Enthymem*".*)

In Enthymemen wird im gemeinen Leben sehr häufig geschlossen, wobei dem Verfahren die Tendenz der Abkürzung und die Höflichkeit zugrunde liegt, bei dem Hörer, dem man die erforderliche mentale Ergänzung des Schlusses zuschiebt, auch selbstthätige denkende Mitwirkung vorauszusetzen.

Bringen wir uns dieses (anfänglich eventuell unbewusst gebliebene) Agens zum Bewusstsein, so finden wir, dass es die Überzeugung war, dass *alle* Menschen sterblich seien.

Dieser Glaube, selbst eine Denkgewohnheit, wird von **Peirce** geradezu als das „leitende Prinzip" des vorliegenden Enthymems hingestellt — mit einer gewissen Berechtigung vielleicht, obwol nicht in dem sonst üblichen Sinne.

Fügen wir denselben ausdrücklich, als Urteil gefasst, der bis-

---

*) Es gibt auch Grenzfälle von Enthymemen, wo dieser Name sich als nicht mehr angemessen beanstanden lässt. Solche treten ein, wenn die ausdrücklich angeführte Prämisse (oder eine derselben) sogar als völlig belanglos, überflüssig zu erkennen ist, wenn man etwa die sämtlichen wirklich wirksamen Prämissen mit Stillschweigen übergangen findet. So z. B. bei dem auch „materiell" wenigstens richtigen „Schlusse" (?):

Vorgestern regnete es irgendwo
ergo: geht morgen die Sonne auf.

Die wirksamen Prämissen dieses Enthymems — falls man es noch so nennen will — würden etwa sein: Jeden Tag geht (in unsern Breiten) die Sonne auf; Morgen ist auch ein Tag. — Man wird in solchem Falle sagen, dass das Wort „ergo" am unrechten Platze sei, und gar kein Schluss vorliege, sondern nur eine Reihe von ausser Zusammenhang stehenden Behauptungen.

herigen Prämisse hinzu, reihen wir dieses Urteil in unsre Prämissen ein, so lautet der Schluss nunmehr:

Alle Menschen sind sterblich, Cajus ist ein Mensch, ergo: Cajus ist sterblich.	Schema: $P)\begin{cases}\text{Alle } b \text{ sind } c,\\ a \text{ ist ein } b,\end{cases}$ ergo $C)$: a ist c.

Der so vervollständigte Schluss besitzt nunmehr auch *logische* Gültigkeit; er ist auch *„formell richtig"* und zur Bekräftigung dessen vermögen wir uns nur darauf zu berufen, dass auch sein allgemeines Schema (unmittelbar) *einleuchtet.* Aus diesem Grunde ist der Schluss nunmehr auch ein „vollständiger" (a complete argument).

Bringen wir uns noch das „leitende Prinzip" dieses Schlusses zum Bewusstsein, so werden wir, die Aufgabe etwa von der psychologischen Seite angreifend, vielleicht finden, dass es die Überzeugung ist: dass ein Merkmal des Merkmals eines Dinges auch ein Merkmal dieses Dinges selbst sein müsse. Wir haben dann den Schluss:

Nota notae est nota rei ipsius,

Sterblichkeit ist ein Merkmal der Menschennatur, welche Merkmal des Cajus ist, ergo: Sterblichkeit ist ein Merkmal des Cajus.

Aber dieses selbe Prinzip des „nota notae etc." ist wiederum wirksam beim Ziehen dieser letzteren Schlussfolgerung, sodass dieselbe durchaus nicht vollständiger ist als die vorhergehende. Auch hat sie das gleiche Schema wie diese.

Die in diesem Schema niedergelegte (formulirte, in dasselbe eingekleidete) Denkgewohnheit mögen wir als das leitende Prinzip selbst hinstellen.

Das Schema des Schlusses erhält man, indem man die Namen der speziellen Dinge, von welchen die Schlussfolgerung spricht, durch Symbole von allgemeiner Bedeutung, Buchstaben, ersetzt, für diese aber alle Beziehungen, welche die Schlussglieder (Prämissen und Konklusion) von jenen Dingen ausdrücklich voraussetzten oder behaupteten, entsprechend zum Ausdruck bringt.

Aus obigen Betrachtungen erhellte auch, dass man, um eine vielleicht materiell richtige Schlussfolgerung als eine dennoch unberechtigte zu erkennen, sie als *logisch ungültig* nachzuweisen, nur zu ihrem Schema ein Beispiel zu finden braucht, in welchem die Prämissen als richtig anzuerkennen sind, während die Konklusion sich als falsch erweist. Auch bei solcher Anerkennung wird an das Gefühl der Evidenz appellirt. (Vergl. hiezu eine in § 12 gegebene Illustration.)

Kürzer auch mag man direkt jene Namen durch irgend welche andere ersetzen, für die zwar die Prämissen noch zutreffen, die Konklusion aber nicht mehr zutreffen würde.

Der Mangel oder das Ausbleiben des Gefühles der Evidenz genügt ohne weiteres in der Regel noch nicht zu obigem Zwecke, dem Ungültigkeitsnachweise für eine gegebene Schlussfolgerung — in Anbetracht dass man schon bei logisch berechtigten Schlüssen in verwickelteren Fällen oft langer Schlussreihen, erst mühsamer Zwischenüberlegungen bedarf, um das Gefühl von der Evidenz der Folgerung, die Überzeugung von ihrer Denknotwendigkeit zu gewinnen.

λ_3) Ich habe noch zu erklären, weshalb hier die Logik als eine Algebra dargestellt und in dieser Darstellung berechtigt erscheint, sich im Gegensatz zu andern Behandlungsweisen vorzugsweise das Epitheton einer „exakten" Logik beizulegen.

In dem Bestreben, die Grundgesetze folgerichtigen Denkens zum Bewusstsein zu bringen und denselben einen allgemeinen, zugleich möglichst einfachen Ausdruck zu geben, hat sich die Logik ursprünglich enge an die *Wortsprache* angelehnt. Sie musste dieses thun, da ein anderes Mittel des Gedankenausdrucks zunächst überhaupt nicht zugebote stand, und sie wird auch in Zukunft fortfahren müssen, bis zu einem gewissen Grade diesen Anschluss zu suchen, nicht nur, weil sie sich dem Anfänger gegenüber stets in der gleichen Lage befindet, sondern auch, weil überhaupt in absehbarer Zeit die Wortsprache immerhin das Hauptmittel des Gedanken*ausdrucks* sowie eine Hauptform des Gedanken*vollzuges* bleiben wird. Auch wir werden mit dieser Anlehnung zu beginnen haben (1. Vorlesung).

Nachdem nun aber in Gestalt von so vielen andern Disziplinen das Beispiel vorlag, wie förderlich es ist, sich für bestimmte Untersuchungsgebiete je eine eigene *Zeichensprache* zu schaffen und die fundamentalen Sätze dieser Disziplinen, unter Benutzung von Buchstaben als Symbolen, in allgemeine *Formeln* einzukleiden, hat nach einer langen Zeit verhältnissmässig unfruchtbarer Stagnation auch die Logik einen frischen Aufschwung genommen und sich in schon ziemlich zahlreichen neueren Bearbeitungen*) zu einer eigenen Buchstabenrechnung, einer *Algebra der Logik* entwickelt.

In dieser finden nun die Gesetze des folgerichtigen Denkens ihren denkbar schärfsten, kürzesten und übersichtlichsten Ausdruck, in ihr stellen sie sich in der konzisesten und knappsten Gestalt dar. Zugleich befreit uns die neue Zeichensprache von all' den Fesseln, in welche durch die Macht der Gewohnheit die Wortsprache den Menschengeist

*) Vergl. das Literaturverzeichniss am Schlusse.

geschlagen. Zufolge dieser Vorzüge ist die rechnerische Behandlung der Logik in der Lage, mancherlei Lücken der älteren blos verbalen Behandlungen nachzuweisen und auszufüllen, zuweilen auch Fehler derselben zu berichtigen, darunter solche von grösserer Tragweite, von fundamentaler Bedeutung.

Jener enge Anschluss an die Wortsprache hat nämlich für die älteren Behandlungen der logischen Disziplin erhebliche Gefahren gebracht, denen sie auch grossenteils zum Opfer fielen. Auch die gebildetsten Kultursprachen haben ja als die Produkte einer von zahllosen Zufälligkeiten beeinflussten Entwickelung viele und gewichtige Mängel, bestehend vor allem in der Übereinstimmung der üblichen sprachlichen Einkleidungsformen für wesentlich verschiedene Gedankenbeziehungen. Mit der dadurch so oft, ja regelmässig bewirkten Verhüllung des wahren Sachverhältnisses war es nahe gelegt, dieses selbst zu verkennen, seinen Unterschied von andern, mittelst gleicher Wortverbindung ausgedrückten zu übersehen — wogegen andrerseits an die Verschiedenheiten zugebote stehender verbaler Ausdrucksformen manch überflüssige Distinktionen geknüpft werden mochten. Der Zweideutigkeiten und Unbestimmtheiten zufolge schwankenden Gebrauches, der unsymmetrischen Einkleidung so vieler symmetrischen Verhältnisse, sowie der empfindlichen Abwesenheit von angemessen kurzen Ausdrucksformen für manche wesentliche und charakteristisch häufig wiederkehrende Beziehungen nicht zu gedenken.

Man wird hiefür in dem Buche als solche gekennzeichnete Belege genugsam finden.

Die *rechnerische Behandlung* der logischen Materie — zuerst von Leibniz[1] angeregt, dann auch von Lambert[2...5] und Ploucquet[1] verfolgt, ist in dem grundlegenden Werke „Laws of thought" zum erstenmal durch George Boole[4] zu einem in seiner Art nahezu vollständigen, auch auf die Lösung von Problemen zugespitzten Systeme ausgebildet worden.

Nahezu vollständig allerdings nur innerhalb jenes schon erwähnten Gebietes, welches, von Peirce als die „logic of absolute terms" bezeichnet, sich weiterhin von selbst schärfer charakterisiren wird. Wie schon angedeutet, beschäftigt sich diese Disziplin nur mit den alleräusserlichsten logischen Aufgaben, welche auch den Tummelplatz der alten Logik bilden, sofern diese etwa in der Lehre von den Syllogismen gipfelte. Naturgemäss muss indess die Erledigung dieser Aufgaben allen feineren Untersuchungen aus der Logik der Beziehungen überhaupt, es muss der „logic of relatives" die elementarere Disziplin vorangehen, so wie etwa die Geometrie der Mechanik und diese der Elasticitätslehre voraufzugehen hat.

Die Anlehnung an das Vorbild eines bereits bekannten Kalkuls, als welcher sich derjenige der arithmetischen vier Spezies naturgemäss in den Vordergrund drängte, hat allerdings auch seinerseits diesem ob zwar genialen und bewunderungswürdigen Systeme gewisse Übelstände aufgeprägt, von welchen es jedoch rasch genug durch neuere Bearbeiter gereinigt worden ist.

μ_3) Nun aber schien diese neuere Darstellung des gewichtigsten Inhaltsstoffes der (alten) Logik in einer eigenen Zeichensprache, in der Form eines *Kalkuls*, dem Althergebrachten ganz unvermittelt, schroff gegenüberzustehen. War sie doch auch nicht aus diesem unmittelbar herausgewachsen, sondern hatte sozusagen einen selbständigen Ursprung: Mathematiker zumeist, nicht Berufsphilosophen, hatten sie aufgebaut.

Kein Wunder, dass dieselbe im andern Lager ungemessenes Befremden*) erregte, verständnissvollem Entgegenkommen oft nicht begegnete, vielmehr manch' abfällige Beurteilung erfuhr, namentlich abseiten Solcher, die überhaupt keinen Kalkul beherrschen.

Zuzugeben ist, dass ein Übergang von dem älteren zum neueren Systeme grösstenteils fehlte, und berechtigt war wenigstens das Verlangen, dass die Grundlagen des Kalkuls aus den Prinzipien der alten Logik abgeleitet und bewiesen würden — wohlbemerkt: *soferne dieses möglich ist* — ein Punkt, auf den ich zurückzukommen habe.

Die vermisste Brücke geschlagen zu haben ist nun das Verdienst der grundlegenden Arbeit[5] in Bd. III des American Journ. des Herrn Charles S. Peirce, zu welcher ihm, wie er sagt, Betrachtungen von Augustus de Morgan die Anregung gegeben haben.

Dasjenige vor allem, was uns in dieser Arbeit an Errungenschaften gesichert ist, desgleichen auch, was alsdann noch — und zum Teile unter seiner Leitung — Herrn Peirce's Schüler hinzugefügt haben, besonders in[1, 1] Miss Ladd und Herr Mitchell — dieses zunächst habe ich mich bestrebt, in systematischer Darstellung zu einem wissenschaftlichen Systeme zu vereinigen.

Dass mir dabei nicht blos eine reproduzirende Thätigkeit zufiel, sondern ich auch kritisch und sichtend, lückenergänzend und schliesslich an dem

---

*) Jenem durch das Vermissen einer Brücke vom Einen zum Andern bedingten Befremden hat beispielsweise Hermann Lotze[1] in der „Anmerkung über logischen Calcül", durch welche sich die zweite Auflage seiner Logik von der ersten unterscheidet, in drastischer Weise Ausdruck gegeben — vergl. die Schlussworte seiner „Anmerkung".

Gebäude weiterbauend eingreifen durfte, wird schon ein flüchtiger Vergleich zeigen.

ν_3) *Einen* Unterschied zwischen der hier angestrebten und den früheren Behandlungsweisen der Logik möchte ich noch hervorheben, ohne jemand damit nahe treten zu wollen.

Suchen wir — was keine leichte Aufgabe ist — die vorgängigen Darstellungen der verbalen Logik zu überblicken, so scheinen dieselben uns stets nur aufzutreten mit einem schon in sich abgeschlossenen, einem *fertigen Bestande* von Lehren.

Für das richtige Verständniss, mitunter für ganz eigenartige Auffassung und Anordnung, für angemessene Wertschätzung und Anwendung ebendieser stereotypen Lehren plädiren solche Werke mit grossem Scharfsinn, oft gewandter Dialektik und mehr oder minder Verdienst und Glück. Mit grossem Verdienst auch pflegen sie den Leser einzuführen in die vorhandenen Streitfragen oder Kontroversen, unhaltbare Ansichten widerlegend, veraltende Distinktionen über Bord werfend und neue einführend, auch einen Einblick in die historischen Wandlungen philosophischer Anschauungsweisen eröffnend. Bald von der allgemein philosophischen und metaphysischen, bald mehr von der psychologischen Seite tragen sie wol Schätzenswertes zu einem Aufbau der Logik bei.

Was ich aber bei all diesem Anerkennenswerten *vermisse* ist, dass dabei mir nirgends zutage zu treten scheint, was denn etwa weiter noch zu thun und anzustreben wäre! In fühlbarem Gegensatze zu andern wirklichen Wissenschaften scheint mit der gegebenen Doktrin das Gebäude der logischen Disziplin allemal schon ganz vollendet dazustehen. —

Dagegen wird bei der rechnerischen Behandlung eine unbegrenzte Fülle ganz bestimmter Probleme sich zur Lösung darbieten: auch die Logik erscheint hier alsbald als eine Wissenschaft, die unbegrenzter Weiterentwickelung fähig, und ganz deutlich wird man, denke ich, die Punkte erkennen, wo zunächst die Hebel anzusetzen sind, an welchen fernere Arbeit einzusetzen haben wird, um ein weiteres Fortschreiten zu verwirklichen. —

Die Frage, wie nun wol das Verhältniss der verbalen zur rechnenden Disziplin aufgefasst werden soll, möchte ich dahin beantworten:

Herr Venn[1] ist der Ansicht, dass diese nicht bestimmt sei, jene zu verdrängen, sondern vielmehr als ein gewissermassen höherer Teil auf sie zu folgen habe. Hievon bin ich nicht allzuweit entfernt, nur

meine ich, dass diese überdies — auf Grund eben ihrer *vollkommnen Konsequenz* — von maassgebendem Einfluss auf die künftige Gestaltung jener werden sollte, im Sinne einer Annäherung, ihrer Anbequemung an sie.

Bei der Fülle von der verbalen Logik fremden, ja unzugänglichen Themata von Untersuchungen, auf die wir hier einzugehen haben, mussten naturgemäss manche verdienstliche Betrachtungen jener hier unberücksichtigt bleiben oder konnten solche nur flüchtig gestreift werden. Sollte in der That Alles, was mir anderwärts von Wert erscheint, hier aufgenommen sein, so müsste ich das Volum des Buches vermehrfacht haben. Es kann deshalb nur wünschenswert genannt werden, dass der Studirende sich auch in der sonstigen zeitgenössischen Logikliteratur thunlichst umsehe, wozu ihm die Literaturangaben in unserm Verzeichnisse sowol als in gelegentlichen Noten Anregung geben und behülflich sein mögen.

ξ_3) Zum Schluss der Einleitung noch einige Worte über Wert und Nutzen der Logik überhaupt und damit auch der vorliegenden Studien.

Schon die Logik von Port-Royal[1] bemerkt, dass nichts schätzenswerter sei, als der gesunde Verstand und ein zutreffendes Urteil (le bon sens et la justesse de l'esprit) in der Unterscheidung dessen was wahr und was falsch ist. Während alle andern Eigenschaften des Geistes nur beschränkte Anwendungsgebiete besitzen, sei die Genauigkeit der Urteilsfunktion (l'exactitude de la raison) allgemein von Nutzen in allen Lagen und Verrichtungen des Lebens; denn nicht nur in den Wissenschaften, sondern auch bei der grossen Mehrzahl der Gegenstände (sujets), von denen die Menschen reden, und der Geschäfte, die sie treiben, sei es schwierig und von grösster Wichtigkeit, die Wahrheit vom Irrtum zu scheiden — eine Aufgabe, die dem Verstand obliege. Man solle deshalb vor allem darauf bedacht nehmen, die eigne Urteilskraft zu entwickeln (de former son jugement). Gewöhnlich bediene man sich des Verstandes als des Mittels, sich der Wissenschaften zu bemächtigen, aber man solle eher sich der Wissenschaften als eines Werkzeugs zur Vervollkommnung des Verstandes bedienen, da die Schärfe des letztern ohne Vergleich wertvoller sei als alle auch von den verlässigsten Wissenschaften erschlossenen Kenntnisse.

Und treffend hebt Mill hervor, dass bei weitem der grösste Teil unsres Wissens (allgemeinen sowol wie des besonderen) offenbar aus Folgerungen besteht. Folgerungen zu ziehen sei das grosse Geschäft des Lebens genannt worden. Ein jeder habe täglich, alle Augenblick,

Thatsachen zu prüfen, welche er nicht direkt beobachtet hat (und zwar nicht zu dem allgemeinen Zweck der Vermehrung seines Wissens, sondern weil die Thatsachen selbst für seine Interessen und Obliegenheiten von Belang sind). Alle haben gewisse Thatsachen zu bestimmen, sie aus gegebenen Wahrnehmungen oder Data zu schliessen, und daraufhin gewisse Regeln (vorschriftsmässig oder nach freiem Ermessen) anzuwenden, und je nachdem sie dies gut oder übel thun, erfüllen sie gut oder schlecht die Pflichten ihres Berufs. Die Logik zeige nun aber, welche Beziehungen stattfinden müssen zwischen den Daten und dem was aus ihnen geschlossen oder durch sie bewiesen werden kann. Darnach müsse sich in der Wissenschaft sowol, wie bei Führung seiner Geschäfte, ein jeder richten, bei Strafe, falsche Folgerungen zu ziehen, welche nicht in der Realität der Dinge begründet sind.

„Wenn es Regeln gibt, nach welchen sich jeder Verstand in einem jedem Falle, in welchem er richtig geschlossen hat, wissentlich oder unwissentlich richtet, so scheint es kaum nötig, zu erörtern, ob es wahrscheinlicher ist, dass Einer diese Regeln beobachten wird, wenn er sie kennt, als wenn er sie nicht kennt."

Eine Wissenschaft könne ohne Zweifel auf eine gewisse Höhe gebracht werden ohne die Anwendung einer andern Logik als derjenigen, welche alle Menschen, die einen gesunden Verstand besitzen, im Verlauf ihrer Studien empirisch erlangen. Es gebe aber eine gewisse Grenze sowol in Bezug auf das, was die Mechaniker ohne die Grundsätze der Mechanik, als auf das, was die Denker ohne die Grundsätze der Logik zu leisten vermögen. Wenn mehrere der schwierigeren Wissenschaften noch in einem so mangelhaften Zustand sind, dass in ihnen nicht allein so wenig bewiesen wird, sondern auch der Streit über das wenige „Bewiesene" nicht enden zu wollen scheint, so liege der Grund vielleicht darin, dass die logischen Begriffe der Menschen noch nicht jenen Grad von Ausbildung („Ausdehnung") und Genauigkeit erlangt haben, welcher für die Beurteilung der einschlägigen Beweise erforderlich ist . . .

So sehr wir diesen hier im Auszuge wiedergegebenen Ausführungen zustimmen, so möchten wir doch eine andere Rücksichtnahme in den Vordergrund stellen. Wir wünschen die logische Forschung überhaupt nicht vom utilitarischen, geschweige denn von einem kurzsichtig oder engherzig — um nicht zu sagen „bornirt" — utilitarischen Standpunkte aus beurteilt zu sehen. So verdiente aber ein Standpunkt genannt zu werden, der das Streben nach Zutageförderung und Erkenntniss der

Wahrheit nur dann als berechtigt anerkennte, wenn dieselbe einen unmittelbaren oder zum voraus schon erkennbaren Nutzen verspricht.

Wir wünschen, dass die Logik unter dem *wissenschaftlichen* Gesichtspunkte betrachtet werde. Höher als jede Aussicht auf etwaigen Nutzen der Disziplin steht uns ihr absoluter *Wert* als Selbstzweck — „Wert" als im Gegensatz zur „Nützlichkeit" — steht uns die Erforschung der für richtiges Schliessen maassgebenden Denkgesetze *um ihrer selbst willen*. Und welches *edlere* Ziel könnte sich der Intellekt auch setzen, als das: *sich selbst zu erkennen*! — somit die altehrwürdige Mahnung des Thales, das *γνῶθι σεαυτόν* des Weisen von Milet verwirklichend.

Nebenbei halten wir ja solches Forschen nach der Wahrheit um ihrer selbst willen auch für diejenige Taktik, die den Forderungen eines vernünftigen, weil hinreichend weit ausschauenden Utilitarismus am besten gerecht werden muss.

Die Geschichte der Wissenschaften zeigt es zur Genüge, wie erst durch dieses freie Walten des Erkenntnisstriebes, durch das reine, von allen Rücksichten des Eigennutzes, ja Nutzerfolges, losgelöste Streben nach Wahrheit, d. i. die Bethätigung eben des wissenschaftlichen Geistes, die allergrössten Entdeckungen ermöglicht wurden.

Wären z. B. nicht Jahrhunderte lang in diesem Geiste die Gesetze jener rätselhaften Kraft erforscht worden, mit welcher geriebener Bernstein, Harz etc. leichte Körper wie Korkstückchen, Papierschnitzel anzieht, wären sie nicht, wie gesagt, ohne jede Aussicht auf praktische Verwendbarkeit um ihrer selbst willen studirt worden, so würde auch die Entdeckung des elektrischen Telegraphen unmöglich gewesen sein; als aber jene so „unpraktisch" sich anlassenden Forschungen weit genug gediehen waren, lag dieselbe auf einmal so nahe, dass Mehrere darauf verfielen, war die Entdeckung — unbeschadet des Verdienstes Derer, welche wirklich die letzten Schritte vollführten — schon fast von selbst da.

Eine von diesem Geist beseelte Forschung möchten wir als die Hochpraxis bezeichnen gegenüber der nur auf greifbar praktischen Nutzen ausgehenden Niederpraxis. Hier vor allem dürfte es am Platze sein —, wie der volkstümliche Ausdruck fordert: „den grossen Glauben zu haben und nicht die grosse Eselsmeinung".

So trivial die obige Wahrheit in den Kreisen, die sich mit ernster Forschung abgeben, im allgemeinen glücklicherweise ist, ist sie doch gerade vonseiten Derer, welche die Logik zu kritisiren liebten, nicht hinlänglich gewürdigt, oft ganz ausser Augen gesetzt worden.

Wir zweifeln nicht, dass jene allgemeine Erfahrungsthatsache, welche als ein Gesetz aus der Geschichte der gesamten Wissenschaften hervorleuchtet, sich einst auch bei der Logik bewahrheiten wird, wo-

fern diese nur erst in den richtigen Bahnen — wofern sie nur überhaupt einmal — *fortschreitet,* und nehmen wir das Vorrecht der gänzlich uninteressirten Forschung, das andern Wissenschaften zugestanden ist, auch für sie in Anspruch.

Gleich andern Wissenschaften dürfte auch die Logik einst ganz Ungeahntes verwirklichen und herbeiführen, dass nebenher in überraschender Weise auch unabsehbare Vorteile erzielt werden. Um nur auf eines hinzudeuten, so sind seit ihrem jüngsten Aufschwunge bereits drei „logical machines“ neuerdings aufgebaut, die allerdings den ihnen beigelegten Namen noch kaum zu verdienen scheinen, die nämlich mit ihrer Leistungsfähigkeit sich noch auf einer sehr rudimentären Stufe befindlich zeigen — wie etwa der Papin'sche Topf gegenüber der Dampfmaschine. In der That aber vermag doch Niemand vorauszusehen, ob nicht schon bald eine „Denkmaschine“ konstruirbar wird, analog oder vollkommner wie die Rechenmaschine, welche dem Menschen einen sehr beträchtlichen Teil ermüdender Denkarbeit fortan abnehmen wird, gleichwie die Dampfmaschine es mit der physischen Arbeit erfolgreich thut.

Freilich darf man die Ernte nicht schon während der Aussaat fordern, und am wenigsten da, wo Bäume gepflanzt werden.

Erste Vorlesung.

§ 1. Subsumtion.

Hauptmittel des Gedanken*ausdrucks* und eine Hauptform des Gedanken*vollzuges* ist, wie schon gesagt, die *Sprache*.

Untersuchungen über die Gesetze des Denkens werden wir deshalb naturgemäss damit beginnen, dass wir *deren* einfachste Bildungen in's Auge fassen. Rein äusserlich betrachtet wären dies allerdings Buchstaben, Silben und Worte — die Ergebnisse eines an den sprachlichen Gebilden vorgenommenen und möglichst weit getriebenen Zergliederungsprozesses. In wesentlicher Hinsicht sind es *Sätze*, welche *Aussagen*, *Urteile*, *Behauptungen* darstellen.

Alles*) auf das Erkennen gerichtete Denken vollendet sich nämlich in *Urteilen*, die als Sätze innerlich gedacht oder äusserlich ausgesprochen, in Worte gefasst werden. In Urteilen endigt jede praktische Überlegung über Zwecke und Mittel, gipfelt jede Übereinkunft, um sie dreht sich jeder Streit. In die Form von Urteilen kleidet sich der Irrtum, in ihnen auch wird die Erkenntniss der Wahrheit niedergelegt; in Urteilen schliesst sich jede Überzeugung ab. Und nur insofern sich eine individuelle Überzeugung im Satze ausspricht, kann sie Gegenstand gemeinsamer Betrachtung werden und auf die Anerkennung vonseiten Aller Anspruch erheben. Alle andern sprachlichen Gebilde kommen nur in Betracht als Bestandteile oder Elemente des Satzes, alle andern Geistesthätigkeiten nur als Bedingungen oder Vorbereitungen, als Begleiterscheinungen und Wirkungen des Urteils.

Beginnen wir sonach damit, die *Urteile* in's Auge zu fassen, wie sie die Wortsprache als Sätze formulirt! Es muss sich uns hierbei empfehlen, unter Beiseitelassung der zusammengesetzteren, zunächst uns an die einfachsten Arten der Urteile zu halten. Als solche erscheinen die sogenannten *„kategorischen“* Urteile, welche sich darstellen in Form *eines* Satzes, der mit einem *„Subjekt“* ein *„Prädikat“* verknüpft.

Wie aus der Grammatik bekannt, ist das Subjekt Dasjenige, wor-

*) Vergl. Sigwart[1] p. 9 sq.

über etwas ausgesagt wird, das Prädikat Dasjenige, was von dem Subjekte ausgesagt wird. Die Verbindung zwischen beiden wird sehr häufig durch ein Hülfszeitwort, die „*Kopula*“: „ist“, vermittelt.

Am besten werden wir unsre Betrachtungen sogleich an ein paar Beispiele anknüpfen und erst nachher zusehen, inwiefern den Bemerkungen, zu welchen uns diese Beispiele Veranlassung geben, allgemeinere Gültigkeit zukommt.

Kategorische Urteile einfachster Art sind beispielsweise die in der Chemie als richtig anerkannten Sätze:

„(Alles) *Gold ist Metall.*“ — „(Alles) *Kochsalz ist Chlornatrium.*“ —

An diese schon lassen die für unsre Disziplin fundamentalen Auseinandersetzungen sich auf das leichteste knüpfen.

Beide Aussagen haben die nämliche Kopula. Als ihre, wie gesagt übereinstimmende, Kopula erscheint die dritte Person singularis des Hülfszeitworts, verbum auxiliare „sein“, nämlich: das Wörtchen „ist“, welches, hier wie dort, das zu seiner Linken befindliche Subjekt mit dem rechts von ihm stehenden Prädikate verknüpft.

Gleichwol erscheint die Beziehung, welche zwischen dem Subjekt der Aussage und ihrem Prädikat *thatsächlich* besteht, in dem ersten Beispiel als eine wesentlich andere, wie in dem zweiten, insofern umgekehrt *Metall nicht immer Gold*, dagegen *alles Chlornatrium auch Kochsalz* ist. Diese Verschiedenheit ist in den obigen Aussagen augenscheinlich nicht zum Ausdruck gebracht.

Will man *genauer, als jene Aussagen es thun*, die thatsächliche Beziehung zwischen dem Subjekte und dem Prädikate hiernächst vermittelst eines *Beziehungszeichens* darstellen, so muss man für das erste Beispiel ein anderes Zeichen wählen, als für das zweite. Man schreibe etwa:

$$\textit{Gold} \subset \textit{Metall}. \qquad\qquad \textit{Kochsalz} = \textit{Chlornatrium}.$$

Das zweite Zeichen, $=$, ist entlehnt den (übrigen) mathematischen Disziplinen und namentlich schon der Arithmetik; es ist das bekannte „*Gleichheitszeichen*“. Während dasselbe aber anderwärts oft nur benutzt wird, um Übereinstimmung, Gleichheit in einer bestimmten Hinsicht auszudrücken, z. B. Gleichheit hinsichtlich des Inhaltes oder Flächenmaasses bei zwei verschiedenen vielleicht auch verschieden gestalteten Flächen, soll dieses Zeichen in gegenwärtiger Schrift stets in der (inhaltlich) weitest gehenden (dem Umfang nach „engsten“) Bedeutung aufgefasst werden, welche ihm überhaupt beigelegt zu werden vermag. Es soll uns nämlich die Übereinstimmung in *jeder* Hinsicht,

die *vollkommne* Übereinstimmung, Einerleiheit oder *Identität* zwischen den Bedeutungen der durch dasselbe verknüpften Namen, Zeichen oder Ausdrücke darstellen. Es kann daher das Zeichen = hier als „einerlei mit“, oder, wenn man will, auch als „*identisch*“ gelesen werden; indessen verschlägt es nichts, wenn wir uns bequemer der allgemeinen Übung anschliessen, dasselbe einfach als „*gleich*“ zu lesen.

Für der Mathematik ferner stehende Leser sei ein für allemal bemerkt, dass man eine Behauptung der Form

$$a = b$$

eine „*Gleichung*“ nennt, und zwar werden im Deutschen die durch das Zeichen = getrennten sowol als verknüpften Ausdrücke schlechtweg als die beiden „*Seiten*“ der Gleichung bezeichnet; so ist a die „*linke*“, b die „*rechte Seite*“ der vorstehenden Gleichung (englisch: lefthand resp. righthand *member*, französisch: premier und second *membre*, etc.).

Nach dem Gesagten wird eine Gleichung, wie $a = b$, uns ausdrücken, dass ihre beiden Seiten a und b lediglich Namen für *einunddasselbe* Objekt des Denkens sind. Und zwar sind es hier für das Nämliche *verschiedene* Namen. Dieser Umstand jedoch ist nebensächlich, indem auch in Gleichungen, wie $a = a$, die beiderseitigen Namen in einen einzigen werden zusammenfallen können. Es kommt bei der Gleichsetzung oder Identischsprechung, Identitätsbehauptung, nicht auf den Klang der Namen, nicht auf das Aussehen der etwaigen Ausdrücke, sondern ganz allein auf die *Bedeutung* derselben an.

Daneben mag auch die psychologische Wirkung der Namen eine verschiedene sein; sie mögen an verschiedene Merkmale von Dem, was sie bezeichnen, zuerst erinnern, und wie in dem angeführten Beispiele: „Kochsalz = Chlornatrium“ den Hörer oder Leser veranlassen, sich Dasjenige, was sie bedeuten sollen, von verschiedenen Seiten vorzustellen, indem sie je mit eigentümlichen Vorstellungselementen an das Vorzustellende anknüpfen, diese sozusagen in den Vordergrund stellend. Achtet man hier in der That auf die Art, wie die Namen „Kochsalz“ und „Chlornatrium“ zusammengesetzt sind, so wird durch den erstern überhaupt nicht an chemische Bestandteile, sondern nur an die Verwendung des Salzes zum Kochen erinnert, dagegen durch den letzteren blos hervorgehoben, dass das Vorzustellende die chemische Verbindung der Elemente Chlor und Natriummetall sei. Das eine Merkmal aber: durchaus von der Beschaffenheit des gewöhnlichen zum Kochen verwendeten Salzes zu sein, ist von dem andern Merkmal: aus Chlor und Natrium zu bestehen, nach heutigem Stand der chemischen Erkenntniss unmöglich zu trennen, vielmehr damit unweigerlich zu verknüpfen, und so ist es immerhin *dasselbe*, was beide Namen bezeichnen.

Diesen ihren „logischen Gehalt“, ihre volle und eigentliche Bedeutung, von ihrem „psychologischen“ Gehalt zu unterscheiden werden wir bei Namen sowol als auch bei Urteilen hier häufig Veranlassung haben.

Gleichwie die Klassen der Dinge, welche für Kochsalz, und welche für Chlornatrium erklärt werden müssen, ganz und gar einerlei sind, so sind es auch die zugehörigen „Begriffe“ Kochsalz und Chlornatrium. Dieselben haben nicht nur einerlei „Umfang“, sondern auch denselben „Inhalt“, identisch dieselben Merkmale.

Das andere Zeichen $\subset$ lese man: *„untergeordnet“*, auch, wenn man will: *„subordinirt“*. Es heisse das *Unterordnungszeichen* und eine Behauptung, wie

$$a \subset b$$

eine *„Unterordnung“* (subordinatio). Das Zeichen ist ähnlich gestaltet, gewissermassen nachgebildet dem (einen) „Ungleichheitszeichen“ der Arithmetik, nämlich dem Zeichen $<$ für *„kleiner* (als)“. Bekanntlich kann dieses rückwärts als „grösser“, $>$, gelesen werden und wird dadurch leicht mit seiner Bedeutung dem Gedächtnisse eingeprägt — einerlei, ob vorwärts oder rückwärts gelesen — dass man sich merkt: das Zeichen breite sich immer vom kleineren zum grösseren Werte hin aus, oder spitze sich vom grösseren Wert gegen den kleineren hin zu. Analog wird auch unser Unterordnungszeichen rückwärts, d. i. wenn man wiederum von links nach rechts lesen will, in der umgekehrten Stellung, $\supset$, gelesen, als *„übergeordnet“* (superordinirt) zu deuten sein. Die obige Unterordnung darf (mit andern Worten) auch rückwärts angeschrieben werden als eine *„Überordnung“* (superordinatio):

$$b \supset a,$$

und wird dieser Ausspruch genau dasselbe besagen, wie der vorige.

Einer Verwechselung der Zeichen für „über“- und „untergeordnet“ beugt die Bemerkung vor, dass auch hier das Zeichen seine Arme oder Zweige jeweils vom engeren zum weiteren Begriff, von der weniger umfassenden Klasse nach der umfassenderen hin (welche die andere in sich schliesst, also — in einem gewissen, späterhin noch näher erläuterten Sinne — vom Teil zum Ganzen), somit ebenfalls vom Kleineren zum Grösseren hin divergirend ausbreitet, wogegen in dem entgegengesetzten Sinne, vom weiteren zum engeren Begriff hin, das Zeichen sich zuspitzt (genauer gesagt: spitzrundet), seine Zweige immer enger zusammenlaufen, konvergiren, um sich am „Scheitel“ des Zeichens zu vereinigen. Die kleinere Klasse, der engere Begriff, steht sonach immer am Scheitel des Zeichens.

Hienach erscheinen auch die Über- und Unterordnungszeichen als leicht zu merkende, als „mnemonische“.

Von den beiden *Begriffen* „Gold“ und „Metall“ wird in der That

jener der „engere", dieser der „weitere" genannt. Diese Benennung ist schon von der älteren Logik eingeführt und zwar augenscheinlich *im Hinblick, nicht auf den „Inhalt", sondern auf den „Umfang"* der genannten Begriffe.

Der „*Umfang*" des Begriffes „Gold" setzt sich zusammen aus allem Dem, was Gold ist; ihn bildet die *Klasse* aller der Substanzen oder Dinge, welche als Gold zu erklären sind. Ebenso bildet die Klasse aller der Dinge oder Substanzen, welche Metall zu nennen wären, kurz gesagt: die ganze *Klasse der Metalle*, den sogenannten „Umfang" des Begriffes „Metall". Die erstere Klasse ist in der zweiten enthalten, welche daneben auch noch Anderes enthält, z. B. die Klasse der als Silber zu bezeichnenden Substanzen, etc. Jene ist wirklich ein Teil von dieser. Die Klasse „Gold" ist, neben noch Anderem, ganz enthalten in der Klasse „Metall" — dies ist also die Beziehung, welche die Unterordnung „Gold $\subset$ Metall" auszudrücken bestimmt ist.

Umgekehrt aber, *wie deren „Umfänge" die Klassen, verhalten sich die „Inhalte" der* beiden *Begriffe.*

Der „Inhalt" oder das Wesen des Begriffes Metall setzt sich zusammen aus denjenigen *Merkmalen*, welche *allen* Metallen gemeinsam sind und, *insgesamt*, *nur* diesen zukommen. Dahin gehören erstlich diejenigen Eigenschaften, welche den materiellen Substanzen überhaupt innewohnen, eventuell für sie charakteristisch sind, als da sind: die Eigenschaft der Raumerfüllung, die Eigenschaft, träge, schwer zu sein, von konstanter Masse, etc. Und zweitens gehören dazu solche Merkmale, welche die Metalle von Nichtmetallen unterscheiden, z. B. die Eigenschaft „gute" Leiter der Elektrizität zu sein, eine geringe spezifische Wärme zu besitzen, im festen oder flüssigen Zustande das Licht in jener eigentümlichen Weise zurückzuwerfen, welche als „Metallglanz" bezeichnet und in der Theorie der Metallreflexion von der Optik schärfer präzisirt wird, u. a. m.

Alle diese Merkmale des Begriffes „Metall" kommen nun auch dem Begriff „Gold" zu, und dazu noch manche andere, durch welche — zum Teil — das Gold sich von andern Metallen unterscheidet, z. B. das dem Golde eigentümliche hohe spezifische Gewicht, die Eigenschaft, im reflektirten Lichte gelb, im durchgehenden Licht aquamarinblau zu erscheinen, seine Duktilität, gewisse chemische Verwandtschaften und anderes mehr.

Dem „Inhalte" nach betrachtet ist nun der übergeordnete und weitere Begriff in dem untergeordneten, dem engeren mit enthalten. Der erstere erscheint geradezu als ein Teil des letzteren.

Im Hinblick auf diesen Inhalt der Begriffe, d. i. ihr eigentliches Wesen, müsste man also die Beziehung zwischen Gold und Metall gerade umgekehrt, wie oben, schreiben, in Gestalt von:

Inhalt des Begriffes Gold $\supset$ *Inhalt des Begriffes Metall*

— so wenigstens, wenn man die geschilderte mnemonische Interpretation des Beziehungszeichens beibehalten will.

Statt $\supset$ das frühere Zeichen $\subset$ hier beizubehalten wäre nur angängig, wenn man diesem eine andere (ebenfalls mnemonische) Deutung geben, dasselbe nämlich dahin auslegen wollte, als ob mittelst desselben das an seinem Scheitel stehende Objekt sozusagen den Versuch machte, den Anspruch erhöbe, (mit den ausgebreiteten Armen des Zeichens) das andere Objekt zu umfassen, dasselbe in sich einzuschliessen. Diese Einschliessung als eine vollendete auch äusserlich zur Darstellung zu bringen, indem man etwa den Namen des eingeschlossenen Objektes in den des einschliessenden hineinsetzte, ist aus typographischen Gründen nicht angängig.

Die in unserm Beispiel bestehende Beziehung zwischen Gold und Metall, die wir also im Hinblick auf die zugehörigen „Klassen" oder „Umfänge" der gleichnamigen Begriffe vermittelst der Formel

Gold $\subset$ Metall

darzustellen fortfahren, ist wesentlich dieselbe Beziehung, welche überhaupt zwischen einer „*Art*" und der ihr übergeordneten „*Gattung*" besteht, desgleichen zwischen einem „*Individuum*" und einer „Art", zu der dies Individuum nebst noch andern Individuen gehörte. Es ist im allgemeinen:

die Art $\subset$ ihrer Gattung, das Individuum $\subset$ seiner Art,
die Gattung $\supset$ einer ihrer Arten, die Art $\supset$ einem ihrer Individuen.

Bei Art und Gattung ist der *engere* oder *Artbegriff* zugleich der *inhaltsreichere*, der *weitere* oder *Gattungsbegriff* aber der *inhaltsärmere*. Und dasselbe lässt sich auch aufrecht erhalten in Bezug auf ein „Individuum" und die demselben übergeordnete „Art", indem man ja unter dem „*Begriffe*" des gedachten Individuums nichts anderes als dessen (Einzel-)Vorstellung selbst versteht, nämlich die Gesamtheit *aller* seiner Merkmale. Als Beispiel sei angeführt: „Die Erde ist ein Planet", was mit

Erde $\subset$ Planet

darzustellen ist. Wieder enthält der „Begriff" der „Erde" neben vielen eigentümlichen Merkmalen auch alle Merkmale des Begriffes „Planet".

Nachdem wir nun für unsre beiden Musterbeispiele, die „typischen" Exempel von kategorischen Urteilen auf S. 127, den Unterschied, Gegensatz hervorgehoben, welcher in den Beziehungen zwischen Subjekt und Prädikat bei ihnen zutage tritt, und uns diese Beziehungen in ihrer

Eigenart klar zum Bewusstsein gebracht haben, haben wir die Fähigkeit erworben, sind wir vorbereitet, die wahre *Bedeutung der Kopula* „ist“ (oder „sind“) zu erfassen, und uns nach einem geeigneten Beziehungszeichen zur Darstellung derselben umzusehen.

Die Kopula „ist“ wird bald die eine, bald die andere der beiden Beziehungen ausdrücken, die wir mittelst der Zeichen $\subset$ und $=$ dargestellt haben. Zu ihrer Darstellung wird sich darum ein aus den beiden letzten zusammengesetztes Zeichen $\subseteq$ als ein ohne weiteres, sozusagen nunmehr von selbst, verständliches und dem Gedächtniss sich einprägendes vor allen andern empfehlen. Ausführlichst wird dieses Zeichen als „*untergeordnet oder gleich*“ zu lesen sein. Und soferne sich herausstellen wird, dass den an unsern Beispielen gemachten Wahrnehmungen allgemeine Gültigkeit zukommt, können wir sagen:

Das kategorische Urteil drückt immer aus, dass das Subjekt (der Subjektbegriff) dem Prädikate (Prädikatbegriffe) entweder untergeordnet oder aber mit ihm identisch sei. Es wird demnach ursprünglich oder von hause aus:

$$\textit{Subjekt} \subseteq \textit{Prädikat}$$

die gemeinsame Form aller kategorischen Urteile sein.*)

Indem wir nachher an dem Leitfaden ihres sprachlichen Ausdrucks die verschiedenen Arten kategorischer Aussagen möglichst vollständig durchgehen, werden wir in der That sehen, dass sich diese Behauptung durchaus bewahrheitet, dass die erwähnte Auffassung sich wenigstens *unbeschadet des logischen Gehaltes* der betreffenden Urteile überall anbringen, allgemein durchführen lässt — allerdings nicht selten bedingt durch eine Abänderung des „psychologischen Gehaltes“ der betreffenden Urteile, sowie auf Kosten der Eleganz ihres sprachlichen Ausdruckes, unter Verletzung, mitunter auch, des Sprachgefühles, in einer Weise, die wol in der That den Eindruck, erkünstelt zu sein, hervorbringen kann. Lässt aber dadurch sich nur bewirken, dass alle Urteile in einer gemeinsamen Form erscheinen, und so einer *allgemeinen* Behandlung zugänglich werden, so ist durch die Erzielung solch' unabsehbaren Vorteils doch der gedachte modus procedendi vollauf gerechtfertigt.

Eine Behauptung der Form

1°) $$a \subseteq b$$

---

*) Zufolge der später zu vollziehenden Einführung, Adjungirung des Begriffs des „Nichts“ wird die Wirksamkeit obiger Bemerkung für unsre Disziplin nachträglich eingeschränkt, sodass nicht alle Urteile in jener typischen Form der Subsumtion ihren angemessenen Ausdruck im Kalkul werden finden können.

werden wir eine *Subsumtion* (Einordnung) nennen, das Zeichen $\neq\!\!\!\in$ das *Subsumtionszeichen*. Dasselbe könnte auch das Zeichen der „eventuellen (oder fakultativen) Unterordnung“ genannt werden, wo das Beiwort „eventuell“ darauf anspielt und in der That lediglich darauf hindeuten soll, dass die Unterordnung auch in (identische) Gleichheit ausarten kann — im Gegensatz zu dem Zeichen $\subset$ der wirklichen oder definitiven Unterordnung, „der Unterordnung“ schlechtweg.

Die linke Seite a der obigen Subsumtion heisst auch der *Unterbegriff* oder *terminus minor* derselben, die rechte Seite b ihr *Oberbegriff* oder *terminus major*. [Nebenbei bemerkt sind das Benennungen, die ganz ebenso auch bei der Unterordnung $a \subset b$ anwendbar erscheinen.] Ich werde indess diesen Benennungen in der Regel die einfacheren „*Subjekt*“ und „*Prädikat*“ selbst vorziehen, und zwar auch auf einem solchen Felde der Anwendung von Subsumtionen, welches mit diesen der Grammatik (spezieller der Satzlehre oder Syntax) entlehnten Gebilden anscheinend nichts zu thun hat, z. B. wenn wir später unter a und b in 1°) uns „Gebiete einer Mannigfaltigkeit“ vorzustellen haben.

Wir konnten in unsern typischen Exempeln die Subsumtion 1°) *in Worten* durch den Satz darstellen:

„*a ist b*“

oder auch „*alles a ist b*“. Bei der ersteren Fassung muss man bleiben, wenn das Subjekt a — der Einzelvorstellung entsprechend — ein Individuum bedeutet, das ist also bei den sogenannten „*singulären*“ Urteilen. Z. B. „Mars ist Planet“, was logisch dasselbe sagt, wie: „Der Mars ist ein Planet“.

Je nach dem sprachlichen Ausdruck des Subjektes werden aber für die Kopula mitunter auch andere Formen, wie z. B. die Pluralform „sind“ zu wählen sein. So namentlich, wenn es sich um Arten und Gattungen handelt, z. B.

„(Alle) Säugetiere sind Wirbeltiere“.
„(Alle) Zweihufer sind Wiederkäuer“.

An diesen als den wol häufigeren Fall wollen wir uns bei den nächsten Besprechungen vorzugsweise halten.

Gegenüber den einfachen Zeichen $\subset$ *und* $=$ *drückt das zusammengesetztere Zeichen* $\neq\!\!\!\in$ (wie schon Peirce betont) *gleichwol die einfachere Beziehung aus*. In der That die Subsumtion

1°) $$a \neq\!\!\!\in b$$

sagt *weniger*, wie die Unterordnung, resp. Gleichung

2°) $a \subset b$, 3°) $a = b$.

Die Subsumtion lässt nämlich die umgekehrte Beziehung, in welcher b zu a steht, offen. In Worten ist der Inhalt der Aussage 2⁰) oder 3⁰) je nur durch *zwei* Sätze wiederzugeben, nämlich etwa:

2⁰) *Alle a sind b, aber nicht alle b sind a,*

und

3⁰) *Alle a sind b, desgleichen alle b sind a.*

Offenbar schliessen diese beiden Beziehungen einander aus; sie können niemals beide zugleich wahr sein, indem die letztern Sätze rechts einander (kontradiktorisch) *widersprechen.*

Dagegen gibt 1⁰) den einfachen Satz wieder: „*Alle a sind b*". Gemessen nach ihrer Ausdrucksfähigkeit vermittelst der Wortsprache ist also in der That die Subsumtion 1⁰) die einfachste von allen drei Aussagen.

Die Subsumtion 1⁰) konstatirt, stellt fest, *dass irgend einer der beiden Fälle 2⁰), 3⁰) vorliege, und dann selbstverständlich nicht der andere.*

Der erstere 2⁰) von diesen beiden Fällen ist weitaus der häufigere. Bezüglich des letzteren 3⁰) sei zunächst nur hervorgehoben, dass namentlich bei allen Urteilen, die als Begriffserklärungen, *Definitionen* hingestellt werden, beabsichtigt ist, dass diese als auch umgekehrt gültige verstanden werden.

Z. B. wenn wir *definitionsweise* sagen: „Die (Jede) Kugelfläche ist eine Fläche, deren sämtliche Punkte gleichen Abstand haben von einem bestimmten Punkte (dem sog. Mittelpunkte)", so ist damit gemeint, dass auch umgekehrt jede Fläche mit konstantem Abstand ihrer Punkte von einem bestimmten Punkt eine Kugelfläche (zu nennen) sei. Sagen wir ebenso: „Gerade Zahlen sind ohne Rest durch 2 teilbare Zahlen", so muss auch der Ausspruch gelten: „Ohne Rest durch 2 teilbare Zahlen sind gerade Zahlen". —

Welcher von den Fällen 2⁰) und 3⁰) bei der Subsumtion 1⁰) vorliege, ist manchmal unbestimmt, manchmal zwar bestimmt, aber nicht bekannt, meistens ohne Belang.

Freilich, wenn es zweifellos ist, welcher von den Fällen 2⁰), 3⁰) vorliegt, so hat die Aussage 1⁰) $a \mathrel{=\!\!\!\in} b$ einen eigentümlichen Charakter, den man durch einen Ausspruch wie:

„Paris liegt an der Seine *oder* an der Leine"

illustriren könnte.

Ein solcher Ausspruch mag vielleicht albern erscheinen, doch ist er unzweifelhaft *richtig* oder korrekt zu nennen! Paris liegt allerdings, wie jedermann weiss, *nicht* (wie Hannover) an der Leine, sondern es liegt an der Seine. Jemand, der obigen Ausspruch thäte, würde demnach eine Unwissenheit fingiren, die man ihm kaum zutrauen möchte,

er könnte sich dadurch den Vorwurf einer gewissen Unredlichkeit, *Verstellung* zuziehn. Für den Hörer aber, der etwa nicht schon von vornherein sachlich orientirt wäre, der seine Information über die Lage von Paris erst aus der obigen Aussage schöpfen müsste, würde diese Aussage ein *irre führendes* psychologisches Moment enthalten. Und dennoch: *Weniger* zu sagen als man weiss, ist erlaubt; und aus der Fülle der verfügbaren Kenntnisse Dasjenige hervorzuheben, was für einen bestimmten Zweck verwertbar ist, und demgemäss Anderes unbenutzt zu lassen, ist allgemeine Praxis in den Wissenschaften. Geschah dies in dem citirten Ausspruch zwecklos, so hat es hier, bei 1^0) zu geschehen zu dem Zwecke, den verschiedenen möglichen Fällen, die wir unter 2^0) und 3^0) aufgezählt haben, eine einheitliche Behandlung angedeihen zu lassen, wie denn auch die Wortsprache faktisch für sie alle der nämlichen Kopula „ist" oder „sind" sich bedient.

Noch eines kommt hinzu, den obigen (Paris betreffenden) Ausspruch in jeder andern als der logischen Hinsicht als verwerflich erscheinen zu lassen: es ist der Umstand, dass es hier einen grösseren Aufwand von Worten erforderte, dass es *umständlicher* war, die in dem Ausspruch gegebene unvollständige Information zu liefern, als es gewesen wäre (in Gestalt des Ausspruchs: „Paris liegt an der Seine") die vollständigere Information zu geben.

Die gleiche Ausstellung wird man — anscheinend — uns auch später machen können, wenn wir in einer Subsumtion $a \mathrel{=\!\!\!\in} b$ das Zeichen $\mathrel{=\!\!\!\in}$ als „untergeordnet oder gleich" lesen, während wir in *einem* Falle sehr wohl wissen, dass wirkliche Unterordnung, in einem andern Falle vielleicht, dass eigentlich Gleichheit stattfindet!

Hier wird eben nicht ausser Acht zu lassen sein, dass es sich für uns, indem wir *„untergeordnet oder gleich"* sagten, in erster Linie um eine genaue Darstellung, um charakteristische Wiedergabe des Sinnes der *Kopula* handelte. Das ist freilich umständlicher, als nur „untergeordnet" oder aber blos „gleich" zu sagen. Die Wortsprache aber hat für $\mathrel{=\!\!\!\in}$ den *kürzeren* Ausdruck „ist", wofern sie nicht — noch kürzer — dies Beziehungszeichen gänzlich unübersetzt lässt, wie z. B. die russische Sprache, zuweilen auch die lateinische (vergl. „ars longa", etc.).

Überhaupt haben wir bereits gesehen, dass — im Gegensatz zu vorigem abschreckenden Beispiele — die unvollständigere Information 1^0) den weitaus kürzeren sprachlichen Ausdruck in der That besitzt. Dies aber gilt für alle Kultursprachen und ist darum nicht etwa blos für einen zufälligen Umstand, eine Äusserlichkeit der betreffenden

Sprachen zu halten, sondern sicherlich tief begründet in der Natur des menschlichen Intellektes. Die Subsumtion 1°) — können wir sagen — drückt blos *einen* Gedanken aus; die vollständigere Information 2°) resp. 3°) aber je deren *zwei*, und indem wir uns statt dieser letzteren mit diesem ersteren begnügen, lassen wir den einen davon fallen, sehen wir ab, abstrahiren wir von demselben.

Das Subsumtionszeichen $\subseteq$ wird also, gegenüber den Zeichen $\subset$ und $=$, als das *ursprünglichere* hinzustellen sein. *Auf ihm* werden wir darum auch das ganze Gebäude des ersten und umfassendsten, des elementaren Teiles der exakten Logik aufrichten.

Übrigens je nach den verschiedenen Anwendungsgebieten des Subsumtionszeichens und -begriffes werden wir dafür noch mannigfache sprachliche Ausdrucksformen gewinnen. Will man ein kurzes Wort für dieses Zeichen haben, welches auf allen Gebieten passt, so lese man es etwa als *„eingeordnet"*, oder *„sub"*, spreche also 1°) als *„a* sub *b"*.

Ein Hauptvorzug dieses unbestimmteren (die Alternative zwischen $=$ und $\subset$ stellenden) Zeichens $\subseteq$ tritt in der *Wissenschaft* zutage, wo man sehr viel mit *allgemeinen* Sätzen oder Aussagen (auch Formeln) und Gesetzen zu thun hat, wo es gerade wesentlich auf die Gewinnung solcher ankommt. Von der unbegrenzten Menge der Fälle, welche solch' ein allgemeines Urteil $a \subseteq b$ unter sich begreift, findet da oft bei den einen Gleichheit, bei den andern Unterordnung statt, und wird eine Zusammenfassung aller dieser Fälle in ein einheitliches Gesetz gerade eben nur durch das Subsumtionszeichen ermöglicht. Es kommt m. a. W. zumeist vor, dass bei *einunddenselben* Subsumtion 1°) die Frage, ob der Fall 2°) oder der 3°) vorliege, gar nicht allgemein, prinzipiell entschieden werden kann, sondern sich bald in dem einen, bald in dem andern Sinne entscheidet. Um hiezu ein einfachstes Beispiel zu geben, werden wir diese Verhältnisse an den Quadratwurzeln der Arithmetik sogleich im Kontext erläutern.

Im Anschluss an das Vorstehende möchte ich auch noch rechtfertigen, weshalb ich *nicht*, wie manche der neueren Autoren über Logik, für $\subset$ das Kleinerzeichen $<$ selbst verwende, und demgemäss auch das Subsumtionszeichen nicht durch das in der Mathematik schon gebräuchliche Zeichen $\leqq$ für „kleiner oder gleich" darstelle, vielmehr besondre Zeichen für diese Beziehungen wählte.

Den Ausschlag hiefür gab die Erwägung, dass letztere Zeichen bestimmt sind und geeignet sein sollen, in der Arithmetik selbst auch *neben* den Ungleichheitszeichen verwendet zu werden. Es lassen schon die Elemente der reinen Mathematik in manchen ihrer Abschnitte sich ohne das Unterordnungs- und namentlich das Subsumtionszeichen *nicht* korrekt dar-

stellen, woferne man bei ihrer Begründung nicht ungebührlich lange auf die Anwendung einer knappen Zeichensprache verzichten und mit verbalen Umschreibungen sich behelfen will. Und mit fortschreitender Entwickelung der mathematischen Wissenschaft werden, bin ich überzeugt, diese Zeichen daselbst immer unentbehrlicher werden.

Namentlich tritt dies schon längst bereits da zutage, wo man mit „vieldeutigen" Zahlenausdrücken zu thun bekommt, das ist, im Elementarunterricht, erstmalig bei der Quadratwurzelausziehung. Diese ist eine (im allgemeinen) zweideutige Operation, und bekannt ist, wie zuweilen Lehrer sowol als Bücher, indem sie z. B. in einem Atem schreiben: $\sqrt{9} = 3$ und daneben auch $\sqrt{9} = -3$, den Anfänger (nach dem Satze, dass wenn zwei Grössen *einer* dritten gleich sind, sie auch unter sich gleich sein müssen) zu dem Fehlschlusse verleiten: $+3 = -3$. In mehr versteckter Form, geschickt verhüllt, liegt dieses Verfahren einer Reihe von arithmetischen Paradoxen zugrunde, welche den Anfänger zu verblüffen pflegen.

Der Fehler liegt in dem unberechtigten Gebrauche des Gleichheitszeichens. Schreibt man freilich: „Silber = Metall" und (mit demselben Rechte) „Metall = Gold", so gelangt man auch zu dem Schlusse: „Silber = Gold"! In Bezug auf diesen Gebrauch herrscht in der zeitgenössischen Mathematik noch eine gewisse Nachlässigkeit, hervorgegangen aus der Übertreibung einer sonst in dieser Disziplin als so überaus fruchtbar bewährten Sparsamkeit, der Sparsamkeit mit Zeichen, welche hier zu einem Geizen mit solchen ausartet. Es beruht darauf die Möglichkeit zahlreicher „Paradoxa", das ist deduktiver Ableitung, scheinbaren Beweises von Widersprüchen und augenscheinlich falschen, absurden Ergebnissen auf Grund der schulmässigen Sätze und Regeln, indem eben diese nicht korrekt gewesen.

Um die Sache korrekt zu behandeln muss man zunächst die als eine mehrdeutige verstandene, die „volldeutige" Quadratwurzel von der eindeutig zu verstehenden auch in der Bezeichnung sorgfältig unterscheiden. Jene wird auch der allgemeine oder „Generalwert", diese der Prinzipal- oder „Hauptwert" der Wurzel genannt. Der Generalwert ist aber meist eigentlich gar kein Wert (so wie z. B. ein Handschuh auch kein Schuh ist), vielmehr ist er eine ganze *Klasse* von Werten. Nach Cauchy's Vorschlag kann man ihn durch Anwendung einer sich sonst als „überflüssig" charakterisirenden Klammer (vergl. Anhang 2) in Gestalt von $\sqrt{(a)}$ vor dem letzteren, dem Hauptwert $\sqrt{a}$, auszeichnen, und verwendet man, noch besser, für ihn ein doppeltes Wurzelzeichen $\sqrt{\!\!\sqrt{}}$, welches ebenso an den Anfangsbuchstaben des Wortes „Wurzel", wie das gewöhnliche oder einfache Wurzelzeichen $\sqrt{}$ an den des Wortes „radix" erinnert.

Wir verstehen demnach unter $\sqrt{\!\!\sqrt{a}}$ die Klasse oder Gattung, welche sich zusammensetzt aus allen den Zahlen, deren Quadrat gleich a ist — im Gegensatz zu $\sqrt{a}$, welches uns eine bestimmte von diesen Zahlen repräsentiren wird.

Es ist z. B. die volldeutige Quadratwurzel, *Vollwurzel*, aus 3^2 oder 9 die von den beiden Werten 3 und -3 gebildete Gattung von Zahlen:

$$\sqrt{\!\!\sqrt{9}} = \begin{cases} 3 \\ -3 \end{cases}, \quad \text{oder kürzer ausgedrückt:} \quad \sqrt{\!\!\sqrt{9}} = \pm 3.$$

Und wollen wir blos ausdrücken, dass 3 einer (der eine) von diesen beiden Werten ist, ein andermal vielleicht, dass — 3 ein solcher (der andere) ist, so ist es nur mehr zulässig, hiefür zu schreiben:

$$3 \subset /\!\!\!\sqrt{9} \quad \text{und} \quad -3 \subset /\!\!\!\sqrt{9}$$

— Behauptungen, die jetzt, weil sie korrekt sind, nicht mehr zu obigem Fehlschlusse verleiten können.

In diesem sowie in fast allen andern Beispielen derselben Art, die wir bilden mögen, besteht zwischen der volldeutigen Quadratwurzel und irgend einem ihrer Werte wirklich die Beziehung der Unterordnung, nämlich die Unterordnung des Individuums unter eine umfassendere Klasse, zu der es gehört. Will man nun aber diese Wahrnehmung generalisiren, dieselbe für eine ganz beliebige Zahl a aussprechen, so darf man gleichwol nicht sagen, es sei

$$a \subset /\!\!\!\sqrt{a^2} \quad \text{und} \quad -a \subset /\!\!\!\sqrt{a^2},$$

aus dem Grunde, weil diese Aussagen eine Ausnahme erleiden würden, nämlich für $a = 0$ falsch werden. Da $+0$ und -0 einerlei sind, so hat, wenn unter a die Null verstanden wird, auch die volldeutige Quadratwurzel aus a nur mehr *einen* Wert, den Wert 0; die als ihr „Generalwert" zu bezeichnende Klasse schrumpft hier in ein einziges Zahlindividuum zusammen (sie ist diesmal ausnahmsweise auch wirklich *ein* „Wert") und es ist:

$$0 = /\!\!\!\sqrt{0},$$

gleich, aber nicht untergeordnet.

Allgemein, für jede beliebige Zahl a, gilt daher weder die Unterordnung, noch die Gleichung, sondern in der That nur die Subsumtion:

$$a \subseteq /\!\!\!\sqrt{a^2} \quad \text{und ebenso} \quad -a \subseteq /\!\!\!\sqrt{a^2}.$$

Und ähnlich ist auch bei den höheren Wurzeln in der Buchstabenrechnung das Subsumtionszeichen anzuwenden der Allgemeingültigkeit zuliebe.

Allerdings wählt die Mathematik von den eventuell beiden unter die Klasse $/\!\!\!\sqrt{a}$ fallenden Werten frühzeitig den einen als den sogenannten *Hauptwert* aus und zwar — bei positivem Radicanden, im Gebiete der reellen Zahlen — den positiven, den sie schlechtweg mit $\sqrt{a}$ bezeichnet, sodass z. B. $3 = \sqrt{9}$ der Hauptwert und $-3 = -\sqrt{9}$ der Nebenwert der Quadratwurzel aus 9 sein wird. Und indem sie fortan vorzugsweise mit diesen eindeutigen oder Hauptwerten operirt, das Rechnen mit vieldeutigen Ausdrücken nach Möglichkeit vermeidet, flieht die Mathematik sozusagen die Gelegenheiten, wo sie ein spezifisch *logisches* Beziehungszeichen anwenden müsste. Ähnlich, wie in diesen ersten und einfachsten Fällen, verfährt die Mathematik auch später wieder bei den mehrdeutigen analytischen Elementarfunktionen, d. i. den logarithmischen, cyklometrischen und allgemeinen Potenzfunktionen: sie wendet sich möglichst bald von deren Generalwerten ab und den eindeutigen Zweigen dieser Funktionen als den erwählten Hauptwerten derselben zu, hauptsächlich wol, um nicht einen komplizirteren Zeichenapparat, nämlich noch andere als die drei Zeichen

der Grössenvergleichung ($=$, $>$, $<$) verwenden zu müssen, dergleichen in der That bis jetzt auch keines ganz allgemein rezipirt erscheint.

Aber nicht nur zur Darstellung der Beziehungen zwischen *vieldeutigen Zahlenausdrücken* sollte eigentlich das Subsumtionszeichen allgemeinere Verwendung finden, sondern auch noch auf zahlreichen anderen Untersuchungsgebieten, wo sich einstweilen noch jeder Autor seine eigene bisweilen recht schwerfällige Terminologie schafft behufs Darstellung von Beziehungen, die einfach als eine „Einordnung“ zu charakterisiren wären.*)

Wählten wir nun für die Unterordnung das Zeichen $<$ selbst, so würden zahlreiche Missverständnisse ebendadurch nahe gelegt werden. Wir können auch bei Zahlengattungen A und B, also bei vieldeutigen Ausdrücken, das Zeichen $<$ in seinem *ursprünglichen* Sinne verwenden, um mittelst der Relation $A < B$ auszudrücken, dass jede Zahl der Gattung A *kleiner* sei als jede Zahl der Gattung B. Doch wenn wir auch absehen wollen von der Zulässigkeit dieser immerhin seltneren Verwendungsweise, so sieht man doch den in einer Formel beiderseits stehenden Ausdrücken nicht immer an, ob sie uns *einen* oder ob sie mehrere Werte repräsentiren sollen, wo doch im ersteren Falle das Zeichen $<$ eine ganz andere Deutung zu erhalten hätte. Bei allen allgemeinen Untersuchungen über Zahlenklassen, vieldeutige Ausdrücke, muss man vielmehr als Grenz- oder Degenerationsfälle auch diejenigen besondern Fälle mit unterlaufen lassen, wo die vieldeutigen in eindeutige Ausdrücke ausarten, wo die Klassen auf je ein Individuum zusammenschrumpfen. Zwischen zwei Zahlindividuen, eindeutigen Zahlzeichen, ist die eigentliche Unterordnung unmöglich, undenkbar, denn das zweite Individuum müsste dann eine Klasse sein, die ausser dem ersten noch andere Individuen enthält im Widerspruch zu der Annahme, dass sie nur eines enthalte, nämlich eine „singuläre“ Klasse sei. Sind A und B dergestalt eindeutige Zahlzeichen, so könnte die Subsumtion $A \,{=}\!\!\!\!{\in}\, B$, in der Gestalt der Relation $A \leq B$ geschrieben, doch nur als *Gleichung* gelten, es müsste dann $A = B$ selbst sein. Als *Behauptung*

---

*) Ich will in dieser Richtung wenigstens auf Einiges aufmerksam machen und wende mich damit vorzugsweise an Mathematiker: Herrn Georg Cantor's berühmte Untersuchungen über die Mannigfaltigkeitslehre beschäftigen sich mit Beziehungen zwischen Punktmengen, bei denen die Subsumtion eine wesentliche Rolle spielt und durch entsprechende Verwendung ihres Zeichens sich erhebliche Vorteile im Sinne knapper Darstellung erzielen lassen würden. Ebenso könnten die epochemachenden Untersuchungen von Dedekind über allgemeine Zahlentheorie[3] (Supplement XI) sowie die Anwendungen der dort eingeführten Begriffe auf die Theorie der algebraischen Funktionen, wie sie Dedekind und Weber in ihrer Abhandlung in Bd. 92 des Crelle'schen Journals gegeben haben, wol übersichtlicher dargestellt werden, wenn statt des Begriffs der Teilbarkeit stets der der Einordnung und das Subsumtionszeichen benutzt würde Dabei würde auch der für das Studium störende Umstand vermieden, dass bei *Moduln* der Teiler dem Geteilten übergeordnet ist — ein Umstand, auf welchen ich durch Herrn Lüroth aufmerksam gemacht worden. Nicht minder dürfte dieses Zeichen bei der Begründung von Herrn Schubert's genialem Kalkül der abzählenden Geometrie mit Vorteil zu verwenden sein, sowie auf andern Gebieten mehr.

hingestellt, würde jene Relation dann allerdings noch richtig bleiben, jedoch weniger sagen, wenn man das Zeichen $<$ in $\leq$, statt als „untergeordnet", nun als „kleiner" interpretirte. Sooft aber solche Relation $A < B$ als *Voraussetzung* hinzustellen wäre, müssten die beiden fraglichen Interpretationen von $<$ einen Unterschied geben: es wäre im erstern Falle die Annahme „A kleiner als B" durch die Relation ausgeschlossen, im zweiten aber zugelassen. Und anderes mehr.

Unstreitig wird es also praktischer sein, für die Unterordnung ein von dem Zeichen $<$ *verschiedenes* Zeichen zu wählen. Wenn nun dieses fragliche Zeichen mit Rücksicht auf die Anforderung, dass dasselbe beim Vor- und Rückwärtslesen mnemonisch interpretirbar sei, ebenfalls zwei divergirende Äste besitzen soll, so müssen dieselben gekrümmt genommen werden, und bleibt (bei Wahrung der Symmetrie des Zeichens in vertikaler Richtung, d. i. um die horizontale Axe) gewissermassen nur die Möglichkeit übrig, dasselbe dem von uns gewählten *Parabel-* (oder Hyperbel)bogen ähnlich zu gestalten — in Anbetracht, dass ein Zeichen wie

$$\prec$$

bereits vergeben erscheint, nämlich nach Paul Du Bois Reymond's Vorschlag eine eigentümliche Verwendung zur Darstellung infinitärer Beziehungen bereits gefunden hat und auch am besten findet.

Man könnte höchstens noch unserm Zeichen anstatt des Scheitels eine Ecke geben: $\subset$, wodurch es sich aber weniger deutlich von dem Zeichen $<$ abheben würde — ein Punkt indess, über den ich mit niemand streiten will. [Verwendeten wir statt des Parabelbogens einen *Kreis*bogen, so würde dadurch ein oft störender Parallelismus mit etwaigen Klammerhaken der hinter das Zeichen tretenden Ausdrücke bewirkt werden.]

Das Zeichen $⋹$ wurde 1873 von mir eingeführt[1]. Umfassende Anwendungen von den durch dasselbe ausgedrückten Beziehungen der Subsumtion möchten wol l. c. zum ersten mal auf (sozusagen) extralogischem Gebiete gemacht sein. Ich habe jenes mit noch einem andern Zeichen, auf das wir einzugehen haben werden, daselbst verwendet, um ein geschmeidiges Rechnen mit vieldeutigen Zahlenausdrücken auszubilden, Prinzipien und Methoden für solches zu entwickeln.

Herr Peirce verwendet dafür das in Amerika bereits ziemlich eingebürgerte Zeichen

$$-\!\!<,$$

welches allerdings drei Jahre früher von ihm eingeführt worden ist; doch haben *vor* ihm auch Augustus De Morgan und Andere sich schon besondrer von den angeführten differirender Zeichen für die gedachte Beziehung bedient.

Ich meine, dass nicht Rücksichten auf die mehr oder weniger zufällige Priorität eines Bezeichnungsvorschlages, sondern lediglich sachliche Zweckmässigkeitsrücksichten den Ausschlag dafür geben sollten, welcher Vorschlag etwa allgemein anzunehmen wäre. In dieser Beziehung könnte ich schon die vorstehende Auseinandersetzung für sich selbst reden lassen. Besonders möchte ich jedoch noch darauf aufmerksam machen, dass ein vorgeschlagenes Beziehungszeichen nicht blos *für sich allein* in Betracht zu ziehen ist, sondern

auch als ein Glied eines vollständigen Systems von Zeichen für *sämtliche* logischen Grundbeziehungen. Sollten letztere — immerhin, wie wir sehen werden, *zehn*, oder, wenn man die vor- und rückwärts verschieden aussehenden gesondert zählt, *vierzehn* an Zahl — überhaupt planmässig, rationell bezeichnet werden — und dies erscheint bei ihrer grossen Anzahl durchaus wünschenswert — so wird sich zeigen lassen, dass mein Vorschlag nicht nur zweckentsprechend, sondern auch fast der einzige ist, der thunlich erscheint. Vergl. die spätere Besprechung der sämtlichen Zeichen in § 34 sq.

Jedenfalls dürfte sich's empfehlen, auf die Gestaltung neu einzuführender Zeichen eine grosse Sorgfalt zu verwenden. Denn ist ein ungeschickt gewähltes Zeichen einmal wirklich eingebürgert, so möchte wol eine Abhülfe kaum minder schwierig durchzuführen sein, als etwa der Plan, den Schienenweg, Fahrdamm einer unzweckmässig gelegten Eisenbahnlinie wieder in fruchtbares Ackerland zu verwandeln!

Ich schliesse diesen Exkurs mit der Aufführung eines in der Übersetzung von mir etwas gemilderten Ausspruchs von A. De Morgan, nach Peirce's von mir geteilter Ansicht, eines der scharfsinnigsten Logiker, die existirten. Derselbe stellt am Schlusse seines Syllabus[3] die beiden folgenden Thatsachen einander gegenüber.

Erstens: die Logik ist die einzige Disziplin, welche seit dem Wiederaufleben der Wissenschaften (since the revival of letters) keine entsprechenden Fortschritte gemacht hat.

Zweitens: die Logik, ganz allein, hat keinen Zuwachs an Zeichen (symbols) hervorgebracht.

Er sagt geradezu „*keine* Fortschritte", was bekanntlich auch Kant mit aller Schärfe behauptet.

§ 2. Vorläufige Betrachtungen über Darstellbarkeit der Urteile als Subsumtionsurteile.

Es erübrigt uns noch, nachzusehen, inwiefern *jedes* Urteil als ein „Subsumtionsurteil" angesehen werden kann. Zunächst wenigstens wird dies für die kategorischen Urteile zu zeigen sein.

Für nicht-kategorische, nämlich die aus verschiedenen Teilsätzen mittelst Konjunktionen — wie: *„wenn .., so .."*, *„entweder .., oder"*, *„weder .., noch"*, *„nicht nur .., sondern auch .."*, *„folglich"*, *„weil"*, und andere — zusammengesetzten Urteile kann erst im Lauf der Entwickelung unsrer Theorie nach und nach dargethan werden, dass und auf welche Weise sie ihrem logischen Gehalte nach vollständig darstellbar sind mit Hülfe des Subsumtionszeichens selbst oder auch anderer Zeichen, deren Bedeutung jedoch auf den Subsumtionsbegriff zurückführbar ist, welche sich in der That aus dem letztern ableiten, auf Grund desselben definiren lassen.

Als „Ding" oder Objekt des Denkens, von welchem in einem Satze etwas ausgesagt wird, und welches demnach dessen „Subjekt" bildet, kann auch ein selber als Satz formulirtes *Urteil* auftreten und ebenso kann dasjenige, was von jenem prädizirt wird, bestehen in der Hervor-

hebung einer Beziehung, in der ein zweites Urteil zu jenem ersten steht. Dergleichen Urteile, welche anstatt von beliebigen andern Dingen zunächst selbst wieder nur von *Urteilen* handeln, nehmen in der Lehre von den Urteilen eine bevorzugte, eine Sonderstellung ein.

Dahin gehören vor allem die sog. *„hypothetischen"* (vergl. § 28) und die *„disjunktiven"* Urteile (vergl. § 15 und 31), ferner aber auch Urteile, welche, indem sie z. B. Verba wie „können" oder „müssen", oder Adverbia, wie „vielleicht" etc. enthalten, auf die Möglichkeit oder Notwendigkeit der Zulassung eines gewissen Urteils hinweisen, im Grunde also auch nur von diesem selbst etwas unmittelbar prädiziren, erst mittelbar auch über die Dinge aussagen, welche dieses Urteil betrifft (vergl. § 54); endlich gehören dahin die im Sinne Sigwart's aufgefassten „verneinenden" Urteile (Urteilsverneinungen — vergl. § 15 und 31).

Alle solchen Urteile werden von Boole *sekundäre* oder Urteile der zweiten Klasse genannt und gegenübergestellt den *primären* oder Urteilen der ersten Klasse (zu denen im allgemeinen die kategorischen gehören), welche nämlich nicht implicite erst von Urteilen sondern sogleich von den Dingen selbst handeln. Als die einfacheren haben wir vorerst nur diese letzteren zu betrachten.

Auch für die kategorischen Urteile müssen wir jedoch im Hinblick auf den fast unerschöpflichen Reichtum der Wortsprache und ihrer Ausdrucksmöglichkeiten darauf verzichten, die Aufgabe der Erbringung fraglichen Nachweises hier mit dem Anspruch auf formelle Vollständigkeit zu lösen. Wir begnügen uns — und dies dürfte auch genügen — an der Hand einiger Beispiele nur für die vornehmsten Ausdrucksformen der Sprache zu erläutern und Anleitung zu geben, in welcher Weise die Darstellung zu vollziehen ist.

Besonders kommt es dabei uns noch darauf an, das Verfahren auch gegen unbillige Beurteilung in Schutz zu nehmen.

Im Urteil gibt sich ausser dem, was wir seinen „logischen Gehalt" nennen, oft ein gutes Teil von Stimmung, Gefühl und Absicht, Streben des Redenden kund und ruft Verwandtes (oder auch Entgegengesetztes) hervor in dem, der es vernimmt. Je nach der Form seiner sprachlichen Einkleidung bleibt dabei oft mancherlei *„zwischen den Zeilen zu lesen"* (vergl. des Dichters: „Was er weise verschweigt, zeigt mir den Meister des Stils" sowie das geflügelte Wort: „Man merkt die Absicht und man wird verstimmt" u. a.). Es legt der Satz häufig Nebengedanken nahe, auf deren Gestaltung schon die Art und Weise seiner Betonung von grossem Einfluss sein kann; gewisse Gedanken bereitet der Satz vor zu leichterer Erweckung, wofern er sie nicht selbst schon völlig wachruft, für andere präjudizirt er hemmend und vorbeugend.

Man wird z. B. dessen inne, wenn man im nächsten besten (Frage)-Satze die Emphase, den Nachdruck der Reihe nach auf's erste oder aber zweite u. s. w. bis letzte Wort legt.

Z. B. „.. Wenn Sie den Mut haben!“ „Hat er die Lisette geheiratet?“ Etc.

Ich will dabei nicht reden von Fällen, wo die Betonung geradezu den Sinn des Satzes selbst verändert, wie der bekannte Ausspruch: „von *der* Seite kannt' ich dich noch nicht“ dies erfuhr, als ein schlechter Schauspieler mit der Betonung: „von der *Seite* kannt' ich dich noch nicht“ denselben deklamirte. Ich will nur reden von den Wirkungen des Satzes, die unbeschadet seines logischen Gehaltes nebenher gehen können. So sagt z. B. der Ausdruck „Meine Wenigkeit“ logisch nicht mehr als „ich“; ersterer aber hat einen Beigeschmack von affektirter Bescheidenheit. Etc.

Von einem mitunter ganz beträchtlichen Teil dieses lebendigen Inhaltes, des *„psychologischen Gehalts“* des Urteils sieht ohnehin die Logik ab — nicht nur die unsrige, die Logik des Umfanges, sondern die Logik überhaupt. Diese kümmert sich um das Urteil nur insofern, als es mit dem, was es ausdrücklich ausspricht, wahr oder falsch ist, resp. durch die Konsequenz zu denken geboten oder weiteres zu denken nötigend.

Wie aber der *„logische Gehalt“* des Urteils hienach nur als ein Auszug, ein Excerpt aus dessen *sprachlich angedeutetem Gehalte* erscheint, so verhält sich wol auch schon dieser zu dem ihm zugrunde liegenden *Gedanken* und mag der Dichter (Victor v. Scheffel) recht haben, wenn er sagt:

„Die Sprache ist ein edel Ding,
Doch hat sie ihre Schranken;
Ich glaub', noch immer fehlt's am Wort
Für die feinsten und tiefsten Gedanken.“

Dieser Auffassung gemäss soll nun auch nicht behauptet sein, dass durch die beabsichtigte Darstellung eines Urteils als *Subsumtion* dasselbe etwa nach seiner *psychologischen* Natur genauer dargelegt, dass es damit in irgend einer andern als eben nur der *logischen* Hinsicht angemessener oder besser dargestellt werde!

Als Beispiel betrachte man das Urteil: „Die Wanderheuschrecken haben ihre Ohren an den Waden“. Wir bestehen darauf, dass dieses logisch äquivalent ist mit dem Satze: „Die Klasse der Wanderheuschrecken ist enthalten in der Klasse der Geschöpfe (Wesen oder überhaupt „Dinge“), welche (ihre) Ohren (Gehörorgane) an (den) Waden tragen“. Keineswegs jedoch soll damit etwa unterstellt oder für die Auffassung plädirt werden, als ob der Hörer in seinem Geiste bereits vorgebildet habe die Vorstellung einer Klasse von Wesen, die das Gehörorgan an der unteren Hälfte der Extremitäten besitzen, und dass er nun, nachdem er durch das Urteil von der Thatsache in Kenntniss

gesetzt ist, in diese vorrätige Klasse auch einfach diejenige der Wanderheuschrecken „einordne".

Im Gegenteil: die Thatsache wird wol den meisten Lesern überraschend und neu sein, so wie es z. B. auch in weiteren Kreisen unbekannt sein mag, dass eine Krebsart, Mysis, das Gehörorgan sogar an den Schwanzflossen trägt. Ein solches Urteil wird uns nicht schon im Besitz der Prädikatklasse antreffen, sondern uns höchstens Veranlassung werden, dass wir eine solche Klasse erst aufstellen. Wesentlich wird jenes Urteil nur unsern Begriff von den Wanderheuschrecken berichtigen oder vervollständigen, uns nötigend, diese Tiere, während wir bislang bei ihnen an Gehörorgane vielleicht niemals gedacht haben, fortan mit Trommelfellen, Tympanums, zu beiden Seiten jedes Schienbeins*) ausgestattet zu denken.

Auch der sprachliche Ausdruck unsrer als Beispiel gewählten Aussage ist durch die Umschreibung nur schwerfälliger geworden. Unstreitig aber gibt diese Umschreibung doch die nämliche Information wie die ursprüngliche Aussage, und ihr Vorzug besteht darin, dass sie die Beziehung zwischen dem Subjekt- und dem Prädikatbegriffe rein *nach deren Umfangsverhältnisse* darstellt, wodurch diese Beziehung in der auf das *Subsumtions*zeichen gegründeten *Zeichensprache*, in Gestalt von $a \Subset b$, nunmehr *ausdrückbar wird.* Und die Vorteile solcher Ausdrucksweise — wo immer es sich um logische Fragen handelt — werden im weiteren Verfolg unsrer Theorie genugsam zutage treten.

Ähnliche Bemerkungen, wie an das Vorhergegangene, würden nun auch mutatis mutandis an manche der nachfolgend anzuführenden Beispiele sich anknüpfen lassen; indess werden wir nicht mehr ausdrücklich darauf hinweisen.

Eines aber sei hier noch hervorgehoben: in Bezug auf *verneinende* Urteile.

Es ist geltend gemacht worden, die durch eine Verneinung geforderte permanente Sonderung, Auseinanderhaltung oder *Trennung* von Merkmalen sei so wesentlich verschieden von der durch ein bejahendes Urteil angeregten *Verknüpfung* solcher, dass es keinen Wert habe, beide Operationen unter demselben Gesichtspunkt zu betrachten, unter ein gemeinsames Schema sie zu bringen. Dies aber dürfte doch absprechend, vorschnell geurteilt sein.

Sagen wir z. B. „das Wasser sei nicht zusammendrückbar (inkompres-

*) Diese Ausdrucksweise ist begreiflich eine anthropomorphistische. Bei Insekten, Heuschrecken von „Waden" zu reden ist jedoch in der Zoologie rezipirt.

sibel)", so fordern wir psychologisch, dass die Vorstellung, das Merkmal der Zusammendrückbarkeit, wie es elastischen und namentlich elastisch flüssigen Körpern zukommt, ausgeschieden werde aus dem Begriff des Wassers, falls es etwa irrtümlich in denselben aufgenommen worden sein sollte, und andernfalles, dass diese Vorstellung seiner Bildung wenigstens fern bleibe, dass sie nicht in die Vorstellung des Wassers eingehe.

Nun lässt auch dieses Urteil als eine Subsumtion sich ansehen, besagend, dass die Klasse der als „(flüssiges) Wasser" zu bezeichnenden Dinge *enthalten sei in, gehöre zu* der Klasse der nicht zusammendrückbaren Substanzen oder Dinge.

Diese Umformung des Urteils geschieht auch hier der logischen Technik zuliebe und sie hat den gleichen Wert wie in den übrigen Fällen; sie wird erforderlich sobald man auf die Umfangsbeziehungen zwischen dem Subjekt- und dem Prädikatbegriffe reflektiren will (und zwar, wie man später sehen wird, einerlei, ob man als letzteren das Merkmal der Zusammendrückbarkeit oder aber das der Inkompressibilität gelten lassen mag).

Und solcher Reflexion kann ein wissenschaftlicher Wert ebensowenig abgesprochen werden, als etwa der einseitigen Hervorhebung der chemischen Zusammensetzung (oder vielleicht der Gewichtsverhältnisse) von Substanzen, deren eine aus den andern als eine Verbindung hervorgeht.

Des weiteren wären hiezu noch die unter δ_3) der Einleitung angestellten Betrachtungen heranzuziehen.

Man wird finden, dass, wer da gegen das Verfahren der Logik des Umfanges eifert, allemal dabei aus der Rolle des Logikers eigentlich herausfällt, nämlich anstatt daran festzuhalten, dass es dieser um *normative* Bestimmungen, um einen *Kanon* des Denkens zu thun sein muss, sich (unbewusst) auf den Standpunkt stellt, als ob es vielmehr ankäme auf eine naturwissenschaftliche Analyse der psychologischen Vorgänge beim wirklichen Denken. Namentlich hat die exakte Logik oft Veranlassung, sich von der Sprachform zu befreien; „denn wie sehr auch die letztere — sagt treffend Fr. A. Lange[1] p. 94 — sich dem natürlichen und gewöhnlichen Denken anschmiegt, so ist es doch nicht Sache der Logik, dieser Natürlichkeit zu huldigen, sondern vielmehr zu scheiden und klar zu stellen, was wirklich logisch ist in den Gebilden der Sprache und was nicht."

Nach diesen Vorbemerkungen können wir unsrer eigentlichen Aufgabe, die nun erhebliche Schwierigkeiten nicht weiter darbietet, jetzt näher treten.

Zunächst gibt es Fälle, wo die Subsumtion (auch) *nicht den vollen* (logischen) *Inhalt des kategorischen Urteils wiedergibt.*

Dies tritt dann ein, wenn in dem Urteil ein Fingerzeig enthalten ist, ob die Kopula Unterordnung oder ob sie Gleichheit bedeutet, wenn das Urteil selbst die eine von diesen beiden Interpretationen ausschliesst. Sagen wir z. B.

„1001 ist eine von den durch 11 und 13 teilbaren Zahlen", oder auch:

„Santorin ist *eine von den* zahlreichen Inseln im griechischen Archipel", so erscheint zwischen Subjekt und Prädikat die Beziehung der identischen Gleichheit ausgeschlossen, und drückt das Urteil eine wirkliche *Unterordnung* aus. Es wird hier eben im Urteil selbst das Prädikat als eine *Mehrheit* von Individuen gegenüber dem als eine *Minderheit* (vorhin sogar als nur *ein* Individuum) sich darstellenden Subjekte hingestellt.

Sehen wir dagegen das Prädikat *mit dem bestimmten Artikel* verbunden (der allerdings, wie schon erwähnt, in manchen Sprachen, wie im Lateinischen und Russischen fehlt), oder wird — was wesentlich auf dasselbe hinauskommt — das Prädikat mit dem hinweisenden Fürwort (pronomen demonstrativum) „der-, die-, dasjenige" (im Plural „diejenigen") eingeleitet, so beansprucht und erhält die Kopula die assertorische Kraft des *Gleichheitszeichens*, versichert die Identität zwischen Subjekt und Prädikat und schliesst die Unterordnung aus. Z. B.

„Gerade Zahlen (noch deutlicher: *Die* geraden Zahlen) sind *die* durch 2 teilbaren Zahlen."

„(Die) Primzahlen sind *diejenigen* Zahlen, welche zwei und nur zwei Teiler haben."

„N. N. ist der Dieb (sc. welcher den vermissten Gegenstand entwendete)."

„Iridium ist das schwerste Metall."

„Jener Herr ist sein Vater" (soll heissen: *der* Vater dieses Herrn). Etc.

Hierher gehören auch die Fälle, wo das Prädikat ein Eigenname ist, also nicht — wie es sonst als die Regel erscheint — einen allgemeinen Begriff, sondern etwas Individuelles, ein spezielles Objekt des Denkens bezeichnet, z. B.

„Dieser Fluss ist der Rhein." „Diese Stadt ist Berlin." „Der Dichter jener Ode war Horaz."

In dieser besondern Art von „singulären" Urteilen drückt die Kopula ebenfalls die Identität des Subjektes mit dem Prädikate aus.

Dasselbe gilt von Aussagen wie „2 mal 2 ist 4", wo das Prädikat ein Zahlenindividuum ist und die Kopula die Versicherung der arithmetischen Gleichheit zwischen Subjekt und Prädikat gibt, die hier übrigens mit der identischen Gleichheit in gewissem Sinne zusammenfällt (sofern es üblich ist, alle einander gleichen Zahlen durch ein einziges den Zahlenort markirendes Zahlenindividuum vertreten zu lassen).

Zu den hiermit gekennzeichneten Fällen treten noch solche von spezieller em Charakter hinzu, die man passend als die „Grenzfälle" bezeichnen kann, wo nämlich „nichts" oder „etwas" resp. „alles" als Subjekt, beziehungsweise Prädikat auftritt (wie z. B. bei dem Satze: „dies ist alles"). Diese werden wir erst in einer späteren Vorlesung (§ 9) berücksichtigen.

Wird das Subjekt mit a, das Prädikat mit b bezeichnet, so ist $a \subset b$ der volle Sinn der Aussagen ersterer und $a = b$ derjenige der Aussagen letzterer Art. In beiden Fällen gilt also gewiss die Subsumtion $a \subseteq b$

und drückt wenigstens einen Teil des (logischen) Inhalts unsrer Urteile richtig aus.

Zu derselben muss aber, um die Urteile vollständig wiederzugeben, noch etwas hinzugefügt werden, und zwar in dem zweiten, dem Falle der Gleichheit $a = b$, wo eben das Urteil auch umgekehrt gilt, invertibel oder reziprokabel erscheint, ist zu der Subsumtion $a \neq\!\!\!\in b$ noch eine zweite Subsumtion $b \neq\!\!\!\in a$ hinzuzusetzen.

Was zu der Subsumtion $a \neq\!\!\!\in b$ noch anzumerken ist, damit die Unterordnung $a \subset b$ vollständigen Ausdruck finde, werden wir erst sehr viel später in's Auge fassen (17. Vorlesung.).

Es gehören eben die angeführten Fälle, wenngleich sie in grammatikalischer Hinsicht, d. i. schlechtweg, zu den *einfachen* Urteilen zählen mögen, doch zu den *„in logischer Hinsicht zusammengesetzten“* (so wenigstens vom elementarsten Standpunkte aus betrachtet).

Verweilen wir nur mehr bei den auch im engsten Sinne „einfachen“ Urteilen — das sind diejenigen, in welchen die Frage nach der Umkehrbarkeit des Urteils unbeantwortet gelassen ist — bei welchen also es offen bleibt, ob das durch Vertauschung von Subjekt und Prädikat sich ergebende Urteil gilt oder nicht gilt, nämlich dieser Umstand — wenn auch vielleicht nebenher bekannt oder aus der Sache ersichtlich — doch in dem Urteil selbst nicht ausgedrückt erscheint.

Hier — behaupteten wir — kann man immer Subjekt und Prädikat als *Klassen* auffassen und den logischen Gehalt des Urteils dadurch vollkommen wiedergeben, dass man es interpretirt als die Versicherung (Assertion): Die Subjektklasse *ist* ganz enthalten in der Prädikatklasse. Man wird demnach auch sprachlich durch geeignete Umschreibung — ohne dadurch den logischen Gehalt des Urteils zu alteriren — die Kopula immer auf das Wörtchen „ist“ hinausspielen können.

Hiezu ist es freilich erforderlich, den Begriff der „Klasse“ nicht allzu enge zu fassen.

An schwach besuchten Schulanstalten kann es vorkommen, dass eine Schülerklasse auch einmal nur *einen* Schüler besitzt, vielleicht sogar gar keinen. Analog diesem schon im gemeinen Leben vorkommenden Präcedenzfalle werden wir hier das Wort „Klasse“ immer in solchem Sinne nehmen, so *weit* fassen, dass auch der Fall zugelassen erscheint, wo die Klasse nur *ein* Individuum enthält, sich auf ein solches beschränkt, in ein solches gewissermassen zusammenzieht. Sogar dem „Nichts“ als dem Fall einer gar kein Individuum enthaltenden oder leeren Klasse werden wir späterhin seinen Platz unter den Klassen einräumen.

Im übrigen wollen wir, was unter einer „Klasse“ und was unter einem „Individuum“ zu verstehen sei, zunächst nicht weiter erörtern.

Jedermann versteht, was gemeint ist, wenn man spricht von der Klasse der Säugetiere, einer Klasse, von der jedes einzelne Säugetier ein Individuum vorstellt, oder von der Klasse der Dinge, welche diese oder jene Eigenschaften besitzen. Zum Überfluss mögen hierzu die Betrachtungen unter δ_2) und v_2) der Einleitung nachgesehen werden:

Wir sind im stande irgend welche Objekte des Denkens als „Individuen" zu einer „Klasse" zu vereinigen („zusammenzufassen").

Allein nur (scheint es) *einander* (unmittelbar) *widersprechende* Sätze, je mit der Überzeugung von ihrer Richtigkeit verbunden, machen hievon eine Ausnahme. Kann auch jeder, für sich, für wahr gehalten werden, z. B. der Satz: „Der Mond ist bewohnt", sowie der Satz: „Der Mond ist unbewohnt", so können sie doch nicht zusammengefasst werden zu einer „Klasse von Wahrheiten".

Und auch *ein* Individuum mögen wir bezeichnen als eine Klasse, welche eben nur dieses Individuum selbst enthält. Ein jedes Gedankending kann zu solchem Individuum gestempelt werden.

Dem wissenschaftlichen Begriff des Individuums werden wir indess gelegentlich noch näher treten (22. Vorlesung).

Auch jene Klasse aber, die selber eine Menge von Individuen umfasst, kann wieder als ein Gedankending und demgemäss auch als ein „Individuum" (im weiteren Sinne, z. B. „relativ" in Bezug auf höhere Klassen) hingestellt werden. Wenn wir jedoch von einem Individuum „im absoluten (engeren) Sinne" reden, so verstehen wir darunter ein Objekt des Denkens, dessen Name als ein Eigenname und nicht als ein Gemeinname gehandhabt wird (vergl. den Teil B unsrer Einleitung).

Nach dem Gesagten kann das Subjekt des Urteils, wenn es ein Hauptwort ist, ohne weiteres als eine Klasse aufgefasst werden, desgleichen, wenn dieses Hauptwort etwa durch Beiwörter oder Relativsätze näher bestimmt, determinirt erscheint.

Dasselbe ist der Fall, wenn das Subjekt aus mehreren durch Konjunktionen, wie „und", „oder", „sowie" etc. verbundenen Substantiven oder Nomina besteht. Z. B. „Gold und Silber sind Edelmetalle" heisst: Jede als Gold oder Silber sich erweisende Substanz ist ein Edelmetall; die Klasse jener Substanzen ist enthalten in der Klasse dieser, der Edelmetalle. Den logischen Gehalt der meisten Konjunktionen werden wir übrigens noch zum Gegenstand eines speziellen Studiums machen, und ist zu empfehlen, dass man namentlich die Betrachtung von Sätzen wie: „*Entweder a oder b* ist *c*", „*Weder a noch b* ist *c*" vorerst zurückstelle. Zur Stelle auf diese einzugehen würde später nur zu Wiederholungen uns nötigen.

Nachdem unter ξ_1) der Einleitung der Gebrauch von Wörtern in der „suppositio nominalis" ausgeschlossen worden, konnte als Subjekt des Urteils

nur mehr auftreten ein Hauptwort, Pronomen, oder Verbum; auch kann das Subjekt durch einen Relativsatz vertreten sein.

Von Verben wird häufig die Infinitivform auch substantivisch gebraucht und kann als Subjekt eines Satzes stehen, wie z. B. in „Schwimmen ist eine Kunst", wo „Schwimmen" auch durch „das Schwimmen" ersetzbar ist — im Englischen steht die Partizipialform „swimming", im Französischen das Hauptwort „la nage". Offenbar wird hier etwas ausgesagt von einer Klasse menschlicher Thätigkeiten resp. Fertigkeiten, nämlich vom Schwimmen; von ihr wird behauptet, dass sie *enthalten* sei in der Klasse derer, die „eine Kunst" sind, d. i. eigens erlernt und durch Übung gefestigt werden müssen von Jedem, der sie erlangen will. Vergl. auch „Tadeln ist leicht, schwerer ist Besser-machen"; d. i. (die Thätigkeit des) Tadeln(s) gehört zu der Klasse der „leicht" auszuübenden Thätigkeiten, in diesem dem übertragenen Sinne überhaupt zur Klasse der „leichten Dinge". Man sieht an diesem Beispiele, wie die Einschaltung eines solchen im Urteil selbst gar nicht erwähnten Hülfsbegriffes, hier desjenigen der „Thätigkeit", erforderlich werden kann, um dem Doppelsinn des Prädikatnamens zu steuern, einer falschen Deutung desselben vorzubeugen. Im letzten Teil des Satzes geht das Prädikat dem Subjekte voran: Etwas besser machen (als es gemacht worden ist) ist enthalten in der Klasse der Thätigkeiten (resp. Dinge), welche schwerer sind (im übertragenen Sinne) als das Aussprechen eines Tadels über die erfolgte Ausführung. Etc.

Desgleichen kommen im Deutschen als Subjekt von Sätzen auch Verba vor im Partizip, wie in: „Vorgethan und nachbedacht hat Manchen in gross Leid gebracht". In diesem Sprüchwort ist das Subjekt offenbar die Klasse der Fälle, in welchen ein Mensch erst *nach* impulsivem Handeln über dieses nachdachte. Es ist von dieser Klasse behauptet, dass sie enthalten sei in der Klasse derjenigen Handlungen, die ihrem Urheber grosses Leid brachten — aber, müssen wir hinzufügen, *nicht ganz*, sondern nur zu einem ansehnlichen Teile, denn durch das unbestimmte, hier als Pronomen stehende Zahlwort „Manchen" ist das Urteil obendrein zu einem *„partikularen"* gestempelt, so wie es anderwärts auch durch den Beisatz von Adverbien, wie „manchmal, bisweilen, oft, häufig, selten, nicht immer" etc. zum Prädikate zu geschehen pflegt. Die eigentliche Subjektklasse ist hier jener unbestimmte Teil der angeführten Klasse.

Auch in den Fällen, wo ein Relativsatz das Subjekt des Satzes vertritt, wird nun der Leser leicht das Urteil nach dem Umfangsverhältnisse vom Subjekt- und Prädikatbegriffe analysiren. Die Beispiele: „Was uns im innersten erregt, pflegt bleibenden Eindruck zu hinterlassen", sowie Schiller's „Was kein Verstand der Verständigen sieht, das übet in Einfalt ein kindlich Gemüt" mögen dazu anregen. Beide sind „partikulare" Urteile, worauf im ersten Satze das Verbum „pflegt" hinweist: Subjektklasse wird hier sein der *grössere Teil* der Erlebnisse, welche eine tiefgehende Emotion verursachen. Das zweite Urteil ist allerdings nicht der Form nach als partikular anzusehen, sondern nur im Sinne des Dichters, wofern man demselben nicht eine viel zu weit gehende Behauptung in den Mund legen will.

Abgesehen von Fällen der erwähnten Arten haben wir es beim Subjekt nur mehr mit einem Hauptwort oder aber Fürworte zu thun.

Dass ersteres eine Klasse vorstellt, wurde bereits dargethan. Es sind hiezu nur noch ein paar Bemerkungen angezeigt im Hinblick auf dessen etwaige Begleitworte.

Ausser Adjektiven und Relativsätzen können mit dem Hauptwort auch noch verbunden sein irgendwelche Zahlwörter (numeralia). Z. B. „4 Birnen und 3 Äpfel liegen auf dem Tische", „Der dritte und der fünfte Mann soll vortreten", etc. Nun dann kennzeichnet sich das Subjekt ohne weiteres als eine Klasse (sogar im engsten Sinn dieses Wortes).

Ähnlich verhält es sich, wenn sogenannte unbestimmte Zahlwörter (numeralia indefinita) mit dem Hauptworte verbunden sind. Solche sind z. B. „*einige* (etliche), manche, mehrere, viele, wenige, häufige, die meisten, gewisse", etc.; und die Anwendung dieser stempelt, wie schon unter $\varkappa_2$) der Einleitung erwähnt, das Urteil zu einem sog. „besondern" oder *„partikularen"* — im Gegensatz zum „allgemeinen" oder *„universalen"* Urteile, in welchem das Subjekt als Ganzes angeführt oder von dem unbestimmten Zahlwort „alle", in der Singularform vom adjektivischen Pronomen „jeder", „irgend ein" begleitet erscheint.

Sagen wir: „Einige Menschen sind klug", so ist das Subjekt eine Klasse, bestehend aus einer unbestimmten Anzahl, aus „einigen" Menschen und diese Klasse wird hingestellt als ganz enthalten in der Klasse der „klugen" Wesen. Bezeichneten wir die erstere Klasse mit a', die letztere mit b, so hätten wir auch hier eine Subsumtion: $a' \subseteq b$.

Wenn wir nun ferner die Klasse der nicht-klugen (eventuell unklugen) Wesen mit b_1 bezeichnen, so dürfen wir aber das ebenfalls richtige Urteil „Einige Menschen sind nicht klug" jetzt durchaus nicht mit $a' \subseteq b_1$ darstellen, weil das Subjekt dieser letzteren Aussage, obwol in Worten gleichlautend, homonym benannt, doch ein ganz anderes ist, als das der vorigen. Hierdurch würde nämlich ein Doppelsinn des Symboles a' geschaffen; dasselbe würde der fundamentalen in der Wissenschaft an jedes Zeichen zu stellenden Anforderung der Einsinnigkeit [vergl. $\sigma_1 \ldots \chi_1$) der Einleitung] nicht mehr genügen — und in der That wird es für unsre Zeichensprache noch viel verfänglicher erscheinen als in der Wortsprache, Verschiedenes mit dem gleichen Zeichen in *einer* Untersuchung zu benennen. Hier müssten wir also für das Subjekt der zweiten Aussage ein neues Zeichen a'' wählen, dieselbe durch eine Subsumtion $a'' \subseteq b_1$ darstellen, um Verwechselungen der beiden Subjekte vorzubeugen, welche ja in einundderselben Betrachtung auch nebeneinander vorkommen könnten, vielleicht zusammen aufzutreten bestimmt sind.

Wie jene beiden partikularen Urteile darzustellen sind, wenn a die Klasse der Menschen überhaupt und b, wie oben, die Klasse der klugen Wesen bedeutet, dies wird in spätern Untersuchungen eingehend dargelegt werden.

Einstweilen genüge die Einsicht, dass auch die partikularen Aussagen im Grunde nichts Anderes als Subsumtionsurteile sind. Indessen sei gleich hier schon angeführt, dass in Bezug auf sie die Fussnote auf S. 132 zutreffen wird.

Ist das als Subjekt figurirende Hauptwort mit einem adjektivischen Pronomen verbunden, wie dem besitzanzeigenden (pr. possessivum) in „Sein Haus" . . oder dem hinweisenden, wie „Diese (Jene) Arbeiter" . . ., so dient dies auch nur zur näheren Bestimmung der Klasse.

Anders dagegen, wenn der sog. verneinende Artikel *„kein“* mit dem Subjekt verknüpft erscheint. Sagen wir „Kein Mensch ist vollkommen“, so ist durchaus nicht etwa Subjekt des Satzes „Kein Mensch“ und Prädikat desselben „vollkommen“. Vielmehr ist der Satz, bevor er als Subsumtion gedeutet werden kann, erst umzuschreiben in den logisch damit äquivalenten: „Jeder Mensch ist nicht-vollkommen“ oder „Alle Menschen sind unvollkommen“, dessen Subjekt die ganze Klasse der Menschen und dessen Prädikat die Klasse der unvollkommenen Dinge oder Wesen bedeutet. Wie vorhin ein „partikular“, so haben wir hier ein „universell verneinendes“ Urteil vor uns, und bis zur systematischen Behandlung der verneinenden Urteile überhaupt können wir uns mit der Erkenntniss begnügen, dass sie unter dem Gesichtspunkt der Umfangsbeziehungen ebenfalls blos auf Subsumtionen hinauslaufen.

Tritt ein substantivisch gebrauchtes Pronomen als Subjekt eines Urteils auf, so kann dasselbe als ein „bezugnehmendes“ (word of reference) stehen, wie „es“, „dasselbe“ (das vorher genannte Ding) und ist dann lediglich Stellvertreter eines bestimmten nomen's, welches auch statt seiner wiederholt werden könnte; es war dann im buchstäblichen Sinne ein pro-nomen. Jenes kann aber auch ein persönliches Fürwort (pronomen personale) sein, in welchem Falle es ganz selbständig, ohne Bezugnahme auf vorher Erwähntes, auftreten mag als: „Ich, du (Sie), er, sie, es, wir, ihr (Sie), sie.“ Hier kann die Kopula „bin, bist, seid, sind“ auch immer leicht auf „ist“ hinausgespielt werden, indem man statt „ich bin“ . . . doch sagen kann, „der (resp. die) Redende, Sprecher, Verfasser, etc. ist“ . . und statt „du bist“ . . als logisch vollkommen äquivalent sich sagen lässt: „Der (oder die) Angeredete, Adressat, etc. ist“ . .; „wir sind“ . . . heisst ja in des Wortes engster Bedeutung gewöhnlich nur: „die Klasse der Personen, welche besteht aus dem Redenden und den Angeredeten, ist“ . ., im weiteren Sinne: „die Klasse der bereits erwähnten oder als bekannt vorauszusetzenden Personen mit Einschluss des Redenden oder als redend Dargestellten ist“ . .; ebenso „Ihr seid“ . . heisst: „die Klasse der angeredeten Personen ist“ . . Etc.

Auch das unbestimmte persönliche Fürwort „man“ bezeichnet als Subjekt (und es steht nur als solches) doch nur eine gewisse Klasse von Personen, desgleichen „jemand“, „jedermann“. Bei „niemand“ ist, analog wie dies in Bezug auf das ihm äquivalente „kein Mensch“ implicite schon auseinandergesetzt wurde, die Verneinung zum Prädikat zu schlagen; für „niemand weiss ob . .“ ist als logisch äquivalent zu setzen „jedermann ist darüber unwissend, ob . .“. Etc. Auf Urteile, als deren Subjekt „nichts“ erscheint, kommen wir noch ausführlich zu sprechen.

Eine Bemerkung fordert endlich die dritte Person singularis des Neutrums der persönlichen Fürwörter heraus, nämlich das Wörtchen „es“, welches häufig als Subjekt von Urteilen auftritt. Das ist der Fall in den sogenannten *impersonalen* Urteilen.

Als eine wichtige Unterabteilung dieser letztern müssen wir zunächst die sog. *„Existenzialurteile“* hervorheben, wie *„Es gibt* (il y a, there are) . . . z. B. Metalle, die auf dem Wasser schwimmen“. Auch solche Urteile würden als Subsumtionsurteile sich ansehen lassen; z. B. das angeführte wäre zu deuten als: Gewisse Vorstellungen von Metallen die auf dem Wasser

schwimmen, sind enthalten in der Klasse derjenigen Vorstellungen, denen (als das Vorgestellte) Wirkliches entspricht. Der Klasse gedachter Dinge, denen Realität zukommt, welche *existiren*, wird auch hier eine Subjektklasse eingeordnet. Die Existenzialurteile gehören jedoch wieder zu denen, für welche die Fussnote auf S. 132 Platz greift, weshalb zu ihrer Einkleidung doch in unsrer Technik zu andern Mitteln wird gegriffen werden müssen und wir mit besondrer Sorgfalt auf dieselben zurückzukommen haben. Der vorstehenden Betrachtung kommt daher eine praktische Tragweite nicht zu sondern nur ein theoretischer Wert, sofern sie beiträgt vollends zu erhärten, dass wirklich alles Urteilen sich in Subsumtionen bewegt.

In vielen Fällen vertritt das Wörtchen „es“ blos provisorisch das Subjekt, welches dann ausführlicher *hinter* dem Prädikate beschrieben wird; z. B. „es weht ein heftiger Wind“ oder „es ist bequem, Andere für sich arbeiten zu lassen“; so auch bei „es ist leicht . . .“, „es ist nützlich . .“. Etc.

Auch bei den impersonalen Urteilen im engsten Sinne des Worts, wie „es regnet, donnert, blitzt“ . . . „es riecht nach Moschus“, „es ist vier Uhr (Nachmittags)“ etc. wird der Leser unschwer die Subjekt- und zugehörige Prädikatklasse ausfindig machen. So im ersten Beispiel: der gegenwärtige Zustand der Atmosphäre am hiesigen Platze ordnet sich ein in die Klasse der Zustände, die wir als Regen(wetter) bezeichnen; ein Geruch nach Moschus (etwas diesen Geruch Hervorrufendes) ist vorhanden in der uns umgebenden Luft (Existenzialurteil); der gegenwärtige Augenblick ist identisch mit dem durch die Zeitbestimmung 4 Uhr Nachm. der hiesigen Ortszeit charakterisirten Momente. Und so weiter.

Nachdem wir so die wichtigsten Formen sprachlichen Ausdrucks durchgegangen haben, welche beim *Subjekt* eines Urteils vorkommen mögen, erübrigt es, ein gleiches in Bezug auf das *Prädikat* desselben zu thun.

Ist das Prädikat ein Substantiv mit oder ohne determinirende Nebenbestimmungen, oder auch ein Aggregat von solchen (mittelst Konjunktionen verbundenen), so liegt keine Schwierigkeit vor, sich den Umfang des Prädikatbegriffes oder die Prädikatklasse zum Bewusstsein zu bringen.

Desgleichen haben wir dazu wiederholt schon Anleitung gegeben für den Fall, wo das Prädikat ein Adjektivum ist — wie denn der Satz „die Erde ist rund“ nichts anderes aussagt als: die Erde gehört zu der Klasse der als „rund“ zu bezeichnenden Dinge, sie ist „Etwas rundes“, ein rundes Ding. Nach diesem Vorbild konnte überhaupt ein Adjektivum allemal in die substantivische Form sogleich umgesetzt werden; die Adjektiva stehen den Substantiven am nächsten, erscheinen nur grammatikalisch von solchen verschieden. In der Thatsache allerdings, dass sie ihrer logischen Gleichwertigkeit mit Substantiven ungeachtet, doch nicht allgemein wie diese als Subjekt eines Urteils stehen können, offenbart sich eine psychologische Eigentümlichkeit der Wortsprache — wie denn z. B. Mill hervorhebt, dass man nicht sagen könne: „Rund ist leicht zu bewegen“.*) — Obige Substantivirung des Adjektivs ist auch gleichermassen ausführbar, in was immer für einem Grad oder Vergleichungsmodus dasselbe steht, einerlei ob im

*) Vereinzelte Ausnahmen kommen in Sprüchwörtern vor, wie: Allzuscharf macht schartig, u. a.

Positiv, Komparativ oder Superlativ. Auch Beispiele zu den letzteren Fällen wird man schon unter den vorstehend betrachteten finden.

Statt durch die vom Hülfszeitwort „sein" abgeleitete Kopula mit dem Subjekt des Urteils verknüpft zu sein, ist das Prädikat desselben in den allermeisten Fällen mit einem *Verbum* konstruirt, und oft besteht es nur aus einem solchen.

Einerlei ob dieses Verbum transitiv — vielleicht ein reflexivum — oder intransitiv ist, ob es im Aktivum oder Passivum steht, auch einerlei in welchem Tempus, ob in einem Präteritum, im Präsens oder im Futurum, stets wird sich — sei es vermittelst einer Partizipialkonstruktion, sei es durch Zuhülfenahme eines Relativsatzes — das Urteil durch ein anderes vom selben logischen Gehalt umschreiben lassen, in welchem die Kopula „ist" steht und das Prädikat als eine Klasse hervortritt, der die Subjektklasse sich einordnet. Es würde ermüdend sein, dies für alle Fälle durchzusprechen, die sich in grammatikalischer Hinsicht irgend unterscheiden lassen, und werden ein paar Beispiele genügen.

„Die Erde dreht sich" sagt das nämliche wie „die Erde ist sich drehend (Etwas sich drehendes), sie *ist* in Rotation befindlich, enthalten in der Klasse der Körper oder Dinge, welche sich im Zustande der Drehung befinden".

Der Satz „Caesar wurde ermordet" passt sich nicht minder unserem allgemeinen Schema der kategorischen Urteile an, indem er besagt: die (singuläre) Klasse, bestehend aus dem *einen* Individuum (der bekannten historischen Person des römischen Imperators) Caesar, ist enthalten in der Klasse der Personen, welche ermordet wurden.

„Am 9. August 1896 wird eine totale Sonnenfinsterniss stattfinden" stellt sich bei Reflexion auf die Umfangsbeziehungen als das Subsumtionsurteil dar: „Eine totale Sonnenfinsterniss ist enthalten in der Klasse der Ereignisse (Dinge), welche am 9. August 1896 stattfinden (werden)".*) In dieser Fassung erscheint indess das Urteil als ein „unbestimmtes", und es gibt sich in der Verbindung des Subjektbegriffes „totale Sonnenfinsterniss" mit dem unbestimmten Artikel „Eine" zu erkennen, dass das Urteil eigentlich ein „Existenzialurteil" ist. Man könnte in der That mit derselben logischen Tragweite auch sagen: „*Es gibt* eine . . . Sonnenfinsterniss, welche auf den . . Aug. 1896 fällt". Am angemessensten würde darnach (abermals als Subsumtion) das Urteil dahin zu interpretiren sein: Die Vorstellung einer auf den 9. Aug. 1896 fallenden Sonnenfinsterniss gehört zu (ist enthalten in) der Klasse derjenigen Vorstellungen, denen Wirkliches entspricht. Analog möge der Leser das Urteil interpretiren: „In die Jahre 1870 und 71 fällt ein deutsch-französischer Krieg".

Auch der abgekürzte Gefechtsbericht: „Tote 20, Verwundete 100" kann so einerseits als Existenzialurteil dargestellt werden; doch lässt er andrerseits auch sich als das umkehrbare Urteil deuten: Die Anzahl der bei jenem Gefechte (tot)Gebliebenen ist (einerlei mit, gleich) 20 u. s. w.

---

*) Es sei darauf aufmerksam gemacht, dass bei genauer Angabe eines Zeitpunktes oder eines Zeitraums, einer Epoche, ein unterscheidender Gebrauch der Temporalformen beim Verbum überflüssig wird, wie denn auch die Sprache meist das Präsens in solchen Fällen beibehält.

Das in dem Rufe: „Feuer!“ niedergelegte Urteil dürfte ebenfalls wesentlich als Existenzialurteil anzusehen sein. Und anderes mehr.

Dagegen würde das schon in B der Einleitung erwähnte Urteil: „der Pegasus ist geflügelt“, sich logisch decken mit der Subsumtion: „die (erdichtete) Vorstellung vom (Dichterrosse) Pegasus ist enthalten in der Klasse der Vorstellungen von solchen Dingen (Wesen), welche als geflügelt zu bezeichnen“.

In der Regel geht in unsern Kultursprachen das Subjekt dem Prädikate *voran,* doch haben wir bereits auf Fälle hingewiesen, wo das Subjekt provisorisch nur durch „es“ vertreten erscheint, um ausführlichst hinter dem Prädikate beschrieben zu werden. Dahin gehörten auch die meisten Existenzialurteile, cf. „Es war einmal ein König . . .“ etc.

Fälle der umgekehrten Stellung beider Satzglieder kommen auch ausserdem vor, jedoch verhältnissmässig selten, so namentlich bei anschaulich lebendigen Schilderungen vorwiegend sinnlichen Charakters — wie denn noch auf sinnlicher Stufe stehende Sprachen, z. B. das Hebräische, das Verbum besonders gerne voranstellen (Sigwart), so auch im gemütlichen Erzählerton und in poetischen Wendungen. Vergl. z. B. „Unaufhörlich donnerten die Lawinen, rollte der Donner, knatterte das Kleingewehrfeuer; unausgesetzt schien die Sonne“, „Unaufhaltsam schreitet fort die Zeit“, etc. Der Satz: „In Südafrika lebt das Erdferkel“ kennzeichnet durch diese Stellung sich als ein partikulares Urteil und hat darum eine andere logische Tragweite, als der Satz: „Das Erdferkel lebt in Südafrika“, welcher universal, und falsch zu nennen wäre, da diese Tiere auch in Senegambien vorkommen.

Es muss dem Sprachgefühl des Lesers überlassen werden, allemal (auch bei der umgekehrten Stellung) das Subjekt ausfindig zu machen, dasselbe nebst dem Prädikate zu erkennen. — Man übe sich, etwa an Sentenzen, wie: „Diejenigen verzeihen nie, die das Unrecht zugefügt haben“ (They never pardon, who have done the wrong, Jevons), oder Goethe's: „Was wir verstehen können wir nicht tadeln“ etc., desgleichen an irgendwelchen Sätzen, wie „Ich fühle mich jetzt besser“; „So hat er gesagt“ (= Das eben Vernommene ist übereinstimmend mit dem, was er, damals, gesagt hat — De Morgan); „Hans ist allein zuhause“ (= die Klasse der zuhause befindlichen Personen ist identisch der singulären Klasse „Hans“) — die beiden letzten, wie man sieht, umkehrbare Urteile. Etc. —

Es ist darüber gestritten worden, ob ein Urteil wie „dieser Hund *ist* ein laufender“ genau denselben Gehalt habe wie das Urteil „dieser Hund läuft“. Solange man uns nicht einen Hund zeigen kann, der ein „soeben laufender“ ist und dennoch *nicht* „läuft“ — oder umgekehrt — darf uns die ganze Frage als eine höchstens dem psychologischen Gebiet angehörige hier gleichgültig bleiben.

Wir versuchten vorstehend darzuthun, dass in der That und in welcher Weise ein jedes Urteil, soferne man die Umfangsbeziehung zwischen Subjekt- und Prädikatbegriff in's Auge fasst, hinausläuft auf und darzustellen ist als eine *Subsumtion.* Gelang es, dies für die Urteilsbildungen in der *deutschen* Sprache einleuchtend zu machen, so dürfen

wir dasselbe auch für *jede* Sprache in Anspruch nehmen, in Anbetracht dass, was in irgend einer, sich auch in deutscher Sprache adäquat wird ausdrücken lassen.

Zweck der ganzen Auseinandersetzung war nur der: von vornherein einen Einblick zu eröffnen in das weite ja allumspannende Feld der Anwendungen, welche eine auf das Studium der *Subsumtion* gegründete Disziplin zulassen wird, in die Allgemeinheit und Tragweite, auf welche solche Disziplin Anspruch hat, die ihr zukommen muss. Was etwa in diesen Betrachtungen noch unvollendet geblieben ist, das wird sich zumeist in spätern Spezialstudien erledigen.

§ 3. Euler's Diagramme. Identischer Kalkul mit Gebieten einer Mannigfaltigkeit.

Die Beziehung der *Subsumtion*, mit deren logischem Gehalt und sprachlicher Einkleidung wir uns bisher beschäftigten, ist fähig, räumlich oder geometrisch *veranschaulicht* zu werden auf eine Weise, welche für das Studium der Logik ungemein förderlich ist. Seit Leonhard Euler[1] in seinen „Briefen an eine deutsche Prinzessin" von gedachter Versinnlichungsweise (der zwischen Begriffsumfängen oder Klassen überhaupt — und so namentlich auch zwischen Subjekt und Prädikat — bestehenden Beziehungen) einen populären Gebrauch gemacht hat, ist dieselbe wol in allen Werken über Logik benutzt oder wenigstens auf sie Bezug genommen. Auch wir wollen fortan uns jene Beziehungen versinnlichen vermittelst der „Euler'schen*) *Diagramme*".

Zu dem Ende *ordnen* wir in Gedanken den zu betrachtenden Begriffsumfängen oder Klassen gewisse räumliche Gebiete „Sphären" („Begriffssphären") oder auch Flächen, z. B. Kreisflächen in der Ebene der Zeichnung, *zu*, *lassen* diese und jene *einander gegenseitig eindeutig entsprechen,* oder *bilden* jene durch diese gewissermassen *ab.*

Um zunächst zu unsern typischen Beispielen von kategorischen Urteilen auf S. 127 zurückzukehren, so mag die Kreisfläche a die Klasse „Gold", die Kreisfläche b die Klasse „Metall" vorstellen.

Alsdann verdeutlicht die Fig. 1 die Beziehung: $a \subset b$, in welcher beide Klassen zu einander stehen; man erblickt die Klasse a als einen blossen Teil der Klasse b, sieht, dass sie ganz in der letzteren ent-



Fig. 1.

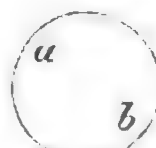


Fig. 2.

*) Wir behalten diese Bezeichnung bei, obwol sich Vorläufer gefunden haben: bei Weise[1] und in Gestalt von Winkeln oder Dreiecken schon bei Vives[1] — vergl. Ueberweg[1] p. 239 und Fr. A. Lange[1] p. 10. —

halten ist, dass aber diese letztere noch über sie hinausragt (b „overlaps“ a) und demnach b auch noch anderes ausser a (wie ja z. B. die Klasse „Silber“) enthalten wird.

Stellen wir uns dagegen durch Kreisflächen a und b die Klassen „Kochsalz“ und „Chlornatrium“ dar, so wird die zwischen beiden Klassen bestehende Beziehung: $a = b$ versinnlicht durch die Fig. 2, in welcher beide Kreise ersichtlich in einen einzigen zusammenfallen.

Die *Subsumtion* $a \Subset b$ aber, welche, wie wir sahen, den Sinn des kategorischen Urteils *„a ist b“ im allgemeinen* wiedergibt, wird zu veranschaulichen sein durch den Hinweis darauf, dass von den beiden durch die Fig. 1 und die Fig. 2 dargestellten Fällen irgend einer (der eine oder aber der andere) stattfinde.

Man kann sich — im ersten Falle — geradezu die Kreisfläche a mit allen Goldteilchen, „Goldatomen“ der Welt belegt denken, sodass jeder Punkt dieser Fläche der *Träger* eines Goldatomes ist, und den a umgebenden ringförmigen Teil der Kreisfläche b mit den Atomen aller übrigen Metalle (ausser Gold), die sich im Weltall vorfinden. Und analog könnte man — im zweiten Falle — mit den „Kochsalzmolekülen“ verfahren.

Wir könnten — im ersten Falle — sagen: man denke sich die Kreisfläche a ganz einfach „vergoldet“, wenn nicht bei der „Vergoldung“ im Sinne der atomistischen Hypothese den Goldatomen gewisse Abstände vorgeschrieben wären, die sie nicht zu unterschreiten vermögen, über die hinaus sie einander sich nicht nähern können, sodass wir sie auf der kleinen Fläche füglich nicht alle unterzubringen vermöchten. Emanzipiren wir uns aber von der Forderung, solche durch die Temperatur und Dichte des Vergoldungsmaterials, eventuell die Grösse der Atome bestimmte Abstände einzuhalten, so steht der geforderten ideellen Zuordnung nichts mehr im Wege, da wir ja über unbegrenzt viele mathematische Punkte in der Kreisfläche a verfügen, welche eine Mannigfaltigkeit „der zweiten Art“ im Sinne Georg Cantor's bilden.*)

Wir gehen aber sofort noch einen erheblichen Schritt weiter, über die bisherige Praxis der Verwendung Euler'scher Diagramme hinaus, indem wir die Beziehungen zwischen „Sphären“ oder Punktgebieten des

---

*) Die Ausführbarkeit gedachter Zuordnung würde sich nach des letztern Untersuchungen über die „Mannigfaltigkeitslehre“ streng mathematisch beweisen lassen, wie viel Gold und Metall es auch im Weltall geben mag, ja, wenn der ganze Raum damit erfüllt wäre. Man kann nach den einschlägigen Untersuchungsergebnissen (Borchardt's Journal Bd. 84) den ganzen Raum schon auf einer begrenzten Linie oder Strecke ein-eindeutig abbilden, so, dass jedem Punkt des einen immer ein Punkt und nur *ein* Punkt der andern, und umgekehrt, entspricht. Vergl. hiezu auch Arbeiten von J. Lüroth, E. Jürgens, u. A.

Raumes auch *an sich* studiren, losgelöst von deren vorhin charakterisirten illustrativen Zwecken, also ohne Rücksicht darauf, dass uns diese Gebiete Klassen oder Begriffe versinnlichen sollten.

Wir lassen so der eigentlichen Logik eine *Hülfsdisziplin* voraufgehen oder auch mit ihr parallel einhergehen, deren Sätze jederzeit durch die Anschauung kontrolirt werden können und welche von rein mathematischem Charakter ist. In ihr werden die Regeln aufgestellt und bewiesen für eine eigentümliche Buchstabenrechnung, welche passend zu bezeichnen sein dürfte als

Identischer Kalkul mit Gebieten einer Mannigfaltigkeit.

Als gegeben denken wir uns hier eine *Mannigfaltigkeit* von *Elementen* — etwa die Mannigfaltigkeit der Punkte in der Fläche der Schultafel (oder die der Felder auf einem Bogen karrirten Papiers).

Diese Mannigfaltigkeit halten wir im Felde unsrer Aufmerksamkeit fest und kümmern uns nicht um die Dinge ausserhalb derselben. Die Natur dieser Mannigfaltigkeit sowie die Art ihrer Elemente sei von vornherein in unser Belieben gestellt; die Betrachtungen sollen *allgemeine* sein und werden (mit einem gewissen, später zu erwähnenden Vorbehalt) Gültigkeit beanspruchen für jede denkbare Mannigfalkeit von irgendwelchen Elementen. Anstatt der bereits hervorgehobenen beiden Beispiele könnten wir namentlich auch nehmen: die Mannigfaltigkeit der Punkte des Raums überhaupt; desgleichen die (bekanntlich vierdimensionale) Mannigfaltigkeit aller im Raume denkbaren Geraden; oder auch blos diejenige der Punkte einer bestimmten (sei es begrenzten, sei es unbegrenzten) geraden Linie; ferner auch die Mannigfaltigkeit der Zeitpunkte eines bestimmten Zeitraums, einer Epoche, wo nicht der Zeit überhaupt, und so weiter, u. s. w. Zur unmittelbaren Veranschaulichung ihrer Teile qualifizirt sich am besten das schon hervorgehobene Paradigma der *Vorderfläche der Schultafel*, die wir ja mit den in sie einzutragenden Figuren auch jeden Augenblick im Text hier abbilden zu können in der Lage sind. Ich werde aus didaktischen Gründen — um nicht immer abstrakt (blos von Elementen, von Mannigfaltigkeit, etc.) zu reden — diese spezielle Mannigfaltigkeit hier in den Vordergrund stellen, sie die *„bevorzugte“* Mannigfaltigkeit nennen.

Irgend eine Zusammenstellung von Elementen der Mannigfaltigkeit nennen wir ein *Gebiet* der letzteren. Solches Gebiet kann — in unserem „bevorzugten“ Falle — aus beliebig vielen getrennten Teilen, als da sind: isolirte Punkte, Linien und Flächen, bestehen, eine ganz

beliebige „Figur“ in der Tafelebene bilden; doch muss bei Linienstücken und Flächen jeweils ausgemacht sein, ob auch deren Endpunkte resp. Grenzlinien, Konturen mit zu dem Gebiet gehören sollen, oder nicht. Praktisch aber, behufs Illustration der allgemeinen Sätze unsres Kalkuls, werden wir in der Regel die Gebiete *möglichst einfach* durch zusammenhängende Flächen, etwa nach Art der Euler'schen Diagramme durch Kreisflächen (wo nicht das Gegenteil bemerkt wird, unter Einschluss von deren Peripherie) uns darstellen.

Buchstaben, wie a, b, c, ... mögen künftighin solche Gebiete bedeuten, *aber diese selber*, und nicht etwa (wie es sonst wol in der Mathematik üblich ist) deren Maasszahlen oder Flächeninhalte, von dergleichen in diesem Buche überhaupt nicht die Rede sein wird.

Mit einziger Ausnahme, vielleicht, der geometria situs, der synthetischen oder Geometrie der Lage herrscht in der Mathematik der Gebrauch vor, unter den Buchstaben jeweils *Zahlen* zu verstehen, und zwar zumeist die Maasszahlen von Grössen (eventuell auch die aus Paaren solcher zusammengesetzten „komplexen“ Zahlen).

Von einer Grösse ihre Maasszahl zu abstrahiren ist — auch nachdem man mit der Maass-Einheit schon Bekanntschaft gemacht hat — noch ein ziemlich komplizirter Prozess. Ich erinnere an die Schwierigkeiten, welche schon die Aufstellung des Begriffs der Länge einer krummen Linie, sowie des Flächeninhaltes, desgl. des Voluminhaltes einer irgendwie begrenzten ebenen oder körperlichen Figur im elementaren Unterricht bietet — ganz zu geschweigen von den Schwierigkeiten der Messung selber.

Sich unter dem Buchstaben anstatt der gemessenen Grösse, z. B. Fläche selbst, deren Maasszahl vorzustellen ist gar nicht das Naturgemässe, vielmehr etwas Erkünsteltes. Es darf in Erinnerung gebracht werden, dass die Gewöhnung daran erst in der Schule mühsam anerzogen wird. Wenn z. B. von den Schülern eine Mischungsaufgabe, betreffend Wasser und Wein, gerechnet wird, so wird der Lehrer leichtlich auf die Frage, was x hier bedeute?, vom Schüler die Antwort erhalten: „x bedeutet das Wasser“ — statt richtig: die *Anzahl* Liter des zur Mischung zu verwendenden Wassers. Manche Schüler müssen wiederholt und hartnäckig darauf hingewiesen werden, dass unter den Buchstaben keineswegs die Dinge selbst, sondern deren Anzahl, beziehungsweise Maasszahlen, zu verstehen seien.

Es kann daher nicht wol als eine ungebührliche Zumutung an den Mathematiker bezeichnet werden, von dieser so mühsam erworbenen Angewöhnung zeitweilig — für den gegenwärtigen Kalkul — *sich frei zu machen* und wieder zurückzukehren zu dem urwüchsigen Verfahren, welches (anstatt ihrer Maasszahlen) die Dinge selbst benennt und bezeichnet — zumal auch hiefür Präcedenzfälle in der Mathematik schon genugsam vorliegen: wie denn z. B. in der Lehre von Kongruenz, Ähnlichkeit und Projektivität der Figuren unter einem Dreieck ABC auch durchaus nicht verstanden wird die Maasszahl von dessen Fläche, vielmehr in der That das Dreieck selber, u. a. m.

Immerhin dürfte gerade den vorwiegend mathematisch geschulten Leser

es anfänglich eine bewusste Anstrengung kosten, hier, wo es unumgänglich ist, sich zu emanzipiren von jener Gewöhnung, mit den uns Flächen darstellenden Buchstaben in Verbindung zu bringen die Vorstellung von metrischen Relationen.

Jedes spezielle Gebiet, das wir so unter einem Buchstaben a verstehen mögen, nennen wir einen „*Wert*“ (valor, value) des letztern.

Als erste Beziehung, welche zwischen zwei Gebieten a und b bestehen kann, fassen wir nun im identischen Kalkul die Beziehung der *Subsumtion:*

$$a \neq\!\!\!\in b$$

in's Auge, die uns ausdrücken wird, *dass das Gebiet a* (*das „Subjektgebiet“*) *sich dem Gebiete b* (*dem „Prädikatgebiet“*) *einordne, dass a in b enthalten sei* — so wie es, nebenbei gesagt, die Alternative zwischen den Figuren 1 und 2 veranschaulicht.

Den Sinn eben*dieser* Beziehung setzen wir *einzig und allein* als bekannt voraus.

Alle andern Begriffe und Beziehungen, die wir noch in den Bereich des identischen Kalkuls hereinzuziehen haben, werden ausschliesslich aus Beziehungen dieser Sorte, aus „Subsumtionen“ aufgebaut, sodass wir ungeachtet seiner später vollzogenen Erweiterungen und scheinbar grösseren Tragweite doch sagen können, der identische Kalkul beruhe einfach und ganz auf dem Studium der Subsumtionen.

Wir werden die Gesetze dieses Kalkuls zunächst (unter Beihülfe der Wortsprache) *in der allgemeinen Form mathematischer Beweisführung* begründen, für welche seinerzeit die Geometrie des Euklides mustergültig geworden ist, um hernach in einem Rückblicke zu erkennen, dass bei den Schlüssen ebendieser Beweisführung nur die Prinzipien dieses Kalkuls selber angewendet worden sind.

Niemand, der für Reinheit der Methode und Konsequenz des Verfahrens Sinn besitzt, wird sich dem Eindruck der Schönheit und mathematischen Eleganz des damit geschaffenen wissenschaftlichen Systems verschliessen können. Freilich wird man, um diesen Eindruck ganz ungetrübt zu gewinnen, möglichst abzusehen haben von allem *Beiwerk* der hiernächst zu entwickelnden Theorie.

Das Beiwerk ist zu einem Teile ein *kritisches,* insofern uns obliegen wird, die gewählten Bezeichnungsweisen, die das Fundament der Zeichensprache bilden, zu motiviren, sie zu rechtfertigen gegen etwaige Ausstellungen von mathematischer nicht minder, wie von philosophischer Seite. Überhaupt werden wir auf vorauszusehende Einwände sowol, wie auf entgegenstehende Lehrmeinungen philosophischer Systeme und Ausführungen namhafter Mitarbeiter und Philosophen oft Rücksicht zu nehmen, solche nötigenfalls zu widerlegen haben. Und die Eigenart unsrer Behandlungs-

weise der logischen Materie bildet gerade hiefür eine beträchtliche Erschwerung. Zufolge der *verbindenden* Stellung, die sie zwischen Philosophie einer- und Mathematik andrerseits einzunehmen bestimmt ist, werden wir in der That auf zwei — wie schon im Vorwort erwähnt — fast allzu verschieden disponirte Leserkreise stetsfort bedacht zu nehmen haben.

Die Hauptmasse aber des mit der Theorie des identischen Gebietekalkuls hier zu verflechtenden Beiwerks wird von *sachlicher* Art sein, nämlich aus Nutzanwendungen des Kalkuls für die Zwecke der Logik selbst zu bestehen haben. Von diesen finden wir für gut, einen (ersten) *Teil* wenigstens gleich neben der Theorie einherlaufen zu lassen, und zwar den Teil, welcher abzielt auf die Verwertung des Kalkuls behufs Einkleidung in seine Zeichensprache zunächst derjenigen Beziehungen, welche zwischen *Klassen* oder Begriffsumfängen die Wortsprache auszudrücken vermag.

Begriffe und Sätze oder Formeln des „identischen" Kalkuls (beziehungsweise des damit verwandten logischen, vergl. die sechste Vorlesung) werden (überhaupt) die verschiedenartigsten *Anwendungen* zulassen, Anwendungen, die sich lediglich unterscheiden durch die Deutungsweise, Interpretation der hier als allgemeine Symbole verwendeten Buchstaben, und demgemäss auch der sie verknüpfenden Operations- und Beziehungszeichen. Wir werden namentlich unter den Buchstaben verstehen können:

α) *Gebiete* einer Mannigfaltigkeit von Elementen,

β) *Klassen* oder Gattungen von Individuen, insbesondere auch Begriffe, nach ihrem Umfang betrachtet, desgl.

γ) *Begriffe* nach ihrem Inhalt betrachtet, speziell auch Vorstellungen,

δ) *Urteile,* Behauptungen, Aussagen („statements"),

ε) *Schlüsse* („inferences")*),

ζ) Funktionalgleichungen, Algorithmen, Kalkuln, „*Gruppen*",

— kurzum, bei geeigneter Auslegung der Zeichen so ziemlich alles Denkmögliche.

Wenn demnach als Vorwurf, Thema der deduktiven Logik gemeinhin bezeichnet wird die Lehre von den *Begriffen, Urteilen* und *Schlüssen,* so wird zu sehen sein, dass auch auf diese Objekte unsre Hülfsdisziplin des identischen Kalkuls sich mitbezieht. Sie wird sich auf dieselben direkt übertragen lassen, indem man einfach einen Wechsel in der Deutung der Zeichen vollzieht.

Wie schon angedeutet, würde unsre Darstellung des identischen Kalkuls an Übersichtlichkeit allerdings gewinnen, wenn wir ihn zunächst nur als *reinen Gebiete*kalkul, lediglich unter dem Gesichtspunkte

*) Die „Schlüsse" können selbst als „Urteile" hingestellt werden — welche den denknotwendigen Zusammenhang zwischen Prämisse und Konklusion konstatiren.

α), entwickelten und uns dabei aller Seitenblicke auf seine anderweitigen Anwendungen zunächst enthielten. Dieser Vorteil würde indess erkauft durch eine Reihe von, in meinem Dafürhalten schwerwiegenden pädagogischen Nachteilen: man würde, vor allem, gar lange nicht abzusehen vermögen, zu was überhaupt die Betrachtungen gut sind, und weshalb sie angestellt werden. Zudem handelt es sich doch auch darum, den deutschen Leserkreis erst einigermassen heranzuziehen zu dem Gebrauch dieses Kalkuls, zu welchem ja Übungsbücher oder Aufgabensammlungen im Deutschen noch nicht existiren, wogegen in der englischen Literatur bereits manche Werke diesen Charakter in beträchtlichem Umfange ausgeprägt zeigen. Jede Illustration aber von theoretischen Sätzen durch Beispiele auf einem Anwendungsfelde muss hier den Wert einer Übung im Gebrauch der zu erlernenden Zeichensprache noch nebenher besitzen.

Aus diesen Gründen erscheint es mir als höchst wünschenswert bei der Entwickelung der Theorie des identischen Kalkuls sogleich ein Anwendungsgebiet von einigermassen praktischer Natur zur Verfügung zu haben, und wähle ich als das nächstliegende das Anwendungsfeld β), dasjenige Gebiet also, welches ja den Ausgangspunkt unsrer Betrachtungen von vornherein gebildet hat, und die Idee zur Gründung einer selbständigen Hülfsdisziplin auf dem Felde α) erst seinerseits anregte.

Auf dieses Anwendungsfeld β) werden wir, nunmehr von α) ausgehend, hinübergeleitet durch die Bemerkung, den Hinweis darauf: dass die „Elemente“ unsrer Mannigfaltigkeit auch sogenannte „*Individuen*“ sein können, wo dann die „Gebiete“ dieser Mannigfaltigkeit zu bezeichnen sein werden als Systeme, und wenn man will als „*Klassen*“ von solchen Individuen. Als dergleichen „Individuen“ mögen irgendwelche Objekte des Denkens, sofern sie überhaupt in Gedanken isolirbar sind, zunächst hingestellt werden, und die ganze Mannigfaltigkeit wird dabei erscheinen als eine all' jenen Klassen übergeordnete allgemeinere oder umfassendere Klasse, wofern sie nicht etwa als die Mannigfaltigkeit des Denkbaren überhaupt sich wird ansehen lassen.

Anmerkung. Nächst dem Anwendungsfelde β) des identischen Kalkuls — das ist dem mit dem „*Gebietekalkul*“ α) auf das engste verwandten „*Klassenkalkul*“ — ist als das wichtigste dessen Anwendungsfeld δ) hervorzuheben, das ist der „*Aussagenkalkul*“ (von McColl als „calculus of equivalent statements“ bezeichnet). Müssen wir doch all' unsre Überlegungen und Beweise vollziehen in Gestalt einer Reihenfolge von Aussagen! Um dessen, was wir dabei thun, jeweils vollkommen inne zu werden, über einen jeden unsrer Schritte uns klarste Rechenschaft abzulegen, wird

es darum ratsam sein, auf das Anwendungsfeld δ) schon frühzeitig zu achten, gelegentlich auch auf dieses einen Seitenblick zu werfen. Systematisch wird ja auf dasselbe allerdings erst später, mit Band 2 erst einzugehen sein. Aus dem angedeuteten *didaktischen* Grunde aber sei vorgreifend schon hier bemerkt, dass im Aussagenkalkul einer Subsumtion $a \prec b$ die Bedeutung zukommen wird: Wann die Aussage a gilt, gilt auch die Aussage b, jene zieht diese nach sich, m. a. W.: Aus *a folgt b*.

Die wichtigste Rolle muss naturgemäss solchen Klassen zufallen, welche als der „Umfang" von (gewissen, denselben zugeordneten) Begriffen bestimmt erscheinen. Doch ist wie bereits unter γ_3) der Einleitung betont, die Rechnung mit Klassen noch umfassender als die Rechnung mit Begriffsumfängen, sofern man jeweils zu vorübergehenden Zwecken, ja sogar in völlig willkürlicher Auswahl, auch die allerheterogensten Dinge in eine Klasse wird zusammengefasst denken dürfen.

Die Benennung als „*Umfang*" eines Begriffes, welche wir von der scholastischen Logik überkommen haben, um die Klasse oder Gesamtheit aller derjenigen Individuen zu bezeichnen, welche „zu der Kategorie des betreffenden Begriffes gehören", diese Benennung erscheint — im Hinblick schon auf deren Versinnlichung mittelst Euler'scher Diagramme — als eine ziemlich unglücklich gewählte. Es sind ja keineswegs die „*Um*fänge" oder Peripherieen der Euler'schen Kreise, es sind *nicht die Konturen* der Flächengebiete, welche uns im identischen Kalkul die „Begriffs*umfänge*" zu versinnlichen haben, sondern allemal diese Kreisflächen selber resp. die Flächengebiete mit allem was sie *in* sich ent*halten*. Viel passender hiefür erscheint das englische „extent", welches ganz wohl mit „Ausdehnung" oder „*Erstreckung*" des Begriffes im Deutschen wiedergegeben werden könnte. Doch sind wir nicht in der Lage, eine Jahrhunderte alte und ganz allgemein acceptirte logische Terminologie umstossen zu können, und müssen uns damit begnügen, auf das Verfängliche der Benennung einmal hier aufmerksam gemacht zu haben.

Noch ist zu betonen, dass wir bei den Anwendungen der Theorie auf Klassen immer nur *scharfumgrenzte* oder, wie man sagen kann „*wohldefinirte*" Klassen im Auge haben werden.

Es wird vorausgesetzt, dass in Bezug auf kein Ding oder irgend mögliches Objekt des Denkens einem Zweifel Raum gelassen sei, ob es zu der gedachten Klasse gehöre oder nicht.

Dies ist zunächst der Fall, sobald die Individuen der Klasse sich vollständig haben aufzählen lassen.

Häufig aber werden die (zu betrachtenden) Klassen „offene" sein, Klassen von einer unbegrenzten Individuenzahl, deren Individuen also

überhaupt nie vollständig aufgezählt zu werden vermögen — wie z. B. die Klasse der Linien oder Kurven — eventuell auch Klassen, deren Individuen zum Teil noch ungewiss im Schoosse der Zukunft ruhen — wie z. B. die Klasse der Menschen u. a. m.

In solchen Fällen müssen wir *voraussetzen*, dass wenigstens ein Prinzip in uns wirksam sei, welches in Bezug auf jedes einzelne in den Bereich unsres Denkens jemals fallende Objekt, in Bezug auf alles, was fähig ist, von uns *vorgestellt* (oder was noch mehr sagt, von uns *gedacht*) zu werden, unzweifelhaft entscheidet und uns mit Notwendigkeit dahin drängt, dirigirt, entweder, es zu der Klasse zu rechnen, oder aber, es von ihr auszuschliessen.

In Gestalt des „Begriffes" haben wir ja mit einem derartigen Prinzipe, das solches auch zu leisten fähig, schon in C der Einleitung Bekanntschaft gemacht. Indessen sei es ausdrücklich bemerkt, dass Natur und Wirkungsweise gedachten Prinzips hiernächst uns gleichgültig lässt. Gerade darin, dass wir es dahingestellt sein lassen, auf welche Weise die vorauszusetzende Abgrenzung unsrer Klassen zustande kommen mag, erblicken wir einen Hauptvorzug der hier befolgten Methode. Auf diesem Umstand gerade beruht, wie wir meinen, der elementare und fundamentale Charakter der hier entwickelten Theorie.

Das oben ausgesprochene Kriterium für die Wohldefinirtheit einer Klasse scheint übrigens noch eines einschränkenden Zusatzes zu bedürfen in Gestalt des Vorbehaltes, dass die in Frage kommenden Objekte hinlänglich *bekannt* seien.

Sobald z. B. wir eine Zahl *kennen*, ist jeder Zweifel ausgeschlossen, ob sie zur Klasse der ganzen Zahlen gehörig oder nicht; wir mögen die Klasse der ganzen Zahlen als Exempel einer wohldefinirten Klasse hinstellen ganz unbeschadet dessen, dass wir z. B. nicht wissen, ob das Atomgewicht des Schwefels (auf Wasserstoff als Einheit bezogen) zu derselben gehört oder nicht (vergl. die Stass'schen Atomzahlbestimmungen), da uns eben diese Zahl zur Zeit nicht hinlänglich sicher bekannt sein dürfte.

Auch mit diesem Vorbehalte bildet die genannte Voraussetzung ein *Ideal* in den Zuständen unsres Denkens, welches nur selten von der Wirklichkeit daselbst erreicht wird.

Es braucht in dieser Beziehung nur an die Schwierigkeiten erinnert zu werden, welche die Abgrenzung zwischen Pflanzen- und Tierreich bei den niederen Organismen der Naturwissenschaft bereitet, oder auch — um ein noch frappanteres Beispiel zu wählen — an die Schwierigkeiten, welchen die neuere gegen Fälschung der Nahrungs- und Genussmittel gerichtete Gesetzgebung bei dem Versuche begegnet ist, die Begriffe von Brod, Wurst,

von Wein und Bier festzustellen, den Umfang derselben unzweifelhaft abzugrenzen. Gleichwie diese Umgrenzung erfolgte mittelst Angabe der Ingredienzien, welche zur Bereitung jener Lebensmittel verwendet sein dürfen, so werden auch im allgemeinen gewisse Merkmale, die wir aus dem vollen Inhalte des zugehörigen Begriffs als die „wesentlichen" hervorheben, das wirksame Prinzip zur gesuchten Abgrenzung liefern.

Faktisch ist in der That die Abgrenzung der Klassen, welche die Sprache mit Gemeinnamen darstellt, zumeist eine schwankende. Nicht nur bleiben Fälle denkbar, welche bei der Abgrenzung unberücksichtigt gelassen sind, und in Bezug auf welche schon Derjenige, der den Gemeinnamen gebraucht, sich im Unklaren darüber befindet, ob sie einzurechnen oder auszuschliessen seien (womit dieses auch für Alle strittig, unentschieden bleibt), sondern die Abgrenzung ist auch oft im subjektiven Gebrauch bei einundderselben Persönlichkeit eine wechselnde, richtet sich nach dem Gedankenkreise, in dem man sich eben bewegt, und verändert sich mit dem Untersuchungsfelde, auf das man den Gemeinnamen anwendet.

So schliesst z. B. in der Naturgeschichte die Klasse der Tiere diejenige der Menschen in sich ein, wogegen in der Sprache des gewöhnlichen Lebens und gesellschaftlichen Verkehrs sie dieselbe ausschliesst. So begrenzen wir auch die Klasse „Mensch" sicherlich enger, wenn wir sagen: „Alle Menschen sind sterblich", als wenn wir sagen: „Dieser Mensch ist todt", „der Arzt hat einen Menschen secirt" und dergl. Es hätte doch gewiss keinen Sinn, einen Leichnam noch als „sterblich" zu bezeichnen!

Ausserdem aber wird, wenn erst die Paläontologie noch erfolgreicher in eine graue Vorzeit eindringt, der Lamarck-Darwin'schen Entwickelungslehre einst die Aufgabe zufallen, die Grenze zwischen Zwei- und Vierhänder, eventuell Vierfüsser noch schärfer zu ziehen, so wie sie durch die Entdeckung des Archäopterix und der mit Zähnen bewaffneten fossilen Vögel Nordamerikas (Hesperornis, Ichthyornis etc.) bereits in die Lage versetzt wurde, genauer scheiden zu müssen, was zur Klasse der Vögel und was zu derjenigen der (Flug-)Eidechsen hinfort gehören solle.

Mit der Voraussetzung wohldefinirter Klassen vollzieht die Logik eine ganz ähnliche Idealisirung der Wirklichkeit, wie z. B. die Mechanik es thut, indem sie absolut starre, oder aber vollkommen tropfbar flüssige inkompressible oder endlich vollkommen elastisch flüssige (gasförmige) Körper fingirt. Indessen ist mit ihrem Ideal die Logik insofern in einer günstigeren Stellung, wie die Mechanik, als es der letztern nicht möglich ist, z. B. Körper herzustellen, welche dem Zustand der absoluten Starrheit beliebig nahe kommen. Wogegen es doch wenigstens in unserm Vermögen liegt, für uns selbst und Andere die Klassen, von welchen die Rede sein soll, mittelst Besinnung darüber, resp. in freier Übereinkunft mittelst eingehender Verständigung in jeder wünschbaren Schärfe abzugrenzen. Es geschieht ja nicht immer, doch *kann* es nötigenfalls geschehen.

Auf dieses Ideal der Logik, dass man auf wohldefinirte Klassen sich berufen könne, arbeiten zudem Gesetzgebung und Wissenschaften — eine jede auf ihrem Gebiete — mit grosser Macht hin. Dasselbe ist gerade auf letzterem Felde, welches zur Anwendung unsrer Dis-

ziplin in erster Linie in Betracht kommt, im weitesten Umfange verwirklicht, und bildet es in der That eine unerlässliche Voraussetzung für alles exakte Denken. Auch bleibt es unbenommen, die Abgrenzung in Frage kommender Klassen von Dingen zunächst nur provisorisch zu vollziehen, und falls sich aus den Ergebnissen angestellter Untersuchungen auf Grund exakten Denkens Beweggründe dazu ergeben sollten, diese Abgrenzung nachträglich abzuändern, zu modifiziren.

Verstehen wir unter b die Klasse der Studirenden auf deutschen Universitäten im laufenden Studienjahre, so ist diese Klasse eine wohldefinirte. Hier entscheidet nämlich die ordnungsmässig vollzogene Immatrikulation. In dieser Klasse b ist enthalten diejenige der Studirenden der Universität Leipzig vom selben Jahrgange, welche mit a bezeichnet werden möge. Es ist dann $a \Subset b$. Denkt man sich in die Felder auf einer hinreichend fein karrirten Seite eines Bogens Papier die Namen sämtlicher Studenten der Klasse b eingetragen, und zwar jeden Namen gesondert in ein eigenes Feld, so werden diejenigen Felder, welche die Namen von Studenten der Klasse a enthalten, einen gewissen Komplex bilden — man kann durch geeignete Auswahl der zur Eintragung der letzteren zu verwendenden Felder, durch Zusammenlegen dieser Felder bewirken, dass er einfach zusammenhängend erscheint — und es wird nun die Beziehung zwischen den Felderkomplexen, in welche die Individuen der Klassen a und b eingetragen sind, der Fig. 1 wesentlich gleichen, nämlich mit ihr darin übereinstimmen, dass der Komplex a als ein Teil des Komplexes b erscheint, in letzterem enthalten ist. Indem jedes Feld erscheint als der „Träger" eines einzelnen Individuums, einem solchen „zugeordnet" ist, prägt sich die Beziehung $a \Subset b$ zwischen den Klassen a und b hier anschaulich aus, sie wird im wahren Sinne des Wortes *sichtbar*.

Es ist für das Folgende von der höchsten Wichtigkeit, dass man sich die Punktgebiete oder Flächen, die wir im identischen Kalkul betrachten werden, und die Klassen, von welchen behufs Illustration oder Anwendung des Kalkuls die Rede sein wird, in der geschilderten Weise auf einander bezogen denke. Wir glaubten, um allseitiges Verständniss zu erzielen, auch ein Beispiel mit begrenzter Individuenzahl der Klassen vorführen zu müssen. Man wähle bei unbegrenzter Individuenzahl (mathematische) *Punkte*, bei begrenzter etwa *Felder* zur Darstellung der in Betracht kommenden Individuen. Indess steht im letztern Falle nichts im Wege, die Felder sich auch in getrennte, etwa besonders markirte Punkte zusammenziehen zu lassen.

Nach diesen (im Grossen und Ganzen auch motivirten) Vorbemerkungen gehen wir zur systematischen Darstellung der *Theorie* über.

Es kommt uns dabei auch sehr auf Erzielung einer guten Übersicht an, welche wir durch scharfe Sonderung und konsequente Chiffrirung ihrer verschiedenen Momente zu erzielen hoffen.

„Definitionen", Begriffserklärungen chiffriren wir (wenn überhaupt,

so) je mit arabischen Ziffern in vollständiger aber einfacher Klammer, wie (1), (2) und so weiter.

„*Postulate*“ ebenso, jedoch mit doppelter Einklammerung wie ((1)), ((2)), . .

„*Prinzipien*“ oder „Axiome“ mit römischen Ziffern, wie I, II, etc.,

„*Theoreme*“, Lehrsätze wieder mit arabischen Zahlen aber nur einseitiger (rechtseitiger) Einschliessung, mit „Halbklammer“, wie 1), 2), 3), . .

Es wird der Logik gemeinhin zugemutet, dass sie auch erkläre, was unter Definition, Postulat, Axiom und Theorem zu verstehen sei, dass sie also namentlich auch auf die Erfordernisse einer guten Definition näher eingehe, desgleichen auf die Anforderungen, die an den *Beweis* (die „*Demonstration*“) zu stellen, durch welchen das Theorem als ein solches nachgewiesen werden muss, durch welchen es von einer blossen Behauptung zum Lehrsatz erst erhoben wird.

Ähnlich gehört auch die Charakterisirung der „Aufgabe“ des „*Problems*“, nebst den Anforderungen an ihre „Lösung“ (solutio) und deren „Determination“ noch zu den Obliegenheiten der gewöhnlichen Logik.

Es erscheint jedoch durch die Anlage, den Plan des ganzen Buches geboten, dass wir uns *an dieser Stelle* auf diese Fragen nicht einlassen, vielmehr uns mit dem Hinweis begnügen, dass die fraglichen Begriffe, soweit sie nicht ohnehin schon Gemeingut sind, einstweilen wenigstens synthetisch erworben, herangebildet werden können an dem Material der aufzustellenden und als solche hingestellten speziellen Definitionen, an der grossen Zahl von mustergültig bewiesenen Theoremen, etc.

Es wird sich ein „*Dualismus*“ (eine „Reziprozität“) durch die ganze Disziplin ziehen, indem die auf die Operationsstufe der Addition sich beziehenden Sätze sozusagen „Pendants“, symmetrische Gegenstücke bilden zu den auf die Stufe der Multiplikation bezüglichen (vergl. § 14). Wir chiffriren die „einander dual entsprechenden“ Sätze jeweils mit der gleichen Nummer, jedoch unterschieden durch das Suffixum $+$ resp. $\times$. Auch stellen wir solche Sätze meistens in den beiden Spalten (Kolumnen) links und rechts von einem die Druckseite in der Mitte brechenden Vertikalstriche (dem „Mittelstriche“) einander symmetrisch gegenüber.

Die analoge Übung besteht bekanntlich schon längst in der Geometrie der Lage, wo in den reziproken oder zu einander polaren Sätzen z. B. Raumpunkt und Ebene ihre Rollen tauschen, während die Gerade verharrt.

Es bedarf wol kaum des Hinweises, dass (hier wie dort) in *verschiedenen* Kolumnen oder Spalten aufgeführte Voraussetzungen oder Behauptungen, wenn sie auch im selben Niveau, auf *einer* Zeile stehen, doch niemals Bezug auf einander haben sollen: sie sollen nicht etwa gleichzeitig gelten, behauptet oder angenommen werden. Vielmehr hat man auf einmal immer nur den Text von *einer* Spalte allein, zusammen mit den etwa quer durchgehenden Zeilen zu lesen.

Ohne Suffixum werden nur die „zu sich selbst dualen“ Sätze chiffrirt erscheinen.

Als für die Theorie vorerst unwesentlich — indess behufs etwaiger Nebenbemerkungen vorausgeschickt zu wünschen — lasse ich zur Zeit unchiffrirt die

(Definition). Unter einer Aussage von der Form:

$$b \succcurlyeq a$$

(sprich: *b übergeordnet oder gleich a, b super a*) soll ganz das nämliche verstanden werden, wie wenn man sagt, dass

$$a \preccurlyeq b$$

sei. *Eine Subsumtion kann hienach auch rückwärts gelesen werden, indem man nur das Subsumtionszeichen* als Supersumtionszeichen interpretirt, resp. *„umkehrt“*.

Kraft dieser Definition vermögen wir auch den (verhältnissmässig seltenen) Fällen gerecht zu werden, in welchen die Wortsprache das Prädikat dem Subjekte voranzustellen liebt — auf welche bereits in § 2 hingewiesen wurde: auch dergleichen Urteile mögen wir jetzt unmittelbar in die Formelsprache übertragen, ohne dass wir erst genötigt wären, eine Umstellung der beiden Satzglieder dabei vorzunehmen.

Ökonomisch und von Wert wird solche Möglichkeit sich besonders dann erweisen, wenn etwa der natürliche Gedankenverlauf dahin geführt hat, das Prädikat zuerst, vor dem Subjekte, zu beschreiben und wenn diese Schilderung sowie auch der Ausdruck gedachten Prädikates in den Symbolen unsrer Formelsprache einigermassen komplizirt erscheint, weitläufig ist. Wollte man in solchem Falle das Subjekt in die gewöhnliche typische oder normale Stellung zum Prädikate bringen, so wäre man genötigt, die umständliche Beschreibung, den komplizirten Namen oder Ausdruck des letzteren (hinter dem Subjekte, nachdem er vor demselben zuerst gefallen ist) *zu wiederholen*, was mühsam und langweilig sein kann. Die Wortsprache vermag sich dem durch den Gebrauch eines hinweisenden Fürworts zu entziehen, indem sie auf das Prädikat als auf jenes oder dieses eben beschriebene Ding zurückverweist. In der Formelsprache könnten wir allenfalls solcher lästigen umständlichen Wiederholung dadurch auch aus dem Wege gehen, dass wir sofort, nachdem der komplizirte Name des Prädikats erstmalig vollendet ist, ein einfaches Buchstabensymbol als Abkürzung für denselben, als Name ad hoc oder Hülfsbezeichnung für dieses Prädikat einführten, sodass dessen Wiederholung dann keine Umstände mehr verursacht. Doch kann auch dies schon eine Nötigung zu unbequemen Weiterungen (wie Überladung der Untersuchung mit Zeichen u. a.) in sich schliessen, und bleibt das einfachste Auskunftsmittel jedenfalls das anmit geschaffene: die Beziehung des Subjekts zum Prädikate in der umgekehrten Ordnung als eine rückwärts gelesene Subsumtion oder „Supersumtion“ dann zum Ausdruck zu bringen.

In die systematische Darstellung unsrer Disziplin werden wir das Supersumtionszeichen $\succcurlyeq$ erst in § 34 aufnehmen.

Zweite Vorlesung.

§ 4. Erste Grundlagen: Prinzip I und II, Definition von Gleichheit, 0 und 1, nebst Folgesätzen.

An die Spitze haben wir zwei Grundsätze zu stellen, welche nicht auf noch einfachere Sätze zurückführbar erscheinen und schlechthin zugegeben werden müssen.

Prinzip I.

$$a \mathrel{\overset{=}{\in}} a.$$

Da das Subsumtionszeichen $\overset{=}{\in}$ der Kopula „ist“ entspricht, so heisst dies in Worten: „*a ist a*“.

Diese Aussage muss als eine gültige anerkannt werden, was immer für eine Bedeutung dem *a* auch beigelegt werden mag. Z. B. „Gold ist Gold“. „Weiss ist weiss“, etc. Dergleichen Sätze sind von niemand bestrittene Wahrheiten, deren Äusserung höchstens ihrer Selbstverständlichkeit halber Anstoss erregen kann.

Demgemäss trägt auch die obige Subsumtion I den Charakter einer *allgemeingültigen*, einer „Formel“. Dieselbe, oder ihren Ausdruck in Worten, nennen wir den *Satz der Identität*, principium identitatis.

Unter diesem Namen hat schon die alte Logik den Satz gekannt und als ersten Grundsatz angenommen.

Bedeutet *a* ein Punktgebiet (z. B. eine Fläche) aus unsrer Mannigfaltigkeit (der Fläche der Schultafel), so sagt der Satz I aus: *a ist in sich selbst enthalten, ist ein Teil von a; a ist untergeordnet oder identisch gleich a.*

In der That liegt von den beiden Fällen, welche wir in der Einleitung unter dem Subsumtionszeichen als mögliche zusammengefasst haben, hier, wo beide Seiten der Subsumtion das nämliche Gebiet vorstellen, ganz zuverlässig der eine vor, aber allerdings nie der erste, sondern immer nur der zweite Fall: *a* ist niemals*) untergeordnet dem *a*, sondern stets identisch gleich *a*.

*) Diese Behauptung, welche allerdings sofort einleuchtet, wird sich auf einem späteren Standpunkte auch *beweisen* lassen.

Die Aussage $a \mathrel{=\!\!\!\in} a$ hat daher etwas von jenem irreführenden Charakter, den wir bereits auf S. 134 sq. besprochen und durch ein Beispiel illustrirt haben; und auf den ersten Blick würde das nachher von uns bewiesene Theorem 1), nämlich die Gleichung $a = a$, als der angemessenere Ausdruck des Satzes der Identität erscheinen. Demungeachtet müssen wir doch bei der obigen Fassung I dieses Prinzips beharren aus zwei Gründen.

Erstens hatten wir es ja angezeigt gefunden, von den drei Zeichen $\mathrel{=\!\!\!\in}$, $\subset$ und $=$ das erstere oder Subsumtionszeichen als das *ursprüngliche* hinzustellen, auf dessen wohlerfasste Bedeutung das ganze Gebäude der Algebra der Logik zu gründen sei. Von den beiden andern Zeichen wurde bisher nur ganz beiläufig gesprochen, nämlich lediglich, um die äusserliche Bildungsweise oder Zusammensetzung des Subsumtionszeichens zu *motiviren.* Das Zeichen $=$ werden wird erst nachher, mittelst Definition (1), als ein wesentliches fortan legitim zu verwendendes Beziehungszeichen in das System unsrer Disziplin einführen, und das Zeichen $\subset$ noch sehr viel später. Auf unserm *gegenwärtigen* Standpunkte sind wir also noch gar nicht berechtigt, resp. in der Lage, von identischer Gleichheit zu reden.

Zweitens — und dieser Grund ist der ausschlaggebende — müssen wir trachten möglichst wenig Behauptetes als unbeweisbaren Grundsatz hinzustellen. Sagen wir aber von einem ausgewanderten Freunde z. B., er sei nach Südamerika gegangen, so sagen wir offenbar mehr über ihn aus, als wenn wir blos melden, er sei nach Amerika (d. i. Nord-, Süd- *oder* Mittelamerika) gegangen. Und ebenso enthält die Aussage: „a ist identisch gleich a“ eine weitergehende Information über die Beziehung des a zu sich selber, als die Aussage: „a ist untergeordnet *oder* identisch gleich a“, m. a. W. „a ist entweder nur ein Teil oder aber das Ganze von a“.

Um also möglichst wenig Unbewiesenes vorauszusetzen, werden wir die letztere Alternative zunächst offen lassen, nur den letzten Satz als Grundsatz hinstellen. Wir werden für den Augenblick so thun, als ob wir nicht wüssten, welcher von den beiden Fällen eintritt, um dergestalt zu erkennen, dass auch dann schon mit zwingenden Gründen sich darthun lässt, dass es der letztere Fall ist, welcher zutrifft.

Für den systematischen Aufbau unsrer Disziplin sind vorstehende Betrachtungen durchaus nicht *wesentlich;* ich habe mit denselben nur beabsichtigt, die *Beweggründe* unsres Zuwerkegehens klar zu legen, somit auch einer missverständlichen Beurteilung desselben zuvorzukommen.

Für die Theorie ist es vollkommen ausreichend, das Prinzip I rundweg als ein solches hinzustellen.

Anmerkung zu I. Aus didaktischen Gründen will ich ebenso, einstweilen vorgreifend, bemerken, dass, als ein Prinzip des „Aussagenkalkuls" gedeutet, der Satz I der Identität uns die Erlaubniss garantiren wird, eine als wahr anerkannte Behauptung bei beliebiger Gelegenheit zu wiederholen. Dieselbe muss dann immer wieder als wahr anerkannt werden. Wenn a gilt, so gilt a. Von dieser Freiheit werden wir im Text fortgesetzt Gebrauch machen. (Vergl. § 31.)

Prinzip II. *Wenn* $a \Subset b$ *und zugleich* $b \Subset c$ *ist, so ist auch* $a \Subset c$.

Stellen a, b, c Gebiete — etwa Kreisflächen — vor, so mag dieser Satz durch die Figur erläutert werden:

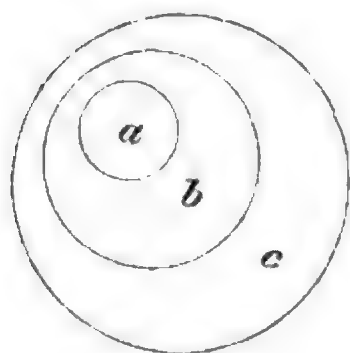


Fig. 3.

Indessen bringt solche Figur noch Besonderheiten (besondre Umstände) zum Ausdruck, die in dem Satze nicht gefordert, nur zugelassen, die in ihm offen gelassen sind. Der Fig. 3 liegt nämlich die Annahme zugrunde, dass die eventuellen Unterordnungen, von welchen im Satze die Rede ist, wirkliche, definitive Unterordnung seien. Da das Zusammenfallen zweier Kreise, von denen der eine im andern enthalten ist, immerhin als ein verhältnissmässig seltener Zufall erscheint, so mag man den in der Figur 3 zur Darstellung gebrachten Fall als den „allgemeineren" bezeichnen (und zwar in Hinsicht jedes Paares von aufeinanderfolgenden Kreisen, welches man in's Auge fassen möge).

Um auch die andern im Prinzip II mit inbegriffenen Fälle zu erhalten, braucht man sich nur noch vorzustellen, dass von den drei Kreisen, nämlich dem innersten a, dem mittleren b und dem äusseren c, irgend zwei successive auch zusammenfallen dürfen — eine Deckung,

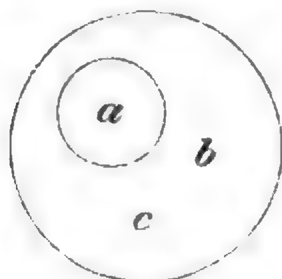


Fig. 4.

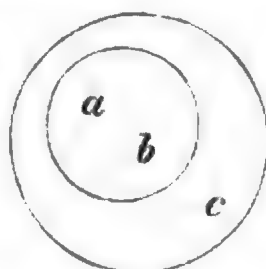


Fig. 5.

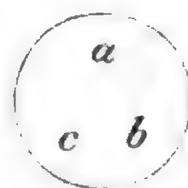


Fig. 6.

die sich in einfachster Weise hinbringen lässt, entweder indem man einen äusseren Kreis zusammenschrumpfen lässt zu dem nächsten in ihm enthaltenen Kreis, oder auch indem man den inneren Kreis sich ausbreiten lässt bis zur völligen Ausfüllung des nächsten ihn um-

schliessenden Kreises. Es können so auch alle drei Kreise in einen einzigen zusammenfallen, und erhalten wir eigentlich noch vorstehende drei Figuren (Fig. 4 .. 6), welche mit Fig. 3 zusammen den Satz II erst vollständig veranschaulichen.

Wir werden bei der Veranschaulichung von Sätzen und Aufgaben uns künftig zumeist nur an den „allgemeinen" Fall halten und uns mit der Darstellung der Fälle spezielleren Charakters durch Figuren nicht aufhalten, vielmehr die besonderen Ausartungen, die „Degenerationsfälle" sich ebenfalls zu veranschaulichen jeweils dem Leser überlassen — soferne solches überhaupt noch wünschenswert erscheint.

In verwickelteren Untersuchungen — beim Auftreten zahlreicher Gebietssymbole — wird es ohnehin unthunlich, jene Möglichkeiten immer vollständig durchzugehen. Alsdann aber bleibt der Argwohn zulässig, es möchte in einem der übergangenen Spezialfälle die Sache sich doch wesentlich anders verhalten, als in dem allgemeineren Falle behauptet und dargestellt worden. Hieraus erhellt, dass aus der *Anschauung* nicht in gleichem Maasse die Überzeugung von der *Gewissheit* unsrer allgemeinen Untersuchungsergebnisse zu schöpfen ist, wie sie sich erreichen lassen wird durch die streng *analytische* Methode, deren wir uns fast immer, jedenfalls in wesentlichen Fragen ganz ausschliesslich bedienen. Kann doch in der That für die Umgrenzung eines Gebiets die Figur immer nur ein *Beispiel* darstellen, während unsre Gebiete irgendwie beschaffen sein, auch aus isolirten Punkten, Linien und getrennten Flächenstücken sollen bestehen dürfen! Mag also auch anfangs — bei unsern grundlegenden Betrachtungen — die Anschauung oft rasch vorauseilen dem durch das Folgende illustrirten modus procedendi, nämlich dem vorsichtigen und zuweilen mühsamen Verfahren des von der Anschauung losgelösten streng deduktiven Schliessens, so wird sie doch später sicher hinter diesem Verfahren zurückbleiben; sie wird ihm bald nachhinken und zuletzt es aufgeben müssen, dasselbe einzuholen. Bei dem Aufbau unsres Lehrgebäudes soll darum die Anschauung nur nebensächliche Verwendung finden, illustrationsweise, um den abstrakten logischen Prozeduren einen Vorstellungsinhalt zu geben; sie soll darin überhaupt nur eine didaktische, erziehende, pädagogische Rolle spielen.

Hier freilich müssen wir uns noch auf dieselbe stützen, um das Prinzip II annehmbar erscheinen zu lassen: Wenn ein Gebiet in einem zweiten und dieses in einem dritten enthalten ist, fällt es uns unmöglich, uns vorzustellen, dass das erste nicht in dem dritten enthalten wäre; das Gegenteil vielmehr ist unmittelbar „intuitiv". Auf die Heraus-

forderung drei solche Gebiete a, b, c nachzuweisen, bei denen die vorausgesetzten Einordnungen des a in b und des b in c zutreffen, die behauptete Einordnung des a in c aber sich nicht bewahrheitet, wird niemand sich stellen können.

Das Prinzip II gibt uns ein Schema an die Hand, nach welchem von (zwei) bekannten Wahrheiten zu einer neuen (dritten) Wahrheit fortgeschritten, nach welchem aus zwei Aussagen eine dritte abgeleitet werden kann, welche allemal, wenn jenen beiden Wahrheit zukommt, notwendig ebenfalls wahr sein muss. Nach unsern einleitenden Betrachtungen haben wir einen solchen Prozess als eine *Schlussfolgerung*, als deduktives *Schliessen* (inference, illatio) zu bezeichnen.

Die *Voraussetzungen*, aus denen gefolgert wird, die „*Prämissen*“ sind hier die beiden Subsumtionen $a \Subset b$ und $b \Subset c$; der „*Schluss*“ (genauer: „Schlusssatz“), die „*Konklusion*“ heisst $a \Subset c$.

Der Schluss (als Folgerung verstanden) ist nicht nur gemeinverbindlich für alle Intelligenzen, sondern auch „allgemeingültig“, nämlich unabhängig von der Materie des Denkens: Sein Schema ist *allgemein*, indem der Schluss Geltung beansprucht, was auch immer für Bedeutungen den Buchstabensymbolen a, b, c in jenem Schema (durchweg) untergelegt werden mögen. Vorläufig werden wir das Schema auf Gebiete unsrer Mannigfaltigkeit, sodann auch auf Klassen von irgendwelchen Objekten des Denkens anzuwenden haben.

Der Satz II selbst ist — hier im System für uns — das erste Beispiel eines deduktiven Schlusses, und zwar ist er in der That einer — abermals der erste — von den sogenannten Vernunftschlüssen oder „*Syllogismen*“ der alten Logik, in deren Studium — kann man fast sagen — diese Disziplin gipfelte. Derselbe führt daselbst den — etwas geschmacklosen — Namen *Barbara* und wird auch als das „dictum de omni (et de nullo)“ bezeichnet.

„Quidquid de omnibus valet, valet etiam de quibusdam et de singulis (quidquid de nullo valet, nec de quibusdam valet, nec de singulis)“ ist der Wortlaut dieses „dictum“.

Was von *allen* gilt, das gilt auch von einigen und von den einzelnen (Was von *keinem* gilt, das gilt weder von einigen noch von den einzelnen) — scilicet Individuen.

Wir werden die Syllogismen auch in diesem Werke vollständig (und kritisch) durchnehmen, und mag deshalb in Bezug auf Einiges, was über den Syllogismus Barbara noch zu sagen wäre, auf die 20. Vorlesung verwiesen werden.

Zur Stelle sei nur noch bemerkt, dass das Gebiet b, welches in

der Konklusion gar nicht vorkommt, dagegen in jeder der beiden Prämissen einmal vertreten ist, als das *Mittelglied* (terminus medius) des Syllogismus bezeichnet zu werden pflegt; dasselbe wird durch die Schlussfolgerung ausgemerzt oder „*eliminirt*". Von den beiden Prämissen heisst diejenige ($a \Subset b$), welche das Subjekt a der Konklusion enthält, auch der *Untersatz* (propositio minor), die andere ($b \Subset c$), welche das Prädikat c der Konklusion enthält, der *Obersatz* (propositio major) des Syllogismus.

Wie schon gesagt, ist der Satz II ein *allgemeiner* Schluss, welcher, weil die Bedeutung der in ihm vorkommenden Glieder a, b, c in unser Belieben gestellt ist, das Vorbild abgibt für eine unbegrenzte Menge nach seinem Schema auszuführender Schlüsse.

Um rein mechanisch die Konklusion $a \Subset c$ aus den Prämissen abzuleiten, bieten sich zwei Wege dar: Man mag in dem Untersatze $a \Subset b$ das Prädikat b auslöschen, und an seine Stelle schreiben das Glied c, welches in dem Obersatz jenem übergeordnet erscheint. Oder man kann auch in dem Obersatz $b \Subset c$ das Subjekt b ersetzen durch dasjenige Subjekt a, welches in dem Untersatz demselben untergeordnet erklärt ist. Hienach können wir die beabsichtigte Anwendungsweise des Schema's II in Worten wie folgt formuliren:

In einer Subsumtion (einem Urteil) kann an Stelle des Subjekts jedes Subjekt dieses Subjektes, sowie an Stelle des Prädikats jedes Prädikat dieses Prädikates eingesetzt (substituirt) werden.

Es wurde in II der Untersatz *vor* (eventuell *über*) dem Obersatz ausgesprochen („Goclenische" Anordnung der Prämissen). Auch wenn umgekehrt der Obersatz vor (resp. über) den Untersatz gestellt ist („Aristotelische" Anordnung), muss man geübt sein, den Schluss zu ziehen:

$$\text{Aus } b \Subset c \quad \text{und} \quad a \Subset b \quad \text{folgt ebenfalls} \quad a \Subset c.$$

Denn nach Prinzip I, für Aussagen in Anspruch genommen (vergl. Anmerkung zu I) kann man auch die zweite Prämisse vor der ersten lesen und die (für uns) ursprüngliche Anordnung der Prämissen herstellen.

Die Goclenische Anordnung empfiehlt sich (hier) in der That als die zur Erreichung des Schlusses bequemere, zur Vorbereitung der Schlussfolgerung geeignetere; sie erscheint als die natürliche für die Logik des Umfanges. Die Wahl der umgekehrten Folge erklärt sich bei Aristoteles aus dem Umstand, dass er statt der Umfänge eben die Inhalte der Begriffe in's Auge fasste, wo dann die Stellung: „c ist

Merkmal des b, b Merkmal des a, ergo c auch Merkmal des a" als die natürlichere erscheint.

Auch wenn a, b, c *Klassen* vorstellen, musste der Satz II allgemeine Geltung haben. Hiezu ein paar Beispiele. Es ist:

Gold ⋹ Edelmetall, Edelmetall ⋹ Chemisches Element,
folglich auch: Gold ⋹ Chemisches Element.
Luft ist ein Körper. Alle Körper sind schwer.
Ergo: die Luft ist schwer. (Lotze.)
Pferd ⋹ Säugetier; Säugetier ⋹ Wirbeltier; ergo: Pferd ⋹ Wirbeltier.

Beiläufig sei noch bemerkt, dass ein Schluss nach dem Schema II auch häufig als ein Schluss *a fortiori* bezeichnet wird; namentlich ist dies berechtigt, wenn (wie dies meist der Fall) die Subsumtionen in den Prämissen wirkliche Unterordnung bedeuten — in Analogie zu dem Schluss der Arithmetik von $a < b$ und $b < c$ auf $a < c$. Wenn jedes Pferd ein Säugetier und jedes Säugetier ein Wirbeltier ist, so muss — können wir sagen — *um so mehr* auch jedes Pferd ein Wirbeltier sein. —

Drücken wir — um bei unsern Beispielen zu bleiben — dies etwa so aus, indem wir nunmehr auch auf den Inhalt der den Klassen zugeordneten Begriffe achten, dass wir sagen: Den Pferden kommen diejenigen Merkmale zu, die allen Säugetieren gemeinsam sind; die Säugetiere aber besitzen alle für die Wirbeltiere gemeinsamen Merkmale, und folglich müssen den Pferden auch die Merkmale der Wirbeltiere zu eigen sein, so wird verständlich, weshalb die überlieferte Logik (Kant) dem Prinzip II auch den Ausdruck geben konnte: „nota notae est nota rei (repugnans notae repugnat rei)": jedes Merkmal des Merkmals (einer Sache) ist auch ein Merkmal der (eben dieser) Sache. Die in dem Beispiel in Frage kommenden Merkmale sind (kurz zusammengefasst) bezüglich die, Säugetier zu sein und Wirbeltier zu sein.

So auch ist, Materie zu sein, stoffliche Qualität, ein Merkmal der Luft, und schwer zu sein, Schwere, ein Merkmal der stofflichen Natur, „Stofflichkeit" (sit venia verbo!), folglich auch Schwere ein Merkmal der Luft. —

Nun drängt sich freilich wol einem Jeden, der einen solchen Syllogismus in's Auge fasst, eine Bemerkung auf, die ich zunächst für unser Beispiel aussprechen will, nämlich: dass man gar nicht wissen könne, dass alle Säugetiere Wirbeltiere seien, ohne bereits zu wissen, dass auch die Pferde Wirbeltiere sind.

Ebenso kann man auch nicht wissen, dass ein Gebiet b ganz, mit

allen seinen Teilen, in einem Gebiet *c* enthalten ist, ohne zugleich zu wissen, dass auch der Teil *a* des Gebietes *b* in *c* enthalten ist.

Die Bemerkung also ist naheliegend, *dass die Schlussfolgerung uns keine wesentlich neue Erkenntniss liefert*, keine, die wir — im Besitze der Prämissen befindlich — nicht eigentlich schon besessen hätten.

Diese Bemerkung ist richtig und unbestritten: es findet durch deduktives Schliessen eigentlich keine Vermehrung des Erkenntnissmaterials statt; die Deduktion gibt über nichts Aufschluss, was nicht in den Prämissen, auf die sie sich stützt, im Grunde schon enthalten wäre, und es kann der Syllogismus II als das einfachste Beispiel, als der Urtypus deduktiven Schliessens, als der er sich hinstellen lässt, gerade am allerbesten benutzt werden, um über das Wesen der deduktiven Methode Klarheit zu verbreiten.

Eines aber, dem wir entgegentreten müssen, das ist die Versuchung (der auch manche Philosophen erlegen sind), auf diesen Umstand eine Geringschätzung der deduktiven Methode zu basiren.

Gleichwie es schwierig sein möchte*), Demjenigen, der eben erst das Alphabet erlernt, einen angemessenen Begriff beizubringen von der Grossartigkeit der Literatur, die ihm durch dasselbe erschlossen wird, so dürfte es auch schwer halten, einem Anfänger, welcher etwa noch keine einzige deduktive Disziplin beherrscht, eine zutreffende Vorstellung beizubringen von der Kraft und dem Wert der deduktiven Methode. Ich würde mich einem solchen gegenüber eines Gleichnisses bedienen: Der Maschinenbauer muss auch das Eisen, aus dem er seine Maschinenteile herstellt, schon haben; es findet bei dem Bau der Maschine keine Vermehrung dieses Materials statt, vielmehr geht ein nicht unbeträchtlicher Teil desselben dabei unproduktiv verloren. Und ferner wird auch bei der Benutzung der fertig gestellten Maschine keine Arbeit durch dieselbe geschaffen, sondern nur ein bereits verfügbarer Arbeitsvorrat — abermals unter Verlusten — in neue wertvollere Formen umgesetzt.

Analog dem ersten, wie auch dem zweiten Teil dieses Gleichnisses, hebt nun allerdings die deduktive Methode aus dem vorhandenen Material oder Vorrat von Erkenntnissen nur Einzelnes hervor, aber allerdings gerade dasjenige, was für bestimmte Erkenntnisszwecke von Wert ist, für die Fortführung der Untersuchung von Interesse erscheint. Sie begrenzt dieses Einzelne in bestimmte Formen und bringt es, von

*) Wenn ich mir gestatten darf, ein schon anderwärts von mir gebrauchtes Bild zu wiederholen.

dem Übrigen getrennt, zum Bewusstsein, bietet es isolirt der Aufmerksamkeit, der Beachtung dar, und hält es zu weiterer Verwendung disponibel. Mitunter richtet sie auch das Ganze in neue zu anderweitiger Förderung der Erkenntniss geeignetere Formen her.

Sie zieht — um ein anderes Bild zu gebrauchen — die im Schachte freilich bereits vorhanden gewesenen Edelsteine an das Tageslicht, gibt ihnen Schliff und Fassung.

Dass diese Deduktion aber eine *Kunst* ist, welche in den meisten Fällen gar nicht so nahe liegt, deren Methode oft nicht leicht zu entdecken, zeigen fast alle Untersuchungen aus dem Gebiete der reinen und angewandten Mathematik, ebenso die komplizirteren Aufgaben in gegenwärtiger Schrift.

Um es zur Stelle durch ein Beispiel darzuthun, *welches keine Vorkenntnisse erfordert*, lege ich dem Leser eine ganz einfache Aufgabe (aus der allgemeinen Theorie der Verknüpfung) vor.

Es mögen a, b, c beliebige Elemente einer Mannigfaltigkeit und ab das Resultat einer Verknüpfung von a mit b bedeuten, von der wir annehmen, dass sie jeweils wieder ein bestimmtes Element derselben Mannigfaltigkeit liefere; m. a. W. es sollen irgend zwei Elemente, in bestimmter Folge genommen, sich immer „eindeutig" zu einem dritten verknüpfen lassen. Die Knüpfung sei auch „eindeutig umkehrbar", d. h. wenn a allein, oder b allein, durch ein anderes Element ersetzt, geändert wird, so soll auch ab sich ändern.

Wenn nun die Knüpfung z. B. das Gesetz befolgt, dass allgemein immer $(ab)(bc) = ac$ ist, so soll die Frage entschieden werden, ob $ab = ba$ durchaus zu gelten habe (die Knüpfung „kommutativ" sein müsse), oder aber, ob nicht vielleicht in besondern Fällen ein Knüpfungsergebniss ab von dem ba verschieden sein könne?

Jene Frage ist zu bejahen (die letztere zu verneinen), sie wäre dagegen, wenn das Gesetz der Knüpfung ein wenig anders, nämlich $(ab)(bc) = ca$ gelautet hätte, zu verneinen.

Diese Antwort auf die gestellte Frage steckt bei der ersten sowol als bei der etwas abgeänderten zweiten Aufgabe ebenfalls ganz und gar schon in den Prämissen, aber doch ziemlich verhüllt. Man versuche doch einmal, sie aus den Prämissen herauszuschälen! Ich will dies hier unterlassen, da die Betrachtung in eine andere (in gewissem Sinne speziellere) Disziplin gehört. —

Ich bemerke nur noch, dass man unter den „Elementen" sich auch *Zahlen* z. B. vorstellen darf, und das Knüpfungsergebniss ab dann — im mathematischen Sinne — irgend eine „Funktion" $f(a, b)$ der zwei Argumente a und b bedeuten wird, die eindeutig umkehrbar sein muss. Erfüllt diese nun die Funktionalgleichung (und es *gibt* solche Funktionen):

$$f\{f(a, b),\ f(b, c)\} = f(a, c),$$

so wird sie auch „symmetrisch" sein, nämlich $f(a, b) = f(b, a)$ für alle Werte von a und b sein müssen. —

Wie oft nicht finden wir aber — ganz ähnlich wie bei der vorliegenden

Aufgabe — uns in der Lage, dass wir gar nicht wissen, was alles in unserm Wissen schon enthalten ist, dass wir nicht sofort abzusehen vermögen, ob ein Bestimmtes darin liegt oder nicht, und es im ersten Falle eine schwere Arbeit kostet, dasselbe herauszuholen!

Es ist dieser Umstand die Folge von dem Vorhandensein *allgemeiner* Erkenntnisse, in Gestalt von welchen ja gegenüber dem direkten Erkennen auch das *mittelbare* oder indirekte Erfassen von Wahrheit zur Thatsache wird.

Wer den Wert der Deduktion überhaupt oder der Syllogistik insbesondere aus dem Grunde bestreitet, weil dabei ein Verlust, ein Preisgeben von, Verzichten auf, Opfer an Erkenntnissmaterial stattfindet, gebraucht durchaus kein stichhaltigeres Argument oder Beweismittel, als jemand, der den Nutzen der Maschine leugnen wollte, weil sie vom verfügbaren Arbeitsvorrat einen Teil als Nebeneffekt verloren gehen lässt — oder auch den Wert der Bildhauerkunst wegen des durch sie herbeigeführten Verlustes an Marmor! Es hat auch die Gestalt, in der wir Erkenntnisse isoliren, ihren selbständigen Wert.

Um die Wertschätzung der Deduktion dem Anfänger gegenüber zu retten, resp. diese gegen die auf sie erfolgten Angriffe zu verteidigen, heben Mill und Wundt[1] (p. 285 sq.) — an Stelle des vorstehend von mir in den Vordergrund gestellten Grundes — als ein ebenfalls nicht zu übersehendes Moment mit Recht hervor, dass man bei jenen auf eine Geringschätzung hinauslaufenden Einwänden von der verkehrten Vorstellung ausgeht, ein allgemeiner Satz lasse sich nur auf diejenigen Fälle anwenden, aus welchen er abstrahirt worden ist. Die fruchtbringendste Anwendung unsres Syllogismus besteht aber gerade darin, dass wir ihn auf solche Fälle anwenden, die zur Aufstellung der (in der Regel wol induktorisch gewonnenen, vielleicht auch axiomatisch-hypothetisch aufgestellten) allgemeinen Prämisse *nicht* gedient haben.

Ein gut gewähltes Beispiel hiezu bringt Ueberweg in Gestalt des Schlusses: Was das Pendel verlängert verlangsamt (ceteris paribus, unter sonst gleichen Umständen) den Gang desselben. Wärme (genauer: Temperatursteigerung, Erwärmung) verlängert das Pendel. Also verlangsamt sie seinen Gang. Der Obersatz konnte in der theoretischen Physik durch Rechnung abgeleitet sein, und brauchte also nicht notwendig ohne Vermittelung des Untersatzes schon den Schlusssatz als Spezialfall in sich zu enthalten (cf. Fr. A. Lange[1] p. 89).

Im Grunde auch wird ja bei dem induktiven Verfahren, es wird selbst in den Erfahrungswissenschaften immer nur *von besonderen Fällen* auf den besonderen Fall geschlossen. Schon das einmal sich gebrannt habende Kind scheut ein zweites mal das Feuer, noch ehe es sich zu

dem allgemeinen Urteil erhoben, dass die Berührung mit Feuer brennenden Schmerz verursacht. Und jener Art des Schliessens vom Besondern auf's Besondre — des *„Analogieschlusses“* — ist schon das Tier fähig; auch der „asinus ad lapidem non bis offendit eundem“, selbst der Esel stösst nicht zwei mal an denselben Stein. Mit dem allgemeinen Satze aber, wie ihn der Induktionsschluss liefert, erhebt sich der menschliche Intellekt über den des Tieres. Dieser Satz ist das wirksamste und sicherste Mittel, aus bisherigen Erfahrungen für weitere Fälle Nutzen zu ziehen, dieselben zu verwerten. Derselbe entlastet das Gedächtniss von der Anforderung, die Einzelwahrnehmungen selbst (in ihrer vielleicht grossen Anzahl) mit all' ihren Nebenumständen und Details zu behalten; er gewährt die Erleichterung, gestattet, alles Nebensächliche zu vergessen; indem durch ihn diese Einzelwahrnehmungen gleichsam summarisch gebucht, nur das Facit aus denselben gezogen wird, bildet er die bequemste Form, dieselben zur Nutzanwendung auf weitere Einzelfälle in der Erinnerung aufzuspeichern und im Geiste zurecht zu legen. Er bildet dann die Vermittelung, das Band, die Brücke, über die von jenen vielleicht schon im Gedächtniss gelöschten zu diesen neuen Fällen der Subsumtionsschluss uns hinüberführt.

Den Satz „Alle Menschen sind sterblich“ auf die bereits gestorbenen Menschen anzuwenden würde freilich ein ziemlich unnützes Beginnen sein. Aber wenden wir nicht diesen Satz (als Obersatz in Verbindung mit dem Untersatze „N. N. ist ein Mensch“ und der Konklusion: „ergo ist N. N. sterblich“) fortwährend an auf uns und unsre noch lebenden Mitmenschen? Und wie anders würde es in der Welt aussehen, wenn nicht unsre ganze Lebensführung unter der Herrschaft dieses Syllogismus stünde? Dass man kein Logiker zu sein braucht, um ihn zu machen, nimmt ihm nichts von seiner Wichtigkeit. (Wundt l. c.)

Oft auch handelt es sich darum mit Hülfe der Konklusion festzustellen, ob eine Prämisse zulässig ist — wie dies schon S. 11 angedeutet wurde — eine Prämisse, die zunächst noch einen provisorischen oder hypothetischen Charakter hat. Der Chemiker z. B., der eine Substanz zu verbrennen versucht, um zu ermitteln, ob sie organischen Ursprungs sei, steht unter der Herrschaft eines Syllogismus, dessen Obersatz lautet: „Alle organischen Körper sind verbrennlich“, dessen Untersatz: „Diese Substanz ist organisch“ aber erst durch das thatsächliche Eintreffen oder Nichteintreffen des Schlusses: „Diese Substanz ist verbrennlich“ als eine zulässige (und dann noch weiter zu verfolgende, vollends ausser Zweifel zu setzende) oder aber als eine

fortan zu verwerfende Hypothese erkannt wird (vergl. Wundt ibidem).

Wesentlich sind es übrigens *andere* Formen des Syllogismus (als der bisher besprochene einfache Subsumtionsschluss II), welche in dieser Hinsicht in Betracht kommen, weshalb die weitere Ausführung der angeregten Bemerkung auf die 20. Vorlesung zu versparen wäre.

Es gibt auch *scheinbare* Ausnahmen zu dem Prinzip II. Ohne die Vollständigkeit der Aufzählung garantiren zu wollen, bemerke ich deren von dreierlei Art. Als mehr nur auf ein Spiel mit Worten hinauslaufend will ich dieselben im Nebentexte behandeln.

Zur Verdeutlichung der *ersten* Art von solchen Ausnahmen diene das Beispiel (aus Jevons[6]):

„Hans ist *kein Narr*. *Kein Narr* eignet sich zur Bekleidung hoher Staatsämter. Ergo: Hans eignet sich zur Bekleidung hoher Staatsämter."

Was hier als Mittelbegriff erscheint hat den verbalen Ausdruck „kein Narr". Wir haben aber schon in § 2 hervorgehoben, dass „kein-*a*" überhaupt nicht eine Klasse ist. Das wahre Subjekt des scheinbaren Obersatzes bildet die Klasse: „Jeder Narr", sein Prädikat: „ist ungeeignet zur Bekleidung hoher Staatsämter". Was ferner als Untersatz erscheint, würde für die Zwecke der Logik korrekter darzustellen sein, sei es in Gestalt von: Hans »ist nicht« ein Narr, als die Verneinung des Satzes: Hans ist ein Narr, sei es als negativ prädizirendes Urteil in Gestalt von: Hans ist (ein) Nicht-Narr (d. h. bei gesundem Verstande). Welche von diesen beiden Auffassungen maassgebend sein solle für das verneinende Urteil, bildet eine bekannte Streitfrage unter den Philosophen, zu der wir erst in § 15 Stellung nehmen werden. Jedenfalls aber wird der Schluss nach Schema II hiemit hinfällig; derselbe fällt auch nicht etwa unter das Schema irgend eines andern gültigen Syllogismus. Bei der zweiten Auffassung sieht man augenblicklich, dass gar kein Mittelglied vorhanden. Hier ist die Klasse „Narr" Subjekt des einen, die Klasse „Nicht-Narr" Prädikat des andern Satzes und statt dreien gehen also vier Glieder in die Prämissen ein (sogenannnte „quaternio terminorum").

Auch eben hierauf, auf die „*fallacia* falsi medii", den ‚*Trugschluss*" (das „*Sophisma*") oder „*Fehlschluss*" (die „*Paralogie*", den ‚Paralogismus) des falschen Mittelgliedes — Trugschluss oder Fehlschluss, je nach der Absichtlichkeit oder Unabsichtlichkeit des unrichtigen Verfahrens — läuft auch die *zweite* der gedachten scheinbaren Ausnahmen hinaus.

Z. B. Aus dem Untersatz: „Rappen sind Pferde" und dem Obersatz: „Pferde sind auf dem Rennplatze", folgt *nicht* mit Denknotwendigkeit der Schluss: „Rappen sind auf dem Rennplatze".

Denn während der Untersatz dasselbe besagt, wie „Alle Rappen sind Pferde", m. a. W. die (ganze) Klasse der Rappen ist enthalten in der Klasse der Pferde, während also der Untersatz ein wirklich „universales" Urteil ist, trifft solches bei dem vermeintlichen Obersatze nicht zu. Vielmehr ist der Sinn dieses in der That unvollständigen Ausspruches eigentlich nur der: „*Gewisse* (oder Einige) Pferde sind auf dem Rennplatze", und dieser

Sinn würde ihm auch nur zukommen, wenn er selbst ausdrücklich gelautet hätte: „Alle Pferde sind auf dem Rennplatze“, indem unter „alle Pferde“ dann doch wieder nur diejenigen eines gewissen Besitzers, einer bestimmten Gruppe gemeint sein konnten, nicht aber die Klasse der Pferde überhaupt. Der angebliche Obersatz ist in Wahrheit ein „partikulares“ Urteil.

Im vorliegenden Beispiele entsprang der Fehler aus der Unvollständigkeit des Ausdrucks, der durch seine Lückenhaftigkeit bedingten Ungenauigkeit desselben, wodurch das (unzulänglich beschriebene) Subjekt des zweiten Satzes dem Namen nach zur Deckung kam mit dem Prädikat des ersten. Dergleichen „*elliptische*“ Redeweisen, welche man in der Wortsprache bequemlichkeitshalber sich ungemein häufig gestattet, sind die Hauptquelle für die logischen Paradoxa, d. h. die scheinbaren Widersprüche zur Theorie des exakten Denkens.

Die leicht in's Endlose zu vermehrenden Beispiele zeigen, dass Nachlässigkeit im Ausdruck für das exakte Denken seine Gefahren birgt, und dass man sich, unbekümmert um den Sinn, mechanisch, nach den Schemata oder Prinzipien des Kalkuls behuf Schliessens zuwerke zu gehen, erst gestatten darf, wenn die Prämissen in der Zeichensprache des Kalkuls bereits ihren vollständigen und angemessenen Ausdruck gefunden haben.

Indessen, auch wenn die Prämissen im Geiste der Wortsprache beide korrekt ausgedrückt erscheinen, kann man noch zufolge einer (alsdann also *berechtigt* zu nennenden) Doppelsinnigkeit des Mittelbegriffs in den Fehler der fallacia falsi medii verfallen.

Dies werde illustrirt durch: Einige Herren sind Grundbesitzer. Herr Meier, Herr Müller, Herr Schmidt und Herr Schulze sind einige Herren. Ergo sind dieselben Grundbesitzer.

Das Mittelglied „einige Herren“ hat im (hier vorangestellten) Obersatze eine möglicherweise ganz andere Bedeutung als im (darauf folgenden) Untersatze.

Allgemein merke man: das Mittelglied b des Syllogismus II darf nicht blos durch einen sprachlichen Ausdruck von der Form „einige x“ gegeben erscheinen; solche Beschreibung würde nicht genügen, um die Bedeutung desselben unzweideutig zu erklären.

Diese Unbestimmtheit entspringt aber nicht allein aus derjenigen des angewendeten „*unbestimmten* Zahlwortes“: „einige“, sondern sie ist schon durch die Anwendung eines *Zahlwortes* überhaupt bedingt.

Sagten wir: A, B und C sind drei Personen. Drei Personen sind an dem Morde beteiligt. Ergo sind A, B und C an dem Morde beteiligt — so wäre es ja ein vollkommen bestimmtes Zahlwort „drei“, welches zur Charakterisirung des Pseudo Mittelgliedes mit verwendet worden. Und doch kann der Schluss nicht verbindlich sein, solange nicht als Subjekt des Obersatzes: „Diese selben drei Personen“ zu setzen ist.

Die Verbindung eines Zahlwortes mit einem substantivischen Begriffe ist *nicht* ausreichend, ist unzulänglich, um eine wohldefinirte Klasse unzweideutig zu erklären. Dieselbe kann daher auch keinen Mittelbegriff liefern, der als solcher anzuerkennen wäre.

[Man könnte freilich auch: „drei Personen“ als eine wohldefinirte Klasse hinstellen, welche dann zu umfassen hätte jedes erdenkliche Tripel,

jede Zusammenstellung von irgend dreien Personen aus der Vergangenheit, Gegenwart wie Zukunft des Menschengeschlechtes. Diese Klasse ist es aber nicht, von der die Wortsprache auszusagen beabsichtigt, sobald schlechtweg von drei Personen die Rede ist; sie meint dabei immer „*gewisse* drei Personen“, d. i. nur ein nicht näher bestimmtes Individuum der vorhin beschriebenen Klasse.]

Das Nämliche was vorhin für das Beispiel der Zahl drei durchgesprochen ist, würde sich auch auf die Zahl eins übertragen lassen, da wo sie als der „unbestimmte Artikel“: „ein“ mit einem Substantiv verknüpft wird.

Um Fehlschlüsse der erläuterten Art, wie sie aus dem *Doppelsinn des Mittelgliedes* entspringen, zu vermeiden, lege man sich jeweils die Frage vor, ob unbeschadet der Gültigkeit der Prämissen das fragliche Mittelglied im Obersatze auch wirklich genau in demselben Sinne (als dasselbe) verstanden werden dürfe und müsse, wie im Untersatze.

Im Anschluss an die letzten Betrachtungen des Nebentextes konstatiren wir übrigens eine wichtige Verhaltungsmassregel, deren Befolgung sich die Wortsprache keineswegs stets zur Richtschnur nimmt, wogegen die exakte Logik sich vor der verbalen durch ihre Befolgung hervorthun muss. Es ist der Grundsatz, die ***Maxime: Verschiedenes niemals mit demselben Zeichen darzustellen*** im Laufe *einer* Untersuchung — ein Grundsatz, der als die Forderung der ***Einsinnigkeit*** aller etwa verwendeten Zeichen schon in B der Einleitung seine Rechtfertigung fand.

Die Unerlässlichkeit dieser Vorschrift kann eben durch das Prinzip II dargethan werden.

Sind a, b, c Gebiete oder Klassen derart, dass etwa $a ⋹ b$ ist, so gibt es auch immer ein solches x, dass $x ⋹ c$ ist (man braucht z. B. unter x sich nur c selber vorzustellen kraft I). Erlaubten wir uns nun etwa, das x (welches im allgemeinen von b verschieden ist) ebenfalls mit dem Namen b zu belehnen, so erhielten wir zu Prämissen $a ⋹ b$ und $b ⋹ c$ und kämen folgerichtig gemäss II zu dem Schlusse: $a ⋹ c$ — als einer Folgerung aus der einzigen Annahme $a ⋹ b$, bei ganz beliebigem c! Und die fallacia falsi medii wäre fertig und legitimirt.

Dass die Verwendung einunddesselben Zeichens als Name für verschiedene Denkobjekte (im Zusammenhange einer Überlegung) wie im vorstehenden Beispiel sich immer rächen *muss*, lässt sich allerdings nicht beweisen. Um aber die konsequente Durchführung unsrer Prinzipien unbehelligt von allen Nebenrücksichten zu ermöglichen, dürfen wir uns auch einer solchen Gefahr nicht aussetzen. Es muss demnach für den Kalkul wie für die exakte Logik maassgebend sein, dass man immer nur Identisches mit demselben Buchstaben benenne, oder die Bedeutung eines Zeichens, so wie sie einmal festgesetzt worden, unverbrüchlich festhalte, bis die Untersuchung über das damit Bezeichnete zum Abschluss gekommen. Es ist darauf zu halten ver-

pflichtet, wer immer dem dictum des „quidquid valet etc.“ allgemeine Geltung zuerkennen will.

Als eine Nutzanwendung hievon bemerkten wir schon in § 2 S. 150, dass wenn ein Ausdruck wie „einige b“ in verschiedenen Sätzen vorkommt, diese Klasse nicht immer mit demselben Zeichen b', sondern allemal wieder mit einem neuen b'', b''', etc. im allgemeinen darzustellen sein wird. Und ähnliches gilt, wo „ein b“ als Subjekt eines „unbestimmten“ Urteils auftritt. Der identische Kalkul wird ja übrigens zur Darstellung partikularer sowol als unbestimmter Urteile, über bessere als dieses provisorische Auskunftsmittel späterhin verfügen.

Eine *dritte* Art von scheinbaren Ausnahmen zu Prinzip II möge verdeutlicht werden an dem Beispiele von Jevons:

Alle Werke (Schriften, Stücke) Shakespeare's können (von *einer* Person) nicht in *einem* Tage durchgelesen werden. Hamlet ist ein Werk von Shakespeare. Ergo kann Hamlet nicht in *einem* Tage durchgelesen werden. Für eine deutsche Schule mag man Goethe's Iphigenie als Paradigma vorziehen.

Der Untersatz und Schluss kann nicht bemängelt werden, wofern es mit dem Obersatze seine Richtigkeit hat.

Das Subjekt dieses — oben vorangestellten — Satzes: „Alle Werke . .“ steht hier nicht „distributiv“ als eine *Klasse,* sondern „kollektiv“ als eine *Menge;* es steht für „die Gesamtheit der Werke“, für „alle Werke *zusammengenommen*“ (cuncti, nicht omnes) und wäre besser durch „Sämtliche Werke“ auszudrücken gewesen.

Das Urteil ist gar kein *generelles* (abgesehen von der Unbestimmtheit der durchlesenden Person); es ist kein *im engeren Sinne „universales“.* Ein „universales“ (im weiteren Sinne, schlechtweg) kann es nur genannt werden, insofern es ein *„singulares“* Urteil ist und die singularen Urteile mit zu den universalen gerechnet werden.

Wofern der Untersatz nicht gerade Identität zwischen seinem Subjekt und seinem Prädikate aufweist, wird er — wie dies oben der Fall — eine wirkliche *Unterordnung* dieses Subjekts unter die Klasse seines Prädikatbegriffes ausdrücken. Sein Prädikat muss dann also ein *allgemeiner* oder *Gattungs*begriff sein. Dieses Prädikat des Untersatzes muss aber, als der Mittelbegriff, zugleich Subjekt des Obersatzes sein (wenn anders ein Subsumtionsschluss nach dem Schema II sich soll anbringen lassen) — was oben *nicht* zutrifft; und deshalb war der Schluss hinfällig.

Es sind also blos Unvollkommenheiten unsrer modernen Sprachen gewesen, die zu den Fehlschlüssen verleitet haben und damit Ausnahmen zum Prinzip II zu begründen schienen.

Zusatz zu II. Die Ausdehnung des Satzes II auf mehr als zwei als Prämissen angenommene Subsumtionen, welche sich so anordnen lassen, dass bis zur letzten hin das Prädikat einer jeden mit dem Subjekt der auf sie folgenden übereinstimmt, ist naheliegend. Wenn $a \mathrel{=\!\!\!<} b$, $b \mathrel{=\!\!\!<} c$ und $c \mathrel{=\!\!\!<} d$, so folgt auch $a \mathrel{=\!\!\!<} d$ und so weiter.

Der *Beweis* ist auf Grund von II selbst — durch mehrmalige An-

wendung ebendieses Prinzips — zu leisten. So folgt hier aus den beiden ersten Prämissen nach II schon, dass $a \Subset c$ sein muss, und hieraus in Verbindung mit der dritten Prämisse $c \Subset d$ folgt abermals nach II, dass $a \Subset d$ sein muss, wie behauptet worden.

Wir haben damit das Verständniss der einfachsten Form des von der alten Logik sogenannten *Kettenschlusses* (sorites) gewonnen.

Anmerkung 1 zu Prinzip II.

Auf dem Anwendungsfelde δ) des § 3, d. i. im „*Aussagenkalkul*" — vergleiche die Anmerkung auf S. 161 sq. — wird dem Prinzip II die Bedeutung zukommen: *Wenn c aus b folgt und b aus a folgt, so folgt auch c aus a* — unter *a, b, c* irgend welche Annahmen oder Behauptungen, irgend welche „Aussagen" (Urteile) verstanden.

Wir werden von diesem „Prinzip" bei den Beweisen unsrer Theoreme fortgesetzt — und, als von etwas Selbstverständlichem, stillschweigend Gebrauch machen. Damit aber der Leser alsdann auch dessen inne werde, sei hier im voraus schon darauf aufmerksam gemacht.

Unter den Prinzipien des Gebietekalkuls aber darf solches „Prinzip" offenbar nicht aufgezählt werden, da es ersichtlich oder wenigstens anscheinend gar nicht von Gebieten handelt. Jedenfalls in der That betrifft es nicht die Gebiete unsrer hier „bevorzugten" Mannigfaltigkeit.

Anmerkung 2 zu Prinzip II.

Ähnlich wie mit dem letzten verhält es sich mit noch einem Grundsatze, den wir fortgesetzt bei unsern Schlussfolgerungen im Gebietekalkul bethätigen werden.

In die fundamentalen Sätze und Formeln des Kalkuls gehen Buchstaben ein als *allgemeine* Symbole, in solcher Weise, dass denselben aus der Mannigfaltigkeit unsrer Gebiete je ein beliebiges als „Wert" oder Bedeutung soll untergelegt werden dürfen.

Der Grundsatz, den wir meinen, ist nun dieser: *Jedes allgemeine Symbol* (dessen Bedeutung unsrer Mannigfaltigkeit angehört) *darf durch jedes beliebige* (andre) *Symbol* (dessen Bedeutung derselben Mannigfaltigkeit angehört) *durchweg ersetzt werden* — einerlei ob das letztere wiederum als ein (natürlich ebenso) „allgemeines" aufgefasst wird, oder ob es beliebt wird, dessen Bedeutung irgendwelche Beschränkungen aufzuerlegen, oder ob endlich dasselbe ein ganz spezielles Gebiet bezeichnet.

Auch von dieser Erlaubniss machen wir demnächst fortgesetzt Gebrauch; wir *substituiren* bei den Beweisführungen — geradeso, wie es auch in der Mathematik geschieht — alle Augenblick für ein allgemeines (Gebiete-, Klassen-, oder Aussagen-)Symbol irgend ein anderes. Aber nicht nur bei den *fundamentalen*, sondern auch bei den mittelst Beweises auf diese zurückgeführten, den aus ihnen gefolgerten oder *abgeleiteten* Sätzen, in den „Theoremen".

Bei den Definitionen und Postulaten sowie den Axiomen oder „Prinzipien" — bei allem was willkürlich ausgemacht, allgemein angenommen, konventionell festgesetzt wird — konstatirt obiger Grundsatz lediglich Dasjenige, *was im Begriffe des „allgemeinen" Symbols liegt.* Eine in Betreff sol-

cher Symbole getroffene *Übereinkunft* soll ja immer den Sinn haben, dass sie zu gelten habe, was immer für besondre (sogenannte „Werte") oder wiederum allgemeine Symbole für die Buchstaben in ihr substituirt werden, und dasselbe gilt auch in Betreff solcher Sätze oder Behauptungen, die man *übereinkommt,* ohne jeden Beweis als allgemeingültige schlechtweg zu adoptiren.

Dagegen für die aus solchen Grundlagen als Folgerungen *abgeleiteten* Theoreme die gleiche Erlaubniss in Anspruch zu nehmen ist nicht mehr blos durch den Sinn der Worte verbürgt, sondern erscheint als ein wirkliches Prinzip, wenn auch zunächst nicht als ein dem Gebietekalkul eigentümliches.

Auch die Berechtigung zu diesem Verfahren wird aber sich nicht als Ausfluss, Wirkung eines ganz neuen Prinzipes, sondern lediglich als eine Bethätigung unsres Prinzips II selber, und zwar auf dem Anwendungsfelde ε) des § 3 späterhin erkennen lassen.

Nunmehr verleiben wir auch das *Gleichheitszeichen* dem Lehrgebäude der Algebra der Logik ein, indem wir auf den als allein bekannt vorausgesetzten Begriff der Subsumtion eine Begriffserklärung der durch jenes Zeichen auszudrückenden Beziehung gründen.

Definition (1) *der identischen Gleichheit* (*Identität*).

(1)'. { *Wenn* $a \Subset b$ *und zugleich* $b \Subset a$ *ist, so werde gesagt, es sei:*

$$a = b \qquad \text{(gelesen } a \text{ gleich } b\text{)}.$$

Dass ein Ausspruch von dieser Form $a = b$ eine *Gleichung*, a die linke, b die rechte *Seite* derselben genannt wird, haben wir schon S. 128 angeführt.

Da Vorstehendes eine Definition ist, so muss (wie schon auf S. 134 hervorgehoben wurde) die Festsetzung auch umgekehrt gelten: Es kann die Gleichung $a = b$ nichts anderes aussagen, als dass die vorerwähnten Subsumtionen gleichzeitig bestehen, m. a. W.:

(1)''. { *Wenn* $a = b$ *gilt, so muss* $a \Subset b$ *und* $b \Subset a$ *sein.*

Wollten wir die beiden Teile (1)' und (1)'' der Definition (1) ausdrücklich auf einmal aussprechen, so wäre in (1)' die Partikel „*so*" durch „*immer dann und nur dann*" zu ersetzen gewesen.

Zusatz zu Def. (1). Weil alsdann (nach I, für Aussagen in Anspruch genommen — vergl. die Anmerkung zu Prinzip I)

$$b \Subset a \quad \text{und zugleich} \quad a \Subset b$$

sein wird, so folgt nach Def. (1), dass auch:

$$b = a$$

zu gelten habe. Dies heisst:

Jede Gleichung darf auch rückwärts wiederum als solche *gelesen werden,* m. a. W.: *Die beiden Seiten einer Gleichung dürfen* (in derselben)

miteinander vertauscht werden, oder: *Die identische Gleichheit ist eine „symmetrische“ Beziehung* — ein Satz, der sich, wie wir soeben sahen, ganz streng beweisen lässt.

Stellen a und b Gebiete vor, so müssen sie, wenn das erste im zweiten und zugleich das zweite im ersten enthalten sein soll, einander decken, in eines zusammenfallen, koincidiren. Identisch gleiche Gebiete bezeichnen wir demnach als *„einerlei“*.

Man ersieht hieraus, dass — wie schon in der Einleitung betont — der Begriff der Gleichheit im identischen Kalkul weit enger gefasst ist, als in der Grössenlehre. Dort, wo von Maassbestimmungen absolut nicht die Rede sein soll, dürfen wir zwei Kreise oder Flächen, wenn sie etwa nur „gleich gross“ (inhaltsgleich, sogar, wenn sie auch kongruent) sein sollten, durchaus nicht als (identisch) „gleich“ gelten lassen.

Ungeachtet dieser verschiedenen Interpretation des Gleichheitszeichens in den beiden Disziplinen ist es doch unbedenklich, sich des nämlichen Zeichens $=$ für beiderlei Beziehungen zu bedienen selbst dann, wenn Anwendungen des identischen Kalkuls auf das Gebiet der mit Zahl und Maass operirenden Mathematik beabsichtigt sein sollten. Und zwar aus zwei Gründen.

Erstens deshalb, weil auch in der Mathematik nicht mit den Grössen selbst, sondern nur mit deren Maasszahlen, weil darin allgemein nur mit abstrakten Zahlen gerechnet zu werden pflegt. Jede abstrakte Zahl betrachtet man aber daselbst als ein nur *ein*mal existirendes Individuum, versinnlicht etwa durch einen bestimmten Punkt der Zahlenlinie resp. Zahlenebene, und bei dieser Auffassung kommt die Gleichheit zweier Zahlen auch auf ein Zusammenfallen derselben, auf deren Identität hinaus — wie schon S. 146 angedeutet.

Zweitens würden gedachte Anwendungen des identischen Kalkuls auf das Gebiet der rechnenden Analysis doch vor allem angezeigt erscheinen — und könnten in der That von grossem Nutzen werden — da, wo man mit *vieldeutigen Ausdrücken* zu thun bekommt, wo nämlich mit Zahlzeichen zu operiren ist, die nicht notwendig je eine einzige Zahl, sondern eventuell eine ganze Klasse oder Gattung von Zahlen vorstellen. Von zwei solchen Zahlgattungen würde nun eine, A, „untergeordnet oder gleich“ einer andern B zu nennen, es würde $A \rightleftharpoons B$ zu schreiben sein, wenn alle Werte, die A umfasst, unter den Werten von B zu finden sind, und „gleich“ würden die beiden vieldeutigen Ausdrücke A und B heissen müssen, wenn dies gegenseitig ist, d. h. wenn sie beide ganz die nämlichen Werte umfassen. Sobald aber diese identisch gleichen Ausdrücke A und B eindeutige Zahlzeichen würden, nämlich die unter A und B verstandenen Zahlengattungen etwa nur je aus *einem* Zahlindividuum bestehen sollten, die Klasse A in den einen Wert a, die B zu der Zahl b zusammenschrumpfte, dann würde die vorhin statuirte identische Gleichheit $A = B$ der Klassen doch in der That zusammenfallen mit der arithmetischen Gleichheit $a = b$ zwischen diesen ihren einzigen Zahlwerten.

So wenig sich auch, wie S. 136, 139 dargelegt, das Zeichen $<$ zur

Verwendung in der Logik empfahl, würde es nach dem soeben Auseinandergesetzten doch nur eine unnütze Weitläufigkeit sein, wenn wir für die identische Gleichheit ein anderes als das arithmetische Gleichheitszeichen einführen, ein apartes, komplizirteres Zeichen für dieselbe hier benutzen wollten.

Bedeuten a und b Klassen, und ist $a = b$, so werden a und b nur (verschiedene) Namen für einunddieselbe Klasse vorstellen. Beispielsweise werde angeführt:

Pferd = Ross, Neger = Mohr,
Erdtrabant = Mond (im engeren Sinne), = der Mond.

1) Theorem. *Stets ist* $a = a$.
Jedes Gebiet ist sich selbst identisch gleich.

Beweis. Die Voraussetzungen $a \Subset b$, $b \Subset a$, der Def. (1) für die Gleichheit $a = b$ treffen nach Prinzip I zu, wenn a selber unter b verstanden, für b gesetzt wird; folglich ist in diesem Falle die Definition auch anwendbar. Aus $a \Subset a$ und $a \Subset a$ folgt nach (1)': $a = a$.

2) Theorem. *Wenn* $a \Subset b$ *und* $b = c$, *so ist* $a \Subset c$.

Beweis. Dann ist auch $b \Subset c$ nach der zweiten Prämisse auf Grund des Teils (1)'' der Def. (1). Und hieraus, in Verbindung mit der ersten Prämisse folgt nach II, dass $a \Subset c$.

3) Theorem. *Wenn* $a = b$ *und* $b \Subset c$, *so ist auch* $a \Subset c$.

Beweis. Nach der ersten Prämisse und Def. (1) Teil (1)'', ist auch $a \Subset b$ und hieraus in Verbindung mit der zweiten Prämisse folgt nach II: $a \Subset c$, wie zu beweisen war.

Die beiden letzten Theoreme zusammenfassend können wir also sagen:

Zusatz. *Als Prädikat sowol, wie als Subjekt, darf Gleiches für Gleiches gesetzt werden.*

In der That geht die Konklusion bei Th. 2) hervor aus der ersten Prämisse, indem man deren Prädikat b durch das ihm gleiche c ersetzt, bei Th. 3) aus dessen zweiter Prämisse, indem man deren Subjekt b durch das ihm gleiche a ersetzt.

4) Theorem. *Wenn* $a = b$ *und* $b = c$, *so ist auch* $a = c$.

Oder: *Wenn zwei Gebiete mit einem dritten identisch gleich sind, so sind sie auch unter sich identisch.*

Es sind dann alle drei Gebiete „einander gleich" — vergl. die nachherige Zusatzdefinition.

Beweis. Nach Def. (1), Teil (1)'', ist mit den beiden Voraussetzungen des Satzes einerseits gegeben, dass $a \Subset b$ und $b \Subset c$ sei, und hieraus folgt $a \Subset c$ nach II. Ebenso ist andrerseits gegeben:

$c \leftarrow\!\!\!\!\in b$ und $b \leftarrow\!\!\!\!\in a$, also nach II auch $c \leftarrow\!\!\!\!\in a$. Die gefolgerten beiden Ergebnisse $a \leftarrow\!\!\!\!\in c$ und $c \leftarrow\!\!\!\!\in a$ lassen sich aber nach Def. (1) Teil (1)′ zusammenfassen zu der Gleichung $a = c$, womit der Satz bewiesen ist.

Die Theoreme 2), 3), 4) finden bereits unter Prinzip II sich durch Figuren erläutert, vergl. Fig. 3 ... 6.

Zusatz zu Th. 4). Die Ausdehnung des Satzes von zweien auf eine beliebige Menge als erfüllt vorauszusetzender Gleichungen, welche sich so anordnen lassen, dass sie eine stetige Kette bilden, d. h. dass die einander zugewendeten Seiten benachbarter Gleichungen jeweils übereinstimmen, ist naheliegend, und kann durch wiederholte Anwendung des Th. 4) unschwer bewiesen werden.

Wenn $a = b$, $b = c$ und $c = d$ ist, so folgt aus den zwei ersten Gleichungen nach 4) zunächst $a = c$ und hieraus, in Verbindung mit der dritten Gleichung folgt ebenso: $a = d$. Daneben folgt auch aus den beiden letzten Gleichungen $b = d$, sodass hier jede zwei vorkommende Symbole als gleich nachweisbar sind.

Zusatzdefinition zu (1). Nunmehr kann auch der Begriff der identischen Gleichheit von zweien auf eine beliebige Menge von Gebieten ausgedehnt werden. Die Gebiete der Menge sind *„einander gleich“* zu nennen, wenn (d. h. immer dann und nur dann, wenn) je zwei derselben einander gleich sind.

Dass solches stattfinde, wird ausgedrückt, indem man die Namen der Gebiete in irgend einer Folge auf der Zeile durch Gleichheitszeichen verbindet, z. B. schreibt:

$$a = b = c = \cdots$$

Tritt zu einer Menge von unter sich gleichen Symbolen ein weiteres Symbol hinzu, welches einem von jenen gleich ist, so bilden die bisherigen Symbole zusammen eine neue Menge von unter sich gleichen Symbolen.

Denn ist $a_1 = a_2 = \cdots = a_\varkappa = \cdots = a_n$ die erstgedachte Menge und trits $a_{n+1} = a_\varkappa$ hinzu, so ist für $\lambda = 1, 2, \ldots n$ auch leicht zu beweisen, dass das neuhinzugekommene $a_{n+1} = a_\lambda$ sein muss, in Anbetracht dass $a_\varkappa = a_\lambda$ schon laut Voraussetzung gilt. Ein beliebig aus der neuen Menge herausgehobenes Paar von Symbolen enthält entweder das neu hinzugekommene Symbol a_{n+1} oder nicht. Im ersten Falle enthält es neben jenem Symbole noch ein solches a_λ der alten Menge, und ist die Gleichheit beider Symbole des Paars soeben bewiesen. Im zweiten Falle muss das Paar aus zwei Symbolen a_λ und a_μ der alten Menge bestehen und ist deren Gleichheit bereits in der Voraussetzung gefordert, dass sämtliche Symbole dieser letztern einander gleich seien.

In beiden Fällen sind also die zwei Symbole des aus der neuen Menge herausgehobenen Paares in der That einander gleich.

Was in logischer Beziehung davon zu halten sei, dass bei vorstehender Beweisführung im Grunde der Schluss der „vollständigen Induktion", „Schluss von n auf $n+1$" angewendet werden musste, darüber sei auf Anhang 3 und auf § 51 verwiesen.

Ist nun irgend ein System von Gleichungen als zwischen Gebieten bestehend gegeben, so werden diese Gebiete unter sich gleich sein müssen, wenn es gelingt, die gegebenen Gleichungen so in einer Reihe anzuordnen, dass beim Durchgehen derselben in einem bestimmten Sinne — etwa von links nach rechts fortschreitend — man in jeder neu ins Auge gefassten Gleichung auf ein Gebiet stösst, welches bereits in wenigstens einer der vorhergehenden Gleichungen als linke oder rechte Seite vorgekommen war. Um dies zu entscheiden, kann man eine beliebige von den Gleichungen als erste herausschreiben, darauf als zweite eine solche folgen lassen, welche eines der in der ersten stehenden Gebiete enthält, als dritte dann aus dem Reste eine solche Gleichung herauslesen, welche abermals die Forderung erfüllt mindestens eines der bisher schon vorgekommenen Gebiete zu enthalten, und so weiter bis zu Ende. Ist es auf *eine* Art möglich, in dieser Weise mit den Gleichungen zu Ende zu kommen, so würde sich nachweisen lassen, dass dies auf jede Art eintreffen muss, mit welcher Gleichung des Systems man auch beginnen und wie man auch mit der Auslese der immer mindestens ein früheres Symbol enthaltenden Gleichungen fortfahren mag. —

Es sollen jetzt noch *zwei spezielle Gebiete* in die Algebra der Logik eingeführt werden, für welche als Namen, wie unter Th. 22) dargelegt wird, die Zahlzeichen 0 und 1 sich empfehlen. Auch diese wollen wir vermittelst des Beziehungszeichens der Einordnung erklären, und zwar erfolge die

Definition ($2_\times$) *der „identischen Null"*	Definition (2_+) *der „identischen Eins"*

dadurch, dass wir die Subsumtion

$0 \subseteq a$	$a \subseteq 1$

als eine *allgemeingültige*, nämlich für *jedes* Gebiet a unsrer Mannigfaltigkeit anzuerkennende hinstellen. Dies will sagen:

0 *nennen wir ein Gebiet*, welches zu jedem Gebiete a in der Beziehung der Einordnung steht, *welches in jedem Gebiete der Mannigfaltigkeit enthalten ist.*	1 *nennen wir ein Gebiet*, zu welchem jedes Gebiet a in der Beziehung der Einordnung steht, *in welchem jedes Gebiet der Mannigfaltigkeit enthalten ist.*

Die Symbole 0 und 1, denen wir diese Eigenschaft zuschreiben,

zählen wir jedenfalls hinfort mit zu den „Gebieten" unsrer Mannigfaltigkeit. Eventuell, möglicherweise, werden es „uneigentliche" Gebiete sein, d. h. sie bleiben leere Namen, wenn unter den bisher als solche angesehenen wirklichen oder „eigentlichen" Gebieten, die mit der Mannigfaltigkeit zugleich uns virtuell, fakultativ gegeben erscheinen, sie sich nicht nachweisen lassen sollten — eine Frage, auf die wir im System uns erst an einer späteren Stelle einlassen wollen.

Auch die Beweggründe, welche uns zur Einführung ebendieser Symbole bestimmen, das Willkürliche, welches in ihrer Definition zu liegen scheint, erklärend rechtfertigen, können wir erst unter Def. (3) in § 5 auseinandersetzen.

Lediglich aus didaktischen Gründen — damit der Leser, falls er nicht will, niemals den Leitfaden der Anschauung zu verlassen braucht — sei indess die Bedeutung welche den Symbolen 0 und 1 zukommen wird, vorgreifend schon hier kurz angegeben: Die 0 wird uns ein *leeres* Gebiet vorstellen, welches *keinen* Punkt der Mannigfaltigkeit enthält, und wenn von Klassen die Rede ist, dem Begriffe des „Nichts" entspricht. Die 1 dagegen wird die ganze Mannigfaltigkeit vorstellen, hier, im bevorzugten Falle, also die ganze Fläche der Schultafel. Und falls a, b, c, . . . uns Klassen vorstellen, wird 1 die umfassendste Klasse bedeuten, welche alle die Klassen und Individuen, von denen in der Untersuchung die Rede ist, in sich vereinigt. Vergleiche § 7.

Es wird sich zeigen, dass die hier vollzogene Aufnahme, Einverleibung, Adjungirung der identischen *Null* unter die Gebiete (der leeren Klasse unter die Klassen, des Begriffs des „Nichts" unter die Begriffe) unsrer ganzen Disziplin ihren eigenartigen Charakter aufprägt. Die Tragweite dieser unscheinbaren Übereinkunft ($2_\times$) ist kaum mit Geringerem zu vergleichen, als mit den Wirkungen der Einführung der *arithmetischen* Null, der Aufnahme dieser unter die Ziffern und Zahlen. Letztere war eine That, in Bezug auf die mich Herrn Hermann Schubert's interessante Studie „Zählen und Zahl" (Hamburg 1887, 36 Seiten) belehrt (pag. 34), dass sie ungeachtet ihres heute allgemein anerkannten Wertes seinerzeit hartnäckige und heftige Opposition hervorgerufen.

Zusatz 1 zu Def. (2). Es kann nicht mehr als *ein* Gebiet von der in Def. ($2_\times$) resp. (2_+) geforderten Eigenschaft geben.

Denn gäbe es ausser 0 resp. 1 auch noch ein zweites Gebiet $0'$ resp. $1'$ von jener gedachten Eigenschaft, dass nämlich

$$0' \neq\!\!\!\in a \quad | \quad a \neq\!\!\!\in 1'$$

allgemein sein müsste, so hätten wir auch

$$0 \neq\!\!\!\in 0' \text{ nebst } 0' \neq\!\!\!\in 0 \quad | \quad 1' \neq\!\!\!\in 1 \text{ nebst } 1 \neq\!\!\!\in 1'$$

[indem wir uns *hier* unter dem a auch 0 resp. 1, *dort*, in Def. (2), auch $0'$ resp. $1'$ vorstellen dürfen], und damit folgte nach Def. (1):

$$0' = 0 \qquad\qquad | \qquad\qquad 1' = 1,$$

d. h. die gedachten beiden Gebiete wären bezüglich einerlei, wären eines.

Zusatz 2 zu Def. (2). Insbesondre gilt auch

$$0 ⋹ 1.$$

In dieser Subsumtion fallen die beiden Subsumtionen $(2_\times)$ und (2_+) in eine einzige zusammen, welche als ein unter beiden zugleich begriffenes Beispiel erscheint. In der That kann man sich unter a

in $(2_\times)$ auch 1 | in (2_+) auch 0

denken. Zum Überfluss aber folgt obige Subsumtion aus $(2_\times)$ und (2_+) zusammen auch noch nach Prinzip II, wofern man sich in beiden unter a *den nämlichen Wert* vorstellt.

5) Theorem.

$5_\times$) *Wenn* $a ⋹ 0$ *so ist* $a = 0$.

5_+) *Wenn* $1 ⋹ a$ *so ist* $1 = a$.

m. a. W.

Einordnung eines Gebietes *unter* 0 *ist Gleichheit* (mit 0), bedingt „Verschwinden" des betreffenden Gebietes.

Die fakultative Überordnung eines Gebietes *über* 1 *ist Gleichheit* (desselben mit 1).

Beweis. Da nach Def. $(2_\times)$ ohnehin $0 ⋹ a$ ist, so folgt hiemit aus der Voraussetzung $a ⋹ 0$ unsres Theorems kraft Def. (1)' die Gleichheit: $0 = a$.

Beweis. Da nach Def. (2_+) ohnehin $a ⋹ 1$ ist, so gibt dies in Verbindung mit der vorausgesetzten Subsumtion $1 ⋹ a$ nach Def. (1)' die Konklusion: $a = 1$.

Unerledigt ist noch die Frage, auf welche Weise nun solche Subsumtionen, wie die mit Def. (2) eingeführten, in denen als Subjekt oder Prädikat die Symbole 0 oder 1 auftreten, mit Hülfe der Kopula „ist" in der Wortsprache darzustellen sein werden? Um die uns zunächst obliegenden Betrachtungen nicht zu überladen, wollen wir dergleichen Fragen vorerst noch zurückstellen, unser Augenmerk eine Zeitlang blos dem Gebietekalkul als solchem zuwenden — und dessen Anwendungen auf die Wortsprache hernach im Zusammenhange (in der vierten Vorlesung) durchgehen. Was da die Def. (2) im Gefolge hat, ist unter ϱ), σ), τ), υ) des § 9 entwickelt. —

Dritte Vorlesung.

§ 5. Die identische Multiplikation und Addition. Peirce's analytische Definition von Produkt und Summe.

Wir müssen uns nunmehr mit *Operationen* bekannt machen, durch welche aus (zunächst) zwei Gebieten a, b jeweils ein drittes Gebiet abgeleitet werden kann, aus zwei Klassen eine dritte (später dann auch aus mehreren solchen eine neue). Zwei wichtigste von solchen Operationen bezeichnen wir als *identische Multiplikation* und als *identische Addition,* und entlehnen — der Einfachheit wegen — Namen und Bezeichnungsweise für die Operationsergebnisse und die dazu verknüpften Operationsglieder aus der Arithmetik von den gleichnamigen arithmetischen Operationen.

Erfahrungsmässig hat dies Verfahren einen gewissen Widerstand zu gewärtigen; dasselbe wird nicht von jedermann ohne weiteres gebilligt und acceptirt. Es werden deshalb einige Worte zu seiner Rechtfertigung am Platze sein, sowie Fingerzeige, wie dasselbe da wo es ungeeignet erscheinen sollte, zu modifiziren sei.

Mit dem Malzeichen, z. B., und dem Namen „Produkt" die Vorstellung einer *arithmetischen* Multiplikation zu verknüpfen, ist durch jahrhundertelangen Gebrauch sanktionirt, und von dieser langgewohnten und berechtigten Gedankenverbindung zwischen Namen und dem durch sie Benannten sich hier stets frei zu halten wird in der That dem Leser zugemutet erscheinen, wenn wir wirklich jene Namen und Zeichen aus der Arithmetik in unsre Disziplin herübernehmen. Bedeuteten die zu einem Produkt $a \cdot b$ oder ab zu vereinigenden Symbole a und b hier Zahlen oder auch Klassen, Gattungen von Zahlen, so wäre die Zumutung allenfalls eine harte zu nennen.

Solches ist nun aber *nicht* der Fall. Freilich, da uns a und b Klassen von *irgendwelchen Dingen* oder Objekten des Denkens vorzustellen haben werden, so ist ihre Interpretation als *Klassen von Zahlen* nicht gerade prinzipiell ausgeschlossen. Doch bildet letztere gegenüber den sonst hier im allgemeinen beabsichtigten Deutungsweisen ein Anwendungsfeld von sehr speziellem Charakter und verhältnissmässig untergeordneter Wichtigkeit. Für dieses, wenn es überhaupt in Betracht gezogen werden sollte, kann man sich leicht gewisse Kautelen, eine besondere Behutsamkeit in der Verwendung der Namen und Zeichen, als logischer (identischer) oder aber

arithmetischer, zur Pflicht machen, auf das wir nachher noch näher zu sprechen kommen.

Lassen wir die etwa möglichen Anwendungen des identischen Kalkuls auf *arithmetische* Untersuchungen vorerst beiseite, so wird aber der obige Vorwurf einer ungebührlichen Zumutung von selbst hinfällig, indem es ganz *unmöglich* wird, dem Malzeichen die gewohnheitmässige Bedeutung unterzulegen. Man versuche doch einmal, wenn a die Klasse derjenigen Dinge vorstellt, welchen das Epitheton „schwarz" zukommt, und b die Klasse der „Pferde", das Produkt $a \cdot b$ im arithmetischen Sinn zu verstehen! Abzustehen aber von einem ohnehin unmöglichen Vorhaben — dies lässt sich doch nicht als eine ungebührliche Zumutung hinstellen!

Bei dem Versuch, ihn im herkömmlichen, arithmetischen Sinn zu deuten, gibt sich in unserm Beispiel der Name $a \cdot b$ als ein ganz und gar sinnloser sofort zu erkennen. Daher ist dieser Name als ein solcher, der überhaupt eine vernünftige Erklärung noch nicht gefunden hat, zunächst zu jeder beliebigen Verwendung disponibel. Welche Bedeutung wir ihm hinfort auch beilegen mögen — was wie gesagt in unserm Belieben, Arbitrium steht — so kann dies zu Missverständnissen überhaupt nicht führen, ist unbedenklich und unverfänglich.

Das gleiche gilt, wenn a und b Punktgebiete, Flächen, — und zwar diese selbst, nicht aber deren Maasszahlen oder Inhalte, vorstellen (vergl. S. 158). Es ist noch unausgemacht und kann deshalb beliebig ausgemacht werden, was in diesem Falle $a \cdot b$ bedeuten solle.

Dass eine herkömmliche Verwendung von Namen und Zeichen auf einem bestimmten Anwendungsfelde durchaus nicht deren selbständige Verwendung auf andern, neuen Anwendungsgebieten präkludirt oder von vornherein ausschliesst, dafür gibt es Präcedenzfälle genug in den Wissenschaften.

Es ist dem Chemiker auch nicht verboten worden, mit CO das Kohlenoxydgas zu bezeichnen, weil etwa durch den schon zwei Jahrtausende älteren Usus des Geometers es sanktionirt war, unter CO die Verbindungsstrecke zweier Punkte C und O zu verstehen. Um beide Deutungen zu verwechseln, müsste man im Unklaren darüber sein, ob es sich um Punkte handelt, oder um chemische Elemente, und füglich ist dem Leser eines Buches doch wenigstens zuzutrauen, dass er wisse und sich im Bewusstsein lebendig erhalte, wovon in dem Buch die Rede ist!

Was nun dem Einen Recht ist, das ist dem Andern billig. Um arithmetisches und identisches Produkt zu verwechseln, müsste man auch nicht wissen, ob die Rede ist von Zahlen, oder ob von Klassen, Gebieten.

Jedenfalls kann es nicht untersagt werden, *unter einer besondern Überschrift* eine aparte — sei es Bezeichnung bekannter Dinge, sei es Interpretation bekannter Zeichen — zu verwenden, und zwar immer demjenigen Verfahren den Vorzug zu geben, welches sich dem zu betrachtenden Gegenstande am besten anbequemt.

Einfacher aber, übersichtlicher, kürzer und zweckmässiger, als mit ab, lässt das Ergebniss der Operation, die wir identische Multiplikation der Klassen a und b zu nennen haben, sich überhaupt nicht darstellen — im Hinblick auf die Anforderung, dass der Name dieses identischen Produktes,

um hinreichend ausdrucksvoll und durch sich selbst verständlich zu sein, die Symbole a und b, denen es entstammt, doch selber enthalten, sie irgendwie miteinander verknüpfen muss. Die simpelste Verknüpfung von Zeichen ist eben das Nebeneinanderstellen derselben auf der Zeile, und der Vorteile, die aus solcher Einfachheit erwachsen, sind wir nicht gesonnen, uns unnötigerweise hier zu entschlagen. Zudem stellt auch die Wortsprache selbst (wie in § 8 zu sehen) die Namen der als identische Faktoren zu einem Produkt zu verknüpfenden Klassen in der Regel ohne weiteres Verknüpfungszeichen oder Bindewort nebeneinander.

Ähnliches aber, wie oben in Bezug auf das Produkt ausgeführt ist, liesse sich grösstenteils auch hinsichtlich der Summe sagen.

Nur dann, wenn Anwendungen des identischen Kalkuls auf die Arithmetik selbst beabsichtigt sein sollten — dergleichen uns hier meistens ganz ferne liegen — wird es ratsam die *„arithmetischen"* und die *„identischen"* Operationen, Operationsglieder und Operationsergebnisse jeweils im Texte durch die kursiv gedruckten Beiwörter sorgfältigst zu unterscheiden, eventuell auch mittelst *verschiedener* Knüpfungszeichen die einen und die andern zu kennzeichnen. Ganz unerlässlich würde letzteres erscheinen, wenn etwa im selben Ausdruck oder in der nämlichen Formel die beiderlei Operationen gleichzeitig vorkommen sollten.

Hier aber ist es leicht, gedachte Unterscheidung der arithmetischen und der gleichnamigen identischen Knüpfungszeichen irgendwie, in einer ad hoc konventionell festzustellenden Weise, zu bewirken. Man klammere etwa die Zeichen der seltener vorkommenden Sorte von Operationen ein: $(\cdot)$, $(+)$, oder drucke sie hohl, fett, kursiv und dergleichen.

Bei der Multiplikation ist man in der günstigen Lage, ohnehin über zwei Knüpfungszeichen zu verfügen. Man reservire z. B. den Punkt, $\cdot$, für die identische, das liegende Kreuz, $\times$, für die arithmetische Multiplikation und beobachte die Rücksicht, dass alsdann nur das eine von diesen beiden Zeichen auch ungeschrieben bleiben, bequemlichkeitshalber unterdrückt werden darf, nicht aber auch das andere — indessen, je nachdem es zweckmässig erscheinen mag, durchweg das erste oder durchweg das zweite.

Für identische Addition wird man praktisch auch ein stehendes Kreuz † gegenüber dem arithmetischen $+$ in solchen Fällen verwenden, wie uns denn hier — dank der Liberalität des Verlegers — kleinere $+$-Zeichen + und + zu gebote stehn.

Überdies ist zu beachten, dass wo immer Anwendungen der geschilderten Art beabsichtigt sein sollten, auch die „identische" Null und Eins — etwa durch kursiven Druck als *0, 1* oder aber mittelst Apostrophirung etc. — von den Zahlindividuen 0, 1 unterschieden werden müssen — vergl. § 9, ω). —

In einem seiner Aufsätze [1a] verwendet Herr Peirce durchweg einmal als *Malzeichen* das *Komma*, für identische Gleichheit ein Gleichheitszeichen mit darunter gesetztem Komma, und für identische Addition ein $+$ mit in den Winkelraum rechts unten eingefügtem Komma $+\!,$. Das ganze Bezeichnungssystem erscheint schon ein bischen schwerfällig, das erstere aber auch höchst bedenklich, weil man in Text wie in Formeln [z. B. bei

$f(a, b, c, ..)$] dann nie unterscheiden kann, ob $a, b, c, ..$ eine Gruppe, ein System von *mehreren* Symbolen, oder aber *ein einziges* Symbol — das Produkt der letztern — vorstelle. Von diesem System der Schreibung kommt Peirce auch selbst wieder in seinen späteren Aufsätzen — und wie es scheint, definitiv — zurück. Im schriftlichen Arbeiten mag aber das Zeichen $\dotplus$, sich zuweilen empfehlen.

Neue Zeichen und Namen zu erfinden ist ja in der That nicht schwer, und was die Namen betrifft, so hat gerade die Philosophie hierin die Welt schon mit grossartigen Leistungen beglückt.

Wollten wir vor der bei der Arithmetik zu machenden Namenanleihe zurückschrecken, so würden auch wir genötigt sein, ein ganzes Heer von neuen Namen zu erfinden. Es würde bei weitem nicht genügen, neben eigenen Zeichen zur Vertretung unsrer (von Boole schon eingeführten) 0 und 1, etwa blos für „Multiplikation, Faktor, Produkt" und „Addition, Summand, Summe" neue Namen zu schaffen. Als solche wurden — nebenbei gesagt — bereits „Composition, Componenten, Compositum („compound")" und „Aggregation, Aggreganten, Aggregat"*) von Augustus de Morgan[2,3] verwendet. — Es würde überdies die Folge sein, dass wir das Summenzeichen Σ, das Produktenzeichen Π durch andere Zeichen ersetzen müssten, dass wir zeitweilig neue Namen einzuführen hätten auch eventuell für „Potenz", für „Division, Quotient, Dividend und Divisor", für „Subtraktion, Differenz, Minuend und Subtrahend", für „Abziehen" und „Vermindern", für „mal, plus, durch und minus", und ausserdem noch für eine Menge anderer Kunstausdrücke. Ich erinnere an: „Monom, Binom, Trinom, Polynom", an „Koeffizient", an „Ausmultipliziren" (nach der Multiplikationsregel für Polynome) und „Ausscheiden" (eines gemeinsamen Faktors), an die Benennungen „Funktion" und „Argument", an „linear" und „homogen" (in ihrer Anwendung auf den Funktionsbegriff), u. s. w.

Ein Blick auf den weiterhin dichter werdenden Formelinhalt dieses Buches wird schon erkennen lassen, wie viel umständlicher und schwerfälliger derselbe sich darstellen müsste, wollten wir nur überall da, wo ein Malzeichen *steht oder gesetzt zu denken, zu unterstellen ist,* ein ausdrückliches Knüpfungszeichen anbringen!

Erstrebenswerter als solche Neuerungen scheint es doch zu sein, mit einer schon vorhandenen Nomenklatur, die sich auch unsern eigenartigen Zwecken vorzüglich anpasst, haushälterisch auszukommen. Weigerten wir uns dessen, so würde aber die schlimmste Wirkung die sein, dass wir genötigt wären, eine Menge aus der Arithmetik der vier Spezies allbekannter Sätze in dem fremdartigen Gewand, das sie alsdann notwendig zeigen müssten, vollständig neu zu lernen. Bei dem Plan, den wir hier lieber befolgen, haben wir dagegen den Vorteil, nicht nur, dass die zahlreichen Analogieen und die minder zahlreichen Gegensätze zwischen dem identischen und dem arithmetischen Kalkul auf das klarste zutage treten, sondern dass wir auch einen ansehnlichen Teil unsrer Übung aus der allgemeinen Arithmetik (freilich nur von der Tertia eines Gymnasiums her) hier ohne weiteres

*) Indess der letztere Name ist ja auch in der Arithmetik bereits vergeben!

zu verwerten in der Lage sind und diesen Vorteil blos erkaufen müssen durch rege Aufmerksamkeit auf die Punkte, wo jene Analogieen aufhören.

Eine gewisse Leichtigkeit, nicht blos Bezeichnungsweisen zu wechseln, sondern mehr noch, solche *umzudeuten*, sie vom Einen auf's Andere zu übertragen, ist auch anderwärts förderlich oder unentbehrlich gewesen, und nirgends in der Mathematik darf man an der Bezeichnung kleben. Es genügt zu erinnern, an die Streckenrechnung, z. B., überhaupt an die zahlreichen „symbolischen“ Rechnungsmethoden, welche Analysis und Geometrie bereits aufweisen. —

Die identische Addition hat mit der arithmetischen, ihrem Wesen nach, noch einige *Verwandtschaft*, die identische Multiplikation aber mit der arithmetischen gar keine [vergl. § 9, ω)].

Gleichwol rechtfertigt sich die übereinstimmende Bezeichnung von beiderlei Operationen durch die *durchgängige Übereinstimmung ihrer formalen Eigenschaften:* alle Gesetze, welche von der Addition und Multiplikation in der allgemeinen Arithmetik als allgemeine Formeln gelten (also ohne Rücksicht auf die Natur der zu verknüpfenden Zahlen, *im ganzen Zahlengebiete*) — sei es in Bezug auf jene Operationen für sich, sei es auch für ihre Verbindungen miteinander — alle diese Gesetze werden sich auch für die identischen Operationen als allgemein gültig erweisen, und — *dazu noch einige mehr!*

Nur wo die „umgekehrten“ oder *inversen* Operationen von jenen beiden, also die Subtraktion und Division mit in Betracht kommen, *hört* die formale Übereinstimmung zwischen den arithmetischen und den identischen „vier Spezies“ zumeist *auf.*

Wir werden uns mit der identischen Subtraktion und Division erst spät — in der 12. Vorlesung — beschäftigen, und zwar, um sie dort für immer abzuthun, nämlich zu erkennen, dass diese Operationen im identischen Kalkul definitiv entbehrt werden können, indem sie ausreichend und am zweckmässigsten zu vertreten sind durch eine einfachere dritte Operation, die *Negation*, welche als ein gemeinsamer Spezialfall jener beiden erscheint.

Auch im identischen Kalkul mögen wir Addition und Multiplikation zu zwei verschiedenen (Operations-)*Stufen* rechnen. Während aber in der Arithmetik die Addition als die ursprünglichere oder *erste* Stufe vorangeschickt werden muss, um das Verständniss der Multiplikation als der *zweiten* Stufe vorzubereiten und zu erschliessen, steht im identischen Kalkul die Reihenfolge der beiden Operationen in unserm Belieben. Beide sind hier unabhängig von einander einzuführen; sie sind gewissermassen ebenbürtig oder von gleichem Range. Schon um dies zum Bewusstsein zu bringen, werde ich der Multiplikation hier

den Vortritt geben. Ausserdem aber bestimmt mich hiezu die Rücksicht, dass auf einem der Hauptanwendungsgebiete des identischen Kalkuls — auf dem Anwendungsfelde δ) des § 3, im sog. „Aussagenkalkul“ — die Multiplikation in der That als die bei weitem wichtigere und häufigere, wo nicht ursprünglichere Operation erscheinen wird. Demungeachtet mögen aber nach wie vor die Addition und Subtraktion ihre Bezeichnung als Operationen der ersten Stufe beibehalten.

Wir werden das *identische Produkt* $a \cdot b$ oder ab, desgleichen die *identische Summe* $a + b$ zweier Gebiete a und b hier je gesondert definiren in ihrer Anwendung als Subjekt (terminus minor) und in ihrer Anwendung als Prädikat (terminus major) von Subsumtionen.

Man wird jedoch sehen, dass diese beiden Definitionen eines und desselben Symbols ab resp. $a + b$ keineswegs von einander unabhängig sind, sondern derart in einander übergreifen, dass durch die eine notwendig auch schon die andre gegeben erscheint. Eine bestimmte von ihnen muss als die des einfacheren Ausdrucks fähige an die Spitze gestellt werden. Und zwar die

Definition $(3_\times)$.	Definition (3_+).

Wenn es für gegebene Gebiete a, b und c zutrifft, dass zugleich

$c \mathrel{=\!\!\!\in} a$ *und* $c \mathrel{=\!\!\!\in} b$	$a \mathrel{=\!\!\!\in} c$ *und* $b \mathrel{=\!\!\!\in} c$

ist, so soll — kürzer — gesagt werden, es sei:

$c \mathrel{=\!\!\!\in} ab.$	$a + b \mathrel{=\!\!\!\in} c.$

Mit dieser Festsetzung haben wir definirt:

das identische *Produkt als Prädikat.*	die identische *Summe als Subjekt.*

Hiedurch werden nämlich — zunächst lediglich als Bestandteile oder Elemente einer gewissen Redensart*), als Prädikat resp. Subjekt — die Symbole

ab	$a + b$

eingeführt, welche wir auch „Gebiete“ nennen werden. Auf unserm gegenwärtigen Standpunkt müssen wir noch darauf gefasst sein, dass diese — je nach den Bedeutungen von a und b — sich als eigentliche Gebiete vielleicht nicht nachweisen lassen, sondern eben als „uneigentliche“ unsrer Mannigfaltigkeit zuzuschlagen, zu adjungiren sind.

*) id est: der Redensart: „ein Gebiet c ist in ab enthalten“, resp. „$a + b$ ist in einem Gebiet c enthalten“.

Da obiges Definitionen sein sollen, so gelten die Festsetzungen auch *umgekehrt*, und *sagen die Subsumtionen*

$c \Subset ab$ | $a + b \Subset c$

hinfort nichts anderes aus, als dass

$c \Subset a$ *und zugleich* $c \Subset b$ | $a \Subset c$ *sowie* $b \Subset c$

sei.

Um uns unzweideutig darauf zurückbeziehen zu können, wollen wir die beiden in jeder dieser Begriffserklärungen liegenden fundamentalen Festsetzungen nochmals (mit äusserster Sparsamkeit an Texteswerten) übersichtlich rekapituliren, indem wir sie mit unterscheidenden Chiffren versehen, welche sich im bisherigen Texte nicht wol anbringen liessen. Unsre Konventionen sind:

$(3_\times)' \begin{cases} \textit{Wenn } c \Subset a, \; c \Subset b, \\ \textit{so gilt } c \Subset ab. \end{cases}$ | $(3_+)' \begin{cases} \textit{Wenn } a \Subset c, \; b \Subset c, \\ \textit{so gilt } a + b \Subset c. \end{cases}$

$(3_\times)'' \begin{cases} \textit{Wenn } c \Subset ab, \\ \textit{so gilt } c \Subset a, \; c \Subset b. \end{cases}$ | $(3_+)'' \begin{cases} \textit{Wenn } a + b \Subset c, \\ \textit{so gilt } a \Subset c, \; b \Subset c. \end{cases}$

Die einzeln stehende Subsumtion soll jeweils das nämliche ausdrücken, besagen, wie die zwei nebeneinander stehenden Subsumtionen zusammengenommen. Dies ist es, was ausgemacht wurde.

Zusatz 1) zur Definition (3).

Es gibt mindestens *ein* Gebiet c, welches den Voraussetzungen der Def. (3) genügt, indem nach Def. $(2_\times)$ resp. (2_+) jedenfalls

0 | 1

ein solches c ist. Wie immer die Gebiete a und b auch gegeben sein mögen, so ist es also jedenfalls zulässig, von

einem Produkte ab | einer Summe $a + b$

zu reden, nämlich von ihnen zu sagen, es sei $0 \Subset ab$, und $a + b \Subset 1$.

Hier tritt zum ersten mal ein *Beweggrund* zutage, der für die Einführung der Symbole 0 und 1 spricht, wie sie mittelst Def. (2) vollzogen worden. Die Zuziehung dieser Symbole zu der Mannigfaltigkeit der Gebiete hat nämlich, wie soeben erkannt, den Erfolg und rechtfertigt sich eben hiedurch, dass nun von $a \cdot b$ und $a + b$ stets gesprochen werden kann. In Bezug auf das Produkt ab wird dies durch die Einführung der 0 in der That *erst* hingebracht, wie wir in § 7 noch genauer sehen werden: hätten wir nicht die 0, so wäre es nicht der Fall; es ist die Mission und das Verdienst der Null, dass sie dies bewirkt. Nur durch ihre Zuhülfenahme lässt es sich erreichen,

dass hinfort identische Multiplikation und Addition für ganz beliebige Faktoren resp. Summanden a, b auch *ausführbar* werden.

Ohne diesen Umstand würde aber eine *allgemeine Buchstabenrechnung* nach einheitlichen Regeln nicht möglich sein.

Hätte z. B. das identische Produkt $a \cdot b$ sehr häufig keinen Sinn, so könnte man keinen irgend Produkte enthaltenden Buchstabenausdruck, unbekümmert um die Bedeutung oder die Werte der in ihm vorkommenden Operationsglieder nach den Regeln des Kalkuls umformen. Man müsste vielmehr jedesmal erst zusehen, ob die etwaigen Teilausdrücke (Ausdruckteile), sowie ob der ganze Ausdruck überhaupt einen Sinn hat, und wäre genötigt, die Bedingungen dafür jederzeit im Auge zu behalten, sie immerfort als „Gültigkeitsbedingungen" weiterzuschleppen.

Ein eklatantes, und — wie ich denke — hinreichend abschreckendes Beispiel einer derartigen unerquicklichen Sachlage wird uns weiter unten der Kalkul der inversen Operationen, werden uns die Gesetze der identischen Subtraktion und Division in § 23 liefern, deren Befolgung aber, wie schon erwähnt, zum Glück entbehrlich bleibt.

Wenn nun also durch eine so einfache Übereinkunft, als welche die Def. (2) erscheint, wenn namentlich durch die Einführung der identischen Null mittelst Def. ($2_\times$), ein derartiger Erfolg sich erzielen lässt, dass durch sie erst ein einheitliches Schliessen und Rechnen nach unumschränkt allgemein gültigen Regeln ermöglicht wird — so ist dieser Umstand ein hinreichendes Motiv dafür, diese Einführung zu vollziehen, so rechtfertigt dieser Erfolg wenigstens nachträglich die seiner Zeit bei Aufstellung der Def. (2) anscheinend bethätigte Willkür.

Damit der Leser auch bei den im nächsten Paragraphen folgenden teilweise subtileren Betrachtungen die Veranschaulichung durch die beigegebenen Figuren alsbald verstehen könne, sei wiederum vorgreifend gleich hier bemerkt, dass ab das den Gebieten a und b *gemeinsame* Gebiet vorstellen wird, dass aber, wenn ein solches nicht vorhanden, dem Produkt ab der Wert 0 zuzuschreiben ist; desgl. wird $a + b$ dasjenige Gebiet bedeuten, in welches a und b *zusammenfliessen* — so wie es, weiter unten § 7, für Kreisflächen a und b die Figuren $9_\times$ und 9_+ schraffirt aufweisen. Es *braucht* hienach der Leitfaden der Anschauung nirgends verlassen zu werden.

Wir bringen aber *im Systeme* die Veranschaulichungen absichtlich erst später, um eben die Anschauung nicht sofort zur Führerin bei den grundlegenden Betrachtungen werden zu lassen, vielmehr derselben die Herrschaft vorzuenthalten und den rein analytischen Charakter, die formelle Strenge der auszuführenden Schlüsse in den Vordergrund der Aufmerksamkeit des Lesers zu rücken, um diesen die ihnen gebührende Beachtung zu sichern.

Die ganz wenigen und unbedeutenden Wiederholungen, zu denen uns die befolgte Taktik nötigt, mögen entschuldigt sein mit dem Hinweis, dass man eben beim Gehen zuweilen auch den Blick vorauseilen lassen muss nach Punkten hin, zu welchen selbst man erst etwas später gelangt.

6) Theorem. *Die beiden Subsumtionen*

$6_\times)\ ab \mathrel{=\!\!\!\in} a,\quad ab \mathrel{=\!\!\!\in} b$ | $6_+)\ a \mathrel{=\!\!\!\in} a+b,\quad b \mathrel{=\!\!\!\in} a+b$

gelten für alle denkbaren Werte von a und b, sie *gelten als allgemeine Formeln.*

Beweis. Nach Prinzip I müssen wir zugeben, dass

$\alpha)$ $\quad \mathrm{I}_\times.\quad ab \mathrel{=\!\!\!\in} ab.$ | $\mathrm{I}_+.\quad a+b \mathrel{=\!\!\!\in} a+b.$

Dies ist zunächst zweifellos, wenn a und b wirkliche Gebiete vorstellen, weil wir ja für alle denkbaren Gebiete den Satz I als Grundsatz angenommen haben.

Führen wir zuvörderst unter dieser Annahme unsern Beweis zu Ende.

Wenn man nun in vorstehender Subsumtion $\alpha)$

das ab linkerhand | *das $a+b$ rechterhand*

mit dem c in $(3_\times)''$ resp. $(3_+)''$ identifizirt, d. h. sich ebendieses Gebiet unter dem dortigen c vorstellt, so erkennt man, dass die Subsumtion $\alpha)$ nach $(3)''$ nichts anderes aussagt, als dass zugleich

$ab \mathrel{=\!\!\!\in} a,\quad ab \mathrel{=\!\!\!\in} b$ | $a \mathrel{=\!\!\!\in} a+b,\quad b \mathrel{=\!\!\!\in} a+b$

ist, wie zu beweisen war.

Sollte es nun aber kein eigentliches Gebiet geben, welches unter dem Symbol

ab | $a+b$

zu verstehen wäre — eine Frage, deren völlige Erörterung wir bewusst auf eine spätere Stelle im System der Theorie verlegten, so ist folgendes zu bemerken.

Wir nehmen den Satz der Identität „a ist a“ nicht blos für die Gebiete — etwa unsrer „bevorzugten“ speziellen Mannigfaltigkeit — sondern wir nehmen ihn auch für diejenigen jeder denkbaren Mannigfaltigkeit, ja sogar für alles zu denken Mögliche überhaupt in Anspruch. Auch für irgendwelche Klassen von irgendwelchen Individuen muss er anerkannt werden. Jedes Ding oder Objekt des Denkens ist es selber, ist das, was es ist.

Wir dürfen demnach verlangen, dass unser Prinzip I auch für *Namen* anerkannt werde, und zwar ohne Rücksicht darauf, ob dieselben einen Sinn haben, oder nicht. Dasselbe gilt uns auch für sinnlose

Namen. Auch „nichts ist nichts", $0 \subseteq 0$, ein rundes Quadrat ist ein rundes Quadrat — dürfen wir sagen.

Auch wer solche Behauptung nicht als selbstverständlich hinnehmen möchte, wird wenigstens zugeben müssen, dass dieselbe *unbedenklich* ist: es kann durch sie kein Irrtum erzeugt werden, gerade weil es „nichts" ist, worauf sich die Aussage bezieht; über „nichts" will sie eine Information erteilen und charakterisirt sich somit als eine inhaltsleere.

Nun haben wir mittelst der in den Definitionen (2) und (3) getroffenen Übereinkunft ausgemacht, die Symbole $0, 1, a \cdot b$ und $a + b$ unter allen Umständen zu den „Gebieten" unsrer Mannigfaltigkeit zu rechnen, sie nötigenfalls, wenn es keine *eigentlichen* Gebiete geben sollte, welche die ihnen beigelegten Eigenschaften besitzen, als „uneigentliche" Gebiete — meinetwegen sinnlose Namen — dieser Mannigfaltigkeit zuzuschlagen.

Nach dem Vorausgeschickten können wir also auch für diese „Gebiete" den Satz der Identität in Anspruch nehmen und darauf die Überlegung gründen, durch welche sich oben der Beweis der Theoreme 6) ergab.

In § 7 wird sich übrigens herausstellen, dass der Fall, wo jenen Symbolen der Wert 0 zukommt, in der That der einzige Fall ist und bleibt, in welchem sie uneigentliche Gebiete vorstellen. Dies ist zudem auch a priori klar. Denn entweder gibt es ein wirkliches Gebiet, welches die Bedeutung des Symbols ab ausmacht, oder nicht. Im letztern Falle ist das als Gebiet hingestellte Zeichen ab sinnlos, bedeutet nichts und kann 0 genannt werden. Analog $a + b$, falls es ausarten sollte.

Dass nun auf die identische Null ebenfalls das Prinzip I anwendbar ist, also $0 \subseteq 0$ sein muss, ist — zum Überfluss — schon in der Def. $(2_\times)$ der identischen 0 enthalten, indem die Formel $0 \subseteq a$ als eine allgemeingültige auch für ein die 0 bedeutendes a in Anspruch genommen werden darf. Auch unter diesem Gesichtspunkt also erscheinen die Subsumtionen α), auf die unser Beweis der Theoreme 6) sich gründete, selbst dann zulässig, wenn ab oder $a + b$ uneigentliche Gebiete sein sollten, d. i. eben 0 bedeuten.

Endlich würden für $ab = 0$ die Subsumtionen $6_\times$) sich auf Grund der Def. $(2_\times)$ auch unmittelbar verifiziren lassen — vergl. § 9, ϱ) — wogegen für den Fall $a + b = 0$ zur Bewahrheitung der Subsumtionen 6_+) das Theorem 24_+) könnte herangezogen werden.

Nach Th. 6) muss im identischen Kalkul mit Gebieten nun — *umgekehrt wie in der Arithmetik* und Zahlentheorie — gesagt werden: *das Produkt sei stets in seinem Faktor* (dem ersten oder auch dem zweiten) *enthalten;* und es muss auch gesagt werden: *der Summand*, das Glied, *sei in der Summe enthalten.* —

Mit dem Bisherigen haben wir bereits die *formale Grundlage* für einen bedeutenden (ersten) Teil des Gebäudes unsrer Disziplin gewonnen.

Mit den gegebenen Prinzipien I, II, den Definitionen (1) bis (3) und den Theoremen 1) bis 6) kommt man bereits bei den deduktiven Schlussfolgerungen, welche uns obliegen, bis incl. der Theoreme 25) aus.

Gleichwol wollen wir an das bisherige noch einige — etwas subtilere — Betrachtungen unter der Überschrift des nächsten Paragraphen anreihen, welche die Bestimmung haben, eine berechtigte Anforderung zu erfüllen, einem Erkenntnissbedürfniss zu genügen, das meines Erachtens beim Anblick der Definition (3) von ab und $a+b$ sich aufdrängen muss. Es handelt sich um die Frage, ob die in (3) anscheinend nur für die *einseitige* Verwendung dieser Symbole als Prädikat, respektive Subjekt, gegebene Vorschrift auch deren umgekehrte Verwendung regelt, inwiefern sie also wirklich verdiente, als die *vollständige* Definition von Produkt und Summe hingestellt zu werden.

Es werden diese Betrachtungen noch einige an sich nicht uninteressante Theoreme und neue Formen von Definitionen liefern, die aber, wie angedeutet, späterhin nicht wesentlich citirt zu werden brauchen, die im Lehrgebäude nicht gerade als unentbehrliche Stütze erscheinen.

Anfänger mögen also ohne Schaden den § 6 überschlagen und werden dennoch in der Lage bleiben, die letzten Ziele dieses Buches erreichen zu können.

Ich denke hiebei speziell an den immerhin möglichen und für eine fernere Zukunft zu erhoffenden Fall einer *Verwertung* unsres Lehrganges für den Logikunterricht in Gymnasialprima. Daselbst *eingeführt* zu werden ist das Buch nicht bestimmt, vielmehr wird dasselbe seinen Zweck erreichen, wenn Lehrer, Philosophen und Mathematiker, es würdigen.

§ 6. Kritische Untersuchungen über die gegebene Definition.

(Überschlagbar.)

Zusatz 2 zur Def. (3). Unter den Voraussetzungen der Definition (3) hat *jedes* Gebiet x, derart, dass

$$x \Subset c \qquad \Big| \qquad c \Subset x$$

ist, die gleiche Eigenschaft wie c, dass nämlich auch

$$x \Subset a \text{ nebst } x \Subset b \qquad \Big| \qquad a \Subset x \text{ nebst } b \Subset x$$

sowie

$$x \Subset ab \qquad \Big| \qquad a + b \Subset x$$

ist. Dies ergibt sich einerseits nach (3)′ unter zweimaliger Anwendung des Prinzips II, und andrerseits, in Übereinstimmung damit, auch nach (3)″ durch einmalige Anwendung von II; nämlich, um es genauer — z. B. links vom Mittelstriche — darzulegen: Aus $x \Subset c$ und $c \Subset a$

folgt $x \Subset a$, desgleichen aus $x \Subset c$ und $c \Subset b$ folgt $x \Subset b$, und aus diesen beiden Ergebnissen muss nach $(3_\times)'$ selbst (für x statt c in Anspruch genommen) folgen: $x \Subset ab$.

Andrerseits folgt aus $x \Subset c$ und $c \Subset ab$ sogleich direkt: $x \Subset ab$ und damit nach $(3_\times)''$ auch $x \Subset a$ und $x \Subset b$.

Mit diesem Zusatze können wir nun die Definition (3) zu folgender, nur äusserlich etwas komplizirter erscheinenden Formulirung zusammenfassen, bei der wir ebenfalls von vornherein sicher sind, dass das definirte Gebilde als „Gebiet" existirt:

7) Theorem, als neue Fassung der Def. (3), *auch zu citiren als* Definition (4), und zwar

$7_\times$) Th. = Def. $(4_\times)$	7_+) Th. = Def. (4_+).

Wenn für gegebene a, b ein c existirt derart, dass für jedes x, für welches

$x \Subset c$	$c \Subset x$

ist, auch

$x \Subset a$ *nebst* $x \Subset b$	$a \Subset x$ *nebst* $b \Subset x$

sein wird, dann und nur dann ist man berechtigt zu sagen, es sei:

$c \Subset ab$.	$a + b \Subset c$.

Beweis. Da nach I $c \Subset c$ ist, so ist c selber ein zulässiger Wert des x und muss jedenfalls auch

$c \Subset a$ nebst $c \Subset b$,	$a \Subset c$ nebst $b \Subset c$,
somit nach $(3_\times)'$ $c \Subset ab$	somit nach $(3_+)'$ $a + b \Subset c$

sein. Die Umkehrung ist der Inhalt des vorigen Zusatzes.

Der Sachverhalt sei einstweilen schon durch die Figur veranschaulicht:

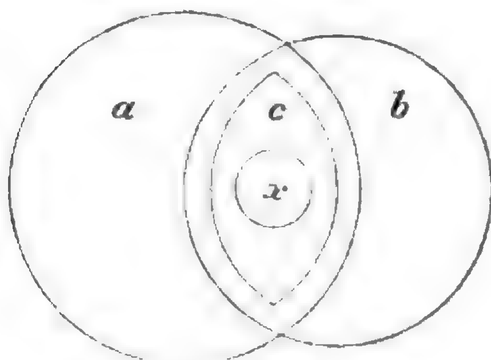


Fig. $7_\times$.

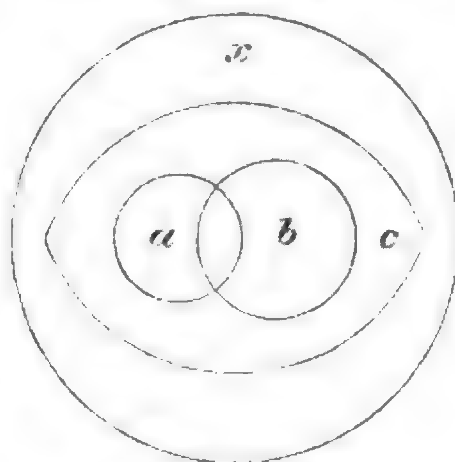


Fig. 7_+.

Zusatz zu Th. 7). Unter den Bedingungen des Satzes hat wieder jedes y derart, dass

$y \Subset c$	$c \Subset y$

ist, durchaus die gleiche Eigenschaft, wie c, wie leicht mittelst II zwiefältig zu beweisen ist.

Anmerkung zu Th. 7). Daneben mag es noch solche x geben, für welche zwar

$x \neq\!\!\!\in a$ nebst $x \neq\!\!\!\in b$ | $a \neq\!\!\!\in x$ nebst $b \neq\!\!\!\in x$

ist, ohne dass doch zugleich

$x \neq\!\!\!\in c$ | $c \neq\!\!\!\in x$

wäre. Im allgemeinen lassen sich in der That Gebiete x derart angeben, welche zu c in einer andern als der durch vorstehende Subsumtion ausgedrückten Beziehung stehen, und wird es der Phantasie des Lesers nicht schwer fallen, sich in obige Figuren solche Gebiete x eingetragen zu denken, z. B.

links einen über das Zweieck c hinausragenden oder auch ganz ausserhalb desselben liegenden, jedoch noch in den Kreis a sowol als den b ganz hineinfallenden kleinen Kreis x

rechts einen die Kreise a und b zwar ganz in sich schliessenden, jedoch von der Zweieckfläche c noch teilweise überragten, vielleicht sogar selbst in das Zweieck c hineinfallenden Kreis x.

Wir mussten die Def. (4) als ein Theorem — Th. 7) — hinstellen, weil dieselbe keine willkürliche Festsetzung mehr den Grundlagen unsrer Disziplin hinzufügte, sondern auf Grund namentlich der bereits getroffenen Festsetzung (3), sich als eine *notwendig* mitgeltende, gleichberechtigte Form ebendieser Def. (3) nachweisen liess.

Diese Form ist freilich weniger einfach als die frühere, und es hätte keinen Wert, die einfachere Fassung der Definition in eine verwickeltere, komplizirtere umzuwandeln, wenn diese nicht durch ihre Analogie mit den noch fehlenden, den ausstehenden beiden Definitionen uns das Material zu interessanten Vergleichen lieferte.

Inzwischen verlohnt es noch, zu sehen, dass und wie man von Def. (4) zur Def. (3) auch zurückgelangen kann.

Ich will dies nur für die Sätze *links* vom Mittelstriche zeigen. Wir mögen die Def. $(4_\times)$ auch so in Worte fassen: Die Redensart „c sei in ab enthalten", m. a. W. die Subsumtion „$c \neq\!\!\!\in ab$" *heisst: jedes in c enthaltene x ist auch in a und in b enthalten.*

Da nach I c selbst ein solches x ist, muss nun die Annahme $c \neq\!\!\!\in ab$ auch die beiden Subsumtionen $c \neq\!\!\!\in a$ und $c \neq\!\!\!\in b$ nach sich ziehen, womit $(3_\times)''$ gewonnen ist.

Bleibt nur noch das Umgekehrte zu zeigen, d. h. $(3_\times)'$ abzuleiten.

Sind die Voraussetzungen $c \neq\!\!\!\in a$ und $c \neq\!\!\!\in b$ gleichzeitig erfüllt, so muss nach der erstern jedes in c enthaltene x (für welches also $x \neq\!\!\!\in c$ ist) nach II auch in a enthalten sein (für dasselbe auch $x \neq\!\!\!\in a$ sein). Ebenso muss nach der zweiten Voraussetzung jedes in c enthaltene x

auch in b enthalten, für $x \Subset c$ auch $x \Subset b$ sein. Nach beiden Voraussetzungen zusammen wird also jedes in c enthaltene x zugleich auch in a und in b enthalten sein, wonach die Def. $(4_\times)$ ersichtlich anwendbar ist, und nach dieser $c \Subset ab$ zu sagen sein wird. Damit ist dann auch $(3_\times)'$ und sohin die ganze Def. (3) gewonnen.

Mit Def. (3) sowol als Def. (4) erscheint auf den ersten Blick immer noch

das Produkt nur als Prädikat | die Summe nur als Subjekt

allgemein definirt. Gleichwol zeigt sich leicht, dass damit doch auch für die Verwendung

des *Produkts als Subjekt* | der *Summe als Prädikat*

schon in gewissem Grade präjudizirt ist.

In der That ist dies wenigstens in den Beispielen der Subsumtionen α) des vorigen Paragraphen, sowie des Theorems 6), also bei:

$$ab \Subset \begin{cases} ab \\ a \\ b \end{cases} \qquad \Big| \qquad \left.\begin{matrix} a+b \\ a \\ b \end{matrix}\right\} \Subset a+b$$

augenscheinlich der Fall. Und diese Beispiele bleiben auch nicht die einzigen; vielmehr könnten wir sogleich den *Zusatz* beifügen: So oft etwa noch

$$a \Subset y \quad \text{oder} \quad b \Subset y \qquad \Big| \qquad y \Subset a \quad \text{oder} \quad y \Subset b$$

sein sollte, muss nach II auch

$$ab \Subset y \qquad \Big| \qquad y \Subset a+b$$

gelten, und diese Subsumtionen würden ebenfalls die umgekehrte Verwendung exemplifiziren.

Dass aber *auch ganz allgemein* die Definition

des *Produkts als Subjekt* | der *Summe als Prädikat*

zurückgeführt werden kann auf die für die frühere (hiezu umgekehrte) Verwendung bereits gegebene Def. (3), dass sie durch diese *völlig* mitgegeben ist, ergibt sich aus folgender Betrachtung, die wir in die Form zweier Lehrsätze kleiden.

$(8_\times)'$ Theorem. *Soll* | $(8_+)'$ Theorem. *Soll*

$$ab \Subset c \qquad \Big| \qquad c \Subset a+b$$

gelten, so muss für jedes x, für welches

$$x \Subset ab \qquad \Big| \qquad a+b \Subset x$$

ist, auch sein:

$$x \Subset c. \qquad \Big| \qquad c \Subset x.$$

Beweis direkt aus II durch nur einmalige Anwendung dieses

Prinzips, das in der That aus den beiden Voraussetzungen — linkerhand z. B. aus $x \mathrel{=\!\!\!\in} ab$ und $ab \mathrel{=\!\!\!\in} c$ — unmittelbar uns die Behauptung liefert.

$8_\times)''$ Theorem. *Wenn für jedes x, für welches $x \mathrel{=\!\!\!\in} ab$ ist, auch $x \mathrel{=\!\!\!\in} c$ sein muss, so wird*

$$ab \mathrel{=\!\!\!\in} c$$

$8_+)''$ Theorem. *Wenn für jedes x, für welches $a+b \mathrel{=\!\!\!\in} x$ ist, auch $c \mathrel{=\!\!\!\in} x$ sein muss, so wird*

$$c \mathrel{=\!\!\!\in} a + b$$

zu gelten haben.

Beweis. Nach I, nämlich wegen

$$ab \mathrel{=\!\!\!\in} ab, \quad\Big|\quad a + b \mathrel{=\!\!\!\in} a + b,$$

ist ja dann ab resp. $a + b$ selber ein zulässiger Wert des x. —

Hienach ist klar, dass wir *definitions*weise zu sagen haben werden, es sei

$ab \mathrel{=\!\!\!\in} c$, wenn für jedes x, welches $\mathrel{=\!\!\!\in} ab$ ist, auch $x \mathrel{=\!\!\!\in} c$ sein wird.

$c \mathrel{=\!\!\!\in} a+b$, wenn für jedes x, wofür $a + b \mathrel{=\!\!\!\in} x$ ist, auch $c \mathrel{=\!\!\!\in} x$ sein muss.

Ersetzen wir hierin die Forderung $x \mathrel{=\!\!\!\in} ab$ resp. $a + b \mathrel{=\!\!\!\in} x$ durch dasjenige, was sie nach Def. (3) bedeutet, so erhalten wir folgende Fassung der noch ausstehenden Definition, die, wenn man sie auch selbständig als eine solche von vornherein hätte hinstellen können, doch dermalen wesentlich wieder als Theorem zu bezeichnen ist.

$9_\times)$ Theorem, *auch zu citiren als* Definition $(5_\times)$.

$9_+)$ Theorem, *auch zu citiren als* Definition (5_+).

Wenn für gegebene a, b ein solches c existirt, dass für jedes die Bedingungen

$$x \mathrel{=\!\!\!\in} a,\ x \mathrel{=\!\!\!\in} b \quad\Big|\quad a \mathrel{=\!\!\!\in} x,\ b \mathrel{=\!\!\!\in} x$$

bezüglich gleichzeitig erfüllende x auch stets

$$x \mathrel{=\!\!\!\in} c \quad\Big|\quad c \mathrel{=\!\!\!\in} x$$

ist, so (d. h. immer dann und nur dann) *ist zu sagen, es sei:*

$$ab \mathrel{=\!\!\!\in} c. \quad\Big|\quad c \mathrel{=\!\!\!\in} a + b.$$

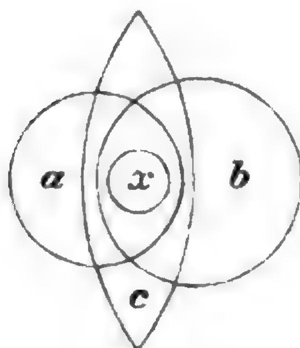


Fig. $8_\times$.

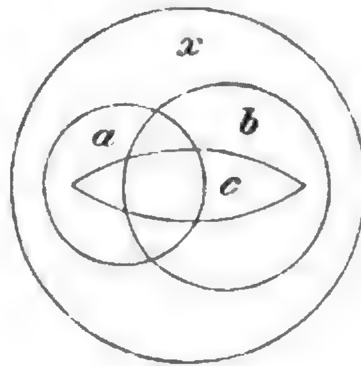


Fig. 8_+.

Der Sinn auch dieser Erklärung mag durch eine Figur erläutert werden, in welcher sich die vorausgesetzten Bedingungen hinsichtlich der Gebiete a, b, c und wenigstens eines bestimmten x verwirklicht zeigen (Fig. $8_\times$ u. Fig. 8_+). Es bedeuten a, b, x Kreisflächen und c das „Bilineum", die von den zwei Kreisbogen begrenzte Fläche.

Zusatz 1 zu Th. 9). Unter diesen Bedingungen hat jedes y derart, dass

$$c \mathrel{\underline{\in}} y \qquad\qquad | \qquad\qquad y \mathrel{\underline{\in}} c$$

ist, durchaus die gleiche Eigenschaft wie c, wie leicht nach II auf zwei Arten zu beweisen.

Zusatz 2 zu Th. 9). Nach Def. (2) existirt in Gestalt von 1 resp. 0 sicher mindestens ein c, welches den Voraussetzungen der Def. (5) genügt, gleichwie auch in Gestalt von 0 resp. 1 mindestens ein x der daselbst verlangten Art angebbar ist.

Anmerkung 1 zu Th. 9). Daneben mag es noch solche x geben, für welche zwar

$$x \mathrel{\underline{\in}} c \qquad\qquad | \qquad\qquad c \mathrel{\underline{\in}} x$$

ist, ohne dass jedoch zugleich

$$x \mathrel{\underline{\in}} a, \quad x \mathrel{\underline{\in}} b \qquad\qquad | \qquad\qquad a \mathrel{\underline{\in}} x, \quad b \mathrel{\underline{\in}} x$$

wäre, und in der That wird in die Figur die Phantasie des Lesers mit Leichtigkeit solche Flächen x einzeichnen.

Anmerkung 2 zu Th. 9). Sehr wichtig ist die Bemerkung: *Das Theorem 6) des vorigen Paragraphen folgt ebensogut aus der Def. (5), wie aus der (3).*

Denn für jedes x, für welches

$$x \mathrel{\underline{\in}} a \text{ nebst } x \mathrel{\underline{\in}} b \qquad\qquad | \qquad\qquad a \mathrel{\underline{\in}} x \text{ nebst } b \mathrel{\underline{\in}} x$$

ist, gilt selbstverständlich doch

$$x \mathrel{\underline{\in}} a \qquad\qquad | \qquad\qquad a \mathrel{\underline{\in}} x$$

— im Grunde nach I, für Aussagen in Anspruch genommen, vergl. Anmerkung zu I. Indem man also unter dem c der Def. (5) sich a vorstellt, erkennt man, dass nach dieser

$$ab \mathrel{\underline{\in}} a \qquad\qquad | \qquad\qquad a \mathrel{\underline{\in}} a + b$$

sein muss — und ähnlich für b. —

Vergleichen wir die Formen (4) der Def. (3) und die Def. (5), nämlich die beiden Theoreme 7) und 9) miteinander, so tritt eine weitgehende Übereinstimmung derselben zutage.

Der Unterschied beider Theoreme besteht nämlich ganz allein darin, dass die Zeile mit der Subsumtion

$$x \mathrel{\underline{\in}} c \qquad\qquad | \qquad\qquad c \mathrel{\underline{\in}} x$$

und die Zeile mit den Subsumtionen

$$x \mathrel{\underline{\in}} a, \quad x \mathrel{\underline{\in}} b \qquad\qquad | \qquad\qquad a \mathrel{\underline{\in}} x, \quad b \mathrel{\underline{\in}} x$$

im einen Theorem dem andern gegenüber vertauscht erscheint; d. h. *in der zusammengesetzten Voraussetzung* eines jeden der beiden Theoreme, welche selbst die Erfüllung einer Bedingung an das Erfülltsein einer zweiten Bedingung knüpft, muss man jenes Bedingte mit dieser Bedingung vertauschen, um das andre Theorem daraus zu erhalten — man muss nicht das Theorem, wohl aber dessen Voraussetzung „umkehren“.

Wir hätten nun allerdings anstatt der Definitionen (3) oder (4) auch die Definition (5) *als solche* an die Spitze der ganzen Theorie stellen können, woraus sich sofort auch das Th. 6) — wie in Anm. 2 zu Th. 9) gezeigt — mitergeben haben würde.

Es wäre dann ab und $a+b$ auch wieder nur für die einseitige Verwendung definirt erschienen, aber diesmal für die umgekehrte wie früher, zunächst nämlich wäre ab nur als Subjekt und $a+b$ als Prädikat erklärt.

Für die andersseitige Verwendung dieser beiden Symbole (nämlich für die von ab als Prädikat und $a+b$ als Subjekt) könnte dann die Begriffserklärung wieder leicht auf die vorhergehende zurückgeführt werden kraft zweier Theoreme — naheliegender Analoga zu Th. 8)′ und 8)″ — die wir zunächst aussprechen und beweisen wollen.

$10_\times)'$ **Theorem.** *Soll*	$10_+)'$ **Theorem.** *Soll*
$c ⋹ ab$	$a+b ⋹ c$
gelten, so muss für jedes x, für welches	
$ab ⋹ x$	$x ⋹ a+b$
ist, auch sein:	
$c ⋹ x.$	$x ⋹ c.$

Beweis direkt aus Prinzip II.

Und umgekehrt:

$10_\times)''$ **Theorem.**	$10_+)''$ **Theorem.**
Wenn für jedes x, für welches	
$ab ⋹ x$	$x ⋹ a+b$
ist, auch	
$c ⋹ x$	$x ⋹ c$
sein muss, so wird zu sagen sein, es sei	
$c ⋹ ab.$	$a+b ⋹ c.$

Beweis nach I, da alsdann auch ab resp. $a+b$ selbst ein solches x ist, welches die Bedingung und folglich auch die Behauptung der Voraussetzung erfüllt.

Hienach würden wir also *definitions*weise zu sagen haben, es sei

$c \Subset ab$ allein dann, wenn jedes ab enthaltende x auch c enthalten muss.	$a+b \Subset c$ dann allein, wenn jedes in $a+b$ enthaltene x auch in c enthalten sein muss.

Ersetzten wir nunmehr in diesen Festsetzungen die Bedingung $ab \Subset x$ resp. $x \Subset a+b$ durch dasjenige, was sie nach Def. (5) oder Th. 9) bedeutet, wobei indess in letzterem an Stelle des dortigen x zur Unterscheidung ein andrer Buchstabe, wie y, verwendet werden müsste (weil x bereits mit einer andern Bedeutung vorgekommen, nicht mehr verwendbar erscheint), so erhielten wir endlich die noch ausstehenden beiden Definitionen.

Diese aber — obwol im Grunde notwendig äquivalent der Def. (3) und dasselbe leistend, nämlich mit Hülfe des Subsumtionsbegriffs die Bedeutung von ab als Prädikat und von $a+b$ als Subjekt erklärend — würde sich doch dem Wortlaut nach mit Def. (3) durchaus nicht decken. Bei weitem nicht so einfach wie letztere würde sie sogar noch erheblich verwickelter sich darstellen als die Def. (4) in Th. 7), indem sie noch weitere bedingte Bedingungen in ihre Bedingungen eingefügt zeigte. Wir wollen sie hier gar nicht in Worte fassen, sondern sie höchstens in der konziseren Formelsprache des Aussagenkalkuls — als ein Kuriosum — darstellen [§ 32, π .. σ)].

Ihrerseits müsste sie, als die ursprüngliche Definition zugrunde gelegt, kraft Th. 10) uns noch eine abermals erheblich verwickeltere Fassung der Def. (5) liefern; diese wieder könnte in demselben Sinne weiter verwendet werden und so ohne Ende fort immer verwickelter.

Wir müssen ja nun im Gegenteil nach möglichster *Vereinfachung* der grundlegenden Begriffserklärungen streben.

Da haben wir denn als eine bemerkenswerte Thatsache zu konstatiren, *dass die Def.* (5) [von ab als Subjekt, etc.] — ungeachtet ihrer Analogie zur Def. (4) [von ab als Prädikat etc.] — *durchaus nicht einer analogen Vereinfachung fähig zu sein scheint, wie die letztere (4)*, [welche wir ja in die einfachere Fassung, Def. (3), zusammenziehen konnten] — *wenigstens nicht, ohne ihren Charakter* [dass sie ab als *Subjekt* definire, etc.] *dabei zu verlieren.*

Wollte man gleichwol das Th. 9) als Def. (5) an die Spitze stellen, so würde sich zwar sehr leicht der eine Teil (3)″ unsrer früheren Def. (3) — nunmehr als Lehrsatz — auf Grund des bereits aus jener deduzirten Theorems 6) beweisen lassen. In der That aus:

$c \Subset ab$ und $ab \Subset a$ folgte $c \Subset a$ und ähnlich auch $c \Subset b$.	$a+b \Subset c$ und $a \Subset a+b$ folgte $a \Subset c$ und ähnlich auch $b \Subset c$.

Dagegen würde die Ableitung von (3)′ aus Def. (5) eine etwas höhere Anforderung an das abstrakte Denken stellen.

Ich will diese Ableitung nur für die Sätze zur Linken des Mittelstriches darlegen.

Wir können die Def. $(5_\times)$ auch so in Worte fassen: Die Redensart: „c enthält ab“ — in Formel: „$ab \mathrel{=\!\!\!\in} c$“ heisst: *jedes in a und b zugleich enthaltene x ist auch in c enthalten.*

Auf diese Def. ist nun die Erklärung der andern Redensart: „c ist in ab enthalten“ oder „$c \mathrel{=\!\!\!\in} ab$“ zurückzuführen mittelst des Th. $10_\times$) — wonach ebendieses heissen wird:

jedes ab enthaltende x (jedes x, welches ab enthält) muss auch c enthalten.

Fügt man in diese Erklärung ein, was die (in der Klammer wiederholte) Voraussetzung „$x \mathrel{=\!\!\!\in} ab$“ nach der vorhergehenden Erklärung $(5_\times)$ bedeutet, indem man das dortige c mit x identifizirt, und für den hier bereits anderweitig vergebenen Buchstaben x einen andern, y, gebraucht, so ergibt sich als die auf Def. $(5_\times)$ zu gründende Erklärung von ab als Prädikat die folgende:

„$c \mathrel{=\!\!\!\in} ab$“ heisst: *jedes x, welchem jedes in a und b enthaltene y eingeordnet ist, muss auch c enthalten.*

Auf Grund *dieser* Definition ist nun zu zeigen, dass wenn $c \mathrel{=\!\!\!\in} a$ und $c \mathrel{=\!\!\!\in} b$ ist, auch $c \mathrel{=\!\!\!\in} ab$ sein muss.

Gesetzt nun, es sei wirklich $c \mathrel{=\!\!\!\in} a$ und zugleich $c \mathrel{=\!\!\!\in} b$.

Dann ist c selber ein solches in a *und* b enthaltenes y.

Es ist nun zu zeigen, dass jedes x, welchem jedes in a *und* b enthaltene y eingeordnet ist, auch c enthält.

Sei x *irgend ein* Gebiet, welchem jedes in a und b enthaltene y eingeordnet ist. So ist diesem x auch das vorhin erwähnte y, welches einerlei mit c war, eingeordnet, oder es muss dasselbe x auch c enthalten. Unter den genannten Voraussetzungen ($c \mathrel{=\!\!\!\in} a$ und $c \mathrel{=\!\!\!\in} b$) trifft demnach die letzte Definition zu und sind wir berechtigt zu sagen, es sei $c \mathrel{=\!\!\!\in} ab$ — womit nun auch $(3_\times)''$ gewonnen und die ganze Def. $(3_\times)$ aus der $(5_\times)$ abgeleitet ist.

Aus alledem geht hervor, dass es zwar praktikabel, doch jedenfalls nicht vorteilhaft ist, den von uns zurückgelegten Weg im entgegengesetzten Sinne zu durchlaufen.

Allerdings, sobald für ab resp. $a + b$ die Art und Weise der Verwendung — sei es als Subjekt, sei es als Prädikat — vorgeschrieben ist, erscheint damit von selbst auch die Verwendung in dem umgekehrten Sinne geregelt. Welche von den beiden Verwendungsweisen

wir aber als die ursprüngliche Definition zuerst festlegen, ist deshalb doch nicht gleichgültig, sondern das in § 5 eingeschlagene Verfahren vorzuziehen.

$11_\times$) Theorem.	11_+) Theorem.

Es gibt nun *ein „Gebiet" c, welches die Forderung der Definitionen*

$(3_\times)$ oder $(4_\times)$ *und* $(5_\times)$, d. i. $7_\times$) *und* $9_\times$)	(3_+) oder (4_+) *und* (5_+), d. i. 7_+) *und* 9_+)

gleichzeitig erfüllt für dieselben (irgendwie) gegebnen Gebiete a, b.

Da für dieses

$c \Subset ab$ und $ab \Subset c$	$a + b \Subset c$ und $c \Subset a + b$

zugleich sein wird, so ist dasselbe

$c = ab$	$c = a + b$

selbst zu nennen.

Zusatz. *Es kann jedenfalls nur ein solches c geben.*

Denn wäre auch noch c' ein solches, so folgt ebenso:

$c' = ab$	$c' = a + b$

und damit nach Th. 4) $\quad c' = c$.

Beweis des Theorems. Dieser besteht in der Verbindung zweier Überlegungen, von denen die eine — allerdings modifizirt — unter Th. 6) schon einmal angestellt worden ist. Er möge demungeachtet hier ganz zum Bewusstsein gebracht werden. — Wie schon erwähnt, sind nach I die Formeln

α) $\quad ab \Subset ab$	$a + b \Subset a + b$

als gültige anzuerkennen. Nach

Th. $9_\times$) wenn das ab rechts in α)	Th. 9_+) wenn das $a + b$ links

mit c in Gedanken identifizirt wird, erkennt man aber, dass die obige Aussage α) den Inhalt hat, dass jedes x, für welches

$x \Subset a$ nebst $x \Subset b$	$a \Subset x$ nebst $b \Subset x$

ist, auch die Forderung erfüllen muss:

$x \Subset ab$	$a + b \Subset x$.

Dagegen nach

Th. $7_\times$) wenn das ab linkerhand	Th. 7_+) wenn das $a+b$ rechterhand

in α) mit dem c daselbst identifizirt wird, sagt ebendieser Satz α) aus, dass umgekehrt jedes x, für welches

$x \Subset ab$	$a + b \Subset x$

ist, auch die Bedingung erfüllen wird

$x \Subset a$ nebst $x \Subset b$	$a \Subset x$ nebst $b \Subset x$.

Dies alles ist auch direkt nach Def. (3) ersichtlich. — Das Symbol ab resp. $a+b$ ist demnach in der That selbst dasjenige „Gebiet“ c, welches die Voraussetzungen der als Theoreme 7) und 9) ausgesprochenen Definitionen gleichzeitig erfüllt.

Auf Grund der vorstehenden Überlegungen können wir nun sagen:

Die Operationen der identischen Multiplikation und Addition sind niemals undeutig und niemals mehrdeutig, vielmehr unbedingt ausführbar und eindeutig — oder, wie ich zusammenfassend es ausdrücken will: *sie sind „vollkommen eindeutige“* innerhalb der durch Zuzug der Symbole $0, 1, ab, a+b$ vielleicht erweiterten Mannigfaltigkeit von „Gebieten“.

Dass ab in der That eines Wertes nie ermangeln kann, wenn man schon den Namen ab selber als „Wert“ gelten lässt, erscheint selbstverständlich: eine solche Definition verbürgt zugleich die Existenz des Definirten. Dass ab nicht mehrere Werte haben kann, zeigte der Zusatz zu Th. 11). Analog bezüglich des $a+b$.

Worauf es hier besonders ankam, war: zu sehen, dass die Aufnahme der neuen Symbole unter die „Gebiete“ im Grunde schon dadurch vollzogen wurde, dass man das Identitätsprinzip I auf sie anwendete, beziehungsweise ausdehnte.

Indem man nunmehr für c sogleich den Namen ab resp. $a+b$ gebrauchte, würden die beiden Theoreme 7) und 9) augenscheinlich zu einem Satze zusammenfliessen, der sich völlig deckt mit der alten Definition (3) — nur dass es jetzt „jedes x“ anstatt des dortigen „gewissen“ c hiesse.

Dergestalt im Ringe herum gegangen kämen wir somit wieder zu unserm Ausgangspunkte zurück.

Diesen Satz, Def. (3), stellt Herr Peirce einfach als „Definition“ von ab resp. $a+b$ hin.

Dass er aber solche Definition nicht blos für die einseitige Verwendung (als major *resp.* minor) sondern in der That vollständig enthält — dies durch die hier gegebene Zergliederung nachgewiesen zu haben, dürfte wol nicht überflüssig gewesen sein. —

§ 7. Deutung von $0,1, ab, a+b$ als Gebiete nebst zugehörigen Postulaten. Konsistente Mannigfaltigkeit.

Wir schreiten jetzt dazu, das im Bisherigen abstrakt Definirte zu veranschaulichen, zu deuten.

Solange es ununtersucht gelassen wird, ob es „eigentliche“ Gebiete gebe, welche die von den Symbolen $0, 1, ab, a+b$ geforderten Eigenschaften besitzen, konnten wir sagen, dass unsre Definitionen die

Existenz des Definirten insofern verbürgen, als sie es gewissermassen selber erzeugen oder schöpferisch einführen.

Sobald wir aber jenen unter die „Gebiete" aufgenommenen Symbolen eine Bedeutung unterlegen, behaupten, dass es der Anschauung zugängliche, wirkliche Gebiete gebe von den bezüglichen Eigenschaften, *fügen wir* unsern Definitionen gewisse *Postulate hinzu*, wir stellen Forderungen über Gebietnachweise als allgemein erfüllbare hin, bezüglich deren wir uns lediglich auf die Anschauung zu berufen vermögen.

Ganz allein bezüglich der Null werden wir solchen Nachweis als nicht ausführbar erkennen, und darf ich die Konstatirung des Gegenteils wol für den Augenblick als ein „negatives" Postulat bezeichnen.

(($1_\times$)) Negatives Postulat.

Es gibt kein eigentliches Gebiet von den Eigenschaften, welche Def. ($2_\times$) dem Symbole 0 auferlegt. Es lassen sich nämlich *Gebiete angeben, die einander ausschliessen**), sogenannte *„disjunkte"* Gebiete, die kein Element gemein haben. Da die 0 in jedem Gebiet enthalten, allen gemeinsam sein soll, so kann sie nur ein „leeres" Gebiet sein, welches *kein* Element der Mannigfaltigkeit enthält. Trotzdem als ein „Gebiet" derselben charakterisirt, kann die Null auch nichts, was etwa ausserhalb der Mannigfaltigkeit läge, enthalten, sie kann nur dem Begriffe des „Nichts" entsprechen. Nach Adjungirung des letzteren ist in der That dem Sprachgebrauch entsprechend zu sagen: Jedes Gebiet enthält seine eigenen Teile sowie Elemente *und sonst „nichts"*. Das Nullgebiet wird so von den eingeführten das einzige uneigentliche oder fingirte, eingebildete, angebliche Gebiet bleiben.

((1_+)) (Positives) Postulat.

Die Elemente (und Gebiete) der Mannigfaltigkeit [seien resp.] sind miteinander alle verträglich, sodass wir vermögen, *die Mannigfaltigkeit als ein Ganzes zu denken*. In dieser ist dann jedes Gebiet derselben enthalten — einschliesslich des adjungirten Nullgebietes — gemäss den Anforderungen (2_+); und hindert nichts, sie selbst als das grösste der in ihr enthaltenen Gebiete, als ein wirkliches Gebiet zu bezeichnen. Dieses bildet nun die dem Symbole 1 zukommende Bedeutung, welches sonach dem Begriffe „des Ganzen" oder „Alles" innerhalb der vorausgesetzten Mannigfaltigkeit entspricht.

*) Die hier kursiv gedruckten Worte bilden den positiven Inhalt auch dieses Postulates, sie sprechen die Forderung aus, der man eben faktisch genügen kann.

Als *Postulat* ist $((1_+))$ eigentlich nur dann zu bezeichnen, wenn der Satz für eine *bestimmte* Mannigfaltigkeit in Anspruch genommen wird — wie z. B. für diejenige der Punkte der Tafelfläche. *Es gibt* nämlich *auch Mannigfaltigkeiten, bei denen das Postulat* $((1_+))$ *nicht erfüllbar ist,* und solche finden wir ausschliesslich auf *geistigem* Gebiete, im Bereich der Lehren, Meinungen und Behauptungen. Es gibt Meinungen und Behauptungen, auch Anforderungen oder Bedingungen, die miteinander unvereinbar sind.

Beispielsweise der Satz: „die Funktion $f(x, y)$ ist symmetrisch" lässt sich mit dem Satze: „die(selbe) Funktion $f(x, y)$ ist nicht symmetrisch" unmöglich zu einer Mannigfaltigkeit der früher gedachten Art vereinigen, oder mit vielleicht noch anderen Sätzen in *einer* als Ganzes denkbaren Mannigfaltigkeit zusammenfassen, gemeinsam unterbringen. Da diese beiden Sätze — *jeder einzelne als gültig oder erfüllt angenommen, als glaubhaft hingestellt* — einen *Widerspruch* involviren, da sie m. a. W. miteinander „unverträglich" erscheinen, vermag der menschliche Geist nicht, sie zu vereinigen; wir können immer nur den einen oder aber den andern dieser beiden Sätze gelten lassen.

A priori, von vornherein, ist $((1_+))$ daher nicht sowol als ein „Postulat" sondern vielmehr als eine *Voraussetzung* oder Annahme zu qualifiziren, durch welche die zu betrachtende Mannigfaltigkeit charakterisirt wird als eine *„konsistente Mannigfaltigkeit"*, deren Elemente sämtlich miteinander *verträglich* sind — im Gegensatz zu den *„inkonsistenten* Mannigfaltigkeiten", deren Elemente *nicht alle verträglich* sind miteinander. Auf diesen Sachverhalt sollte oben schon das in eckige Klammer gesetzte [seien resp.] vorsichtig hinweisen. (Vergl. hiezu § 31, Fussnote.)

Um das Gebiet 1 zu veranschaulichen, müssten wir die ganze Bild- oder Tafelfläche schraffiren; die Veranschaulichung des Null-Gebietes ergäbe sich, wenn wir sie ganz leer liessen, nichts, *auch nicht einen Punkt* in sie einzeichneten und sagten, das Eingezeichnete eben sei das Nullgebiet.

Die Symbole 0 und 1 erscheinen als die beiden Extreme, als die äussersten Werte unter den denkbaren Gebieten der Mannigfaltigkeit, und zwar ist das Nullgebiet als das minimale, das Gebiet 1 als das Maximalgebiet zu bezeichnen. Ebenso stellen 0 und 1 die entgegengesetzten Extreme (Grenzfälle, limits) unter den Klassensymbolen vor, indem keine Klasse weniger als *keines* und keine mehr als *alle* Individuen einer vorausgesetzten Mannigfaltigkeit (wo nicht von Objekten des Denkens überhaupt) enthalten kann.

Wie es ferner die Figur veranschaulicht, in welcher wir a und b als Kreisflächen angenommen und die zugehörigen Gebiete $a \cdot b$ resp. $a + b$ durch Schraffiren hervorgehoben haben:

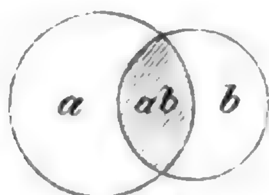


Fig. $9_\times$.

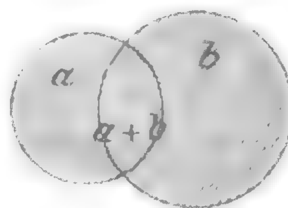


Fig. 9_+.

ist zu konstatiren, *dass*

$a \cdot b$ das Gebiet vorstellt, welches den Gebieten a und b gemeinsam ist, in welchem sie sich gegenseitig *durchdringen (schneiden)*, und — falls sie keinen Punkt gemein haben (Fig. $10_\times$) — das Nullgebiet.

$a + b$ das Gebiet vorstellt, zu welchem a und b einander gegenseitig ergänzen, [und zwar, falls dann innerhalb der Mannigfaltigkeit nichts mehr übrig bleibt, diese selbst, das Gebiet 1 — vergl. Fig. 10_+, worin b die Aussenfläche des innern Kreises bedeutet].



Fig. $10_\times$.

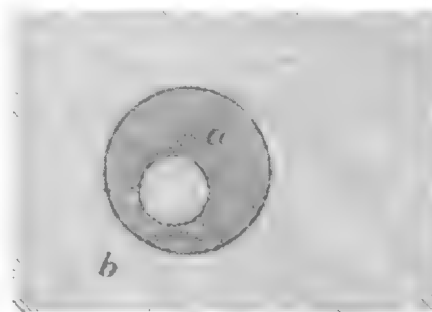


Fig. 10_+.

Hier ist $a \cdot b = 0$

Solche Gebiete, deren Produkt 0 ist, nannten wir bereits *disjunkt.*

Hier ist $a + b = 1$.

Analog mögen solche Gebiete, deren identische Summe 1 ist, *supplementär* genannt werden.

Wir mögen die vorstehenden Sätze etwa selbst bezeichnen als

Postulat $((2_\times))$ | Postulat $((2_+))$,

weil sie wesentlich auf der Erfüllbarkeit der Forderung beruhen und diese in sich schliessen:

wenn zwei Gebiete gegeben sind,

dasjenige Gebiet nachzuweisen, resp. herzustellen und im Geiste zu isoliren, welches die den beiden gemeinsamen Punkte ausschliesslich enthält.

ein Gebiet zu bilden, welches nur diejenigen Punkte enthält, die dem einen oder auch dem andern der beiden gegebenen Gebiete angehören.

Vermögen wir nun dieses, so stimmt für die Anschauung die Probe des Teils (3)′ sowol als die Probe des Teils (3)″ der Definition (3):

Zu Fig. $9_\times$. Wenn irgend ein Gebiet c zugleich in a und b enthalten ist, so ist es auch in dem angeblichen Gebiet ab enthalten. Desgl. umgekehrt: Wenn ein c in dem fraglichen ab enthalten ist, so ist es auch zugleich in a und in b enthalten.

Zu Fig. 9_+. Wenn a und zugleich b ganz in einem Gebiete c enthalten sind, so ist auch das angebliche Gebiet $a+b$ in diesem c enthalten. Und umgekehrt, wenn das problematische $a+b$ in einem Gebiete c enthalten ist, so ist auch sowol a als b in diesem c enthalten.

Vergl. auch Prinzip II und das hier unmittelbar evidente Theorem 6).

Zu Fig. $10_\times$, wo a und b keinen Punkt gemein haben, ist noch zu bemerken: Ausser dem Nullgebiete ist kein Gebiet c denkbar, welches zugleich in a und in b enthalten wäre; dies Gebiet 0 ist aber auch in ab (welches $= 0$ behauptet ist) enthalten — cf. I sowie Def. ($2_\times$), nach welchen beiden ja $0 \subseteq 0$ gilt. Wenn umgekehrt ein c in dem ab, welches 0 ist, enthalten sein soll, so muss es nach Th. $5_\times$) selbst 0 sein, und ist dasselbe nach Def. ($2_\times$) dann auch in a sowie in b enthalten.

Man sieht: der Satz der Arithmetik, wonach ein Produkt nicht anders gleich 0 sein, verschwinden kann, als indem einer seiner Faktoren selbst 0 ist — ein Satz, der dort übrigens auch für Produkte von unbegrenzter Faktorenzahl schon nicht mehr gilt — dieser Satz trifft im identischen Kalkul überhaupt nicht zu. Hier kann vielmehr leicht $a \cdot b$ verschwinden, ohne dass a oder b selbst gleich 0 wäre, verschwände. Es ist dies aber auch ein Satz, der wesentlich nicht auf die Multiplikation, sondern auf die Division sich bezieht, indem bei ihm der Produktwert ($= 0$) als *gegeben* erscheint. Der Satz kommt in der That auf die Gleichung $\frac{0}{a} = 0$ (für a ungleich 0) hinaus, und dass die auf *Division* bezüglichen Sätze der Arithmetik sich zumeist *nicht* auf den identischen Kalkul übertragen, wurde bereits hervorgehoben.

In gleicher Weise stimmt die Probe für jede andere der in § 6 abgeleiteten Formen der Def. (3).

Die angegebenen Gebiete genügen also der Def. (3) *wirklich* und nach Vorangegangenem [cf. Th. 11) Zusatz] auch *einzig*. Zum Überfluss vermöchte man bei jedem andern als ab resp. $a+b$ vermuteten Gebiete leicht solche x nachzuweisen, für welche die Forderungen der

bezüglichen Definitionen des vorigen Paragraphen nicht mehr alle zutreffen.

Hiermit aber haben wir den Boden der Realitäten betreten. Wir können aus dem anschaulichen Substrat die Gewissheit schöpfen, *dass das System unsrer grundlegenden Definitionen und Prinzipien ein in sich konsistentes ist,* dass dasselbe Widersprüche nicht in sich bergen kann, seine Teile miteinander verträglich sein müssen.

Vierte Vorlesung.

§ 8. **Interpretation für Klassen.**

Bei dem Kalkul mit *Klassen* enthalten die letzten Postulate die Forderungen:

von einer gegebenen Klasse von Individuen diejenigen abzusondern, welche zugleich einer andern Klasse angehören	zwei gedachte Klassen in eine einzige zu verschmelzen, welche die Individuen der beiden sämtlich enthält

— Forderungen, denen der menschliche Geist gewachsen erscheint.

Man sieht: *die identische*

Multiplikation	*Addition*

läuft auf eine

Absonderung, Selektion	*Zusammenfassung, Kollektion*

hinaus; bei

ersterer werden aus der einen Klasse die Individuen der andern „(her)*ausgelesen*“.	letzterer werden die Individuen der beiden Klassen zu einer einzigen Klasse gesammelt, „*zusammengelesen*“.*)

Allemal entsteht hiebei aus den gegebenen Klassen eine neue, welche zu jenen in einer bestimmten Beziehung steht, und zwar in einer ganz fundamentalen Beziehung, welche erscheint als eine der denkbar einfachsten und am nächsten liegenden oder ursprünglichsten Beziehungen, die sich naturgemäss zu allererst der Beachtung darbieten. Indem nun die *Wortsprache* gedachte Klassen von Dingen in der Regel mit Gemeinnamen benennt, wie sie ja von Urbeginn hauptsächlich mit Gemeinnamen operirt, die auf ganze Klassen von Dingen oder Verhältnissen passen, wird sie durch die Darstellung mittelst Worten, verbale Einkleidung der obigen Prozesse ein paar der wich-

---

*) Letzteres unbeschadet des etwaigen Zweckes einer *distributiven* Verwendung des Zusammenfassungsergebnisses behufs Bildung oder Abgabe auch von generellen Urteilen.

tigsten Mittel an die Hand bekommen resp. in Gestalt derselben bereits besitzen, um aus vorhandenen Gemeinnamen in's Unbegrenzte neue Gemeinnamen zusammenzusetzen oder abzuleiten — wodurch sie in den Stand gelangt, mit einem noch verhältnissmässig geringen Namenvorrat haushälterisch auszureichen zur Bezeichnung von *Vielem*.

Es verdient deshalb sorgfältig untersucht zu werden, auf welche Weise die Wortsprache unser Mal- und Plus-Zeichen wiedergibt; es muss in's Auge gefasst und konstatirt werden, wie, wenn $a, b, c, \ldots$ in Worten charakterisirte Klassen vorstellen, deren identisches Produkt und Summe ihren *verbalen Ausdruck* finden.

Für das Nämliche bieten oft sich mehrere Ausdrucksmöglichkeiten dar, mitunter aber — werden wir sehen — auch gleiche Ausdrucksweisen für Verschiedenes! — Ein bedenklicher Umstand, der gelegentlich die Gefahr von Missverständnissen hervorruft und der Wortsprache den Vorwurf mangelhafter Präzision zuziehen muss, von welchem unsre Formel- oder Zeichensprache frei bleibt.

Um alles auf Interpretation unsrer identischen Operationen, deren Vor- und Rückübersetzung aus der Wort- in die Zeichensprache Bezügliche sogleich vollständig erledigen zu können, setzen wir, ein wenig vorgreifend, hier schon als bekannt voraus einige Grundeigenschaften dieser Operationen, die ohnehin unmittelbar einleuchten, aber allerdings erst im nächsten Paragraphen formell bewiesen werden — so namentlich die in den Theoremen 12) und 13) ausgesprochenen, desgleichen die Ausdehnung der Def. (3) auf beliebig viele Klassensymbole, wie sie in Zusatz 2 zu Th. 13) geleistet wird.

α) Was die Wiedergabe des *identischen Produktes* $a \cdot b$ oder ab (wovon wir also beiläufig wissen, dass es auch einerlei mit ba ist) *mit Worten* betrifft, so kann, wenn die Klassen a und b mit Substantiven benannt sind, ab unter Umständen durch ein *zusammengesetztes Hauptwort* ausgedrückt werden. Z. B. $a =$ Neger, $b =$ Sklave, $ab =$ Negersklave, d. i. ein Neger, welcher ein Sklave, oder ein Sklave, der Neger ist. So auch „Gold-Münze", „Marmor-Platte", etc.

α') *Umgekehrt* jedoch lässt sich *durchaus nicht,* ja bei weitem nicht, jedes zusammengesetzte Hauptwort in dieser Weise deuten, als identisches Produkt hinstellen. Schon bei „Tischler-Meister" könnte man darüber streiten, ob darunter blos ein Tischler zu verstehen sei, der zugleich Meister ist, ein „Meister unter den Tischlern" oder aber ein Meister von Tischlern, „Meister der Tischler", der über andre Tischler als Befehlender und Meister gesetzt ist. Eine Rede aber,

bei Tische gehalten, eine „Tischrede", soll jedenfalls nicht dasjenige bedeuten, „was zugleich ein Tisch und eine Rede ist" — und Ähnliches mehr.

β) Wohl am häufigsten wird der eine Faktor eines identischen Produktes durch ein Substantiv, der andre, oder die übrigen, in Form von *Adjektiven* ausgedrückt.

Schon S. 152 wurde ausgeführt, dass wir die Beiwörter ganz ebenso wie die Hauptwörter als Klassen auffassen, z. B. mit

„a = schwarz" (= schwarzes Ding = etwas Schwarzes)

kurz ausdrücken, dass a die Klasse derjenigen Dinge bezeichnen solle, denen das Epitheton „schwarz" zukommt, die wir etwa „schwarze" nennen würden. Bedeutet nun in diesem Sinne a = „schwarz", b = „Pferd", so wird ab = „schwarzes Pferd" die Klasse der Rappen bezeichnen.

Bedeutet d = „jung" und c = „normannisch", so ist $dcab$ = „junges normannisches schwarzes Pferd" ein gewisser Teil jener Klasse. Etc.

β') *Umgekehrt auch liefern ein Hauptwort mit seinen Beiwörtern, wenn sämtlich als Klassen mit Buchstaben bezeichnet, allemal die Faktoren zu einem identischen Produkte.*

Allerdings kann man nicht sagen, dass jedes Adjektiv einen Faktor vorstelle, sondern es steht dieser Verwendung der Adjektiva im Sinne solcher Faktoren bereits gegenüber deren (schon S. 152 von uns abgehandelte) Verwendung *als Prädikat* (vergl. „Dieses Pferd ist schwarz"). Und auch wenn ein Beiwort attributivisch mit einem Hauptwort verbunden ist, zeigt sich, dass manchmal noch eine „prädikative" Deutung desselben nebenher läuft, die wir unter ε) zu besprechen haben werden. Von dieser Nebenbedeutung abgesehen hat aber in ihrer attributiven Verwendung die „Adjektiv" genannte Wortart die ausschliessliche Mission den Zwecken der identischen Multiplikation zu dienen.

Da vor, dort hinter das von ihm regirte Substantiv gestellt gibt das Adjektiv in manchen Sprachen durch seine nach Numerus und Kasus mit ihm übereinstimmende Beugung, Flexion seine Zusammengehörigkeit mit dem Substantive zu erkennen, in allen Sprachen aber wenigstens durch seine (mit eventuell noch seinesgleichen) demselben benachbarte Stellung.

γ) *Immer steht zur Übersetzung des identischen Produktes in die Wortsprache ein Relativsatz zur Verfügung*, eingeleitet, konstruirt mit dem beziehenden Fürwort, Relativpronomen „welcher, welche, welches"

etc. $a \cdot b$ heisst: „*die a welche b sind*“, oder — mit Rücksicht auf das Th. $12_{\times}$) des nächsten Paragraphen — auch „die b, welche a sind“.

So bezeichnet auch der Ausdruck: „die Pferde, welche schwarz sind“, desgleichen „Etwas schwarzes, das ein Pferd ist“ die Klasse der Rappen.

γ') Auch diese Regel gilt wiederum *umgekehrt*. Es handle sich darum die weitläufigeren Ausdrücke der Wortsprache in die übersichtlicheren des Kalkuls zu übersetzen. Indem wir dann suchen müssen, alle in Betracht kommenden Klassen mit Buchstaben zu bezeichnen, werden wir einen Relativsatz mit einem Prädikate zu identifiziren haben; ihn nämlich auffassen als die Klasse derjenigen Dinge, welchen das Prädikat desselben zukommt. In diesem Sinne *kann* — gleichwie jedes Adjektiv — so auch *jeder Relativsatz als der eine Faktor mit dem Substantiv auf das er sich bezieht als dem andern Faktor zu einem identischen Produkte vereinigt werden.*

Und die besprochenen Übertragungsweisen gelten ebensowol, wenn $a \cdot b$ als Subjekt, wie wenn es als Prädikat steht.

Exempel: $ab \neq\!\!\!\in c$, wo $c =$ „selten“ bedeutet, heisst: „Schwarze Pferde sind selten“, oder auch: „Pferde, welche schwarz sind, sind selten“. $c \neq\!\!\!\in ab$, wo c ein spezielles Pferd „Favorite“ bedeutet, heisst: „Favorite ist ein schwarzes Pferd“ oder: „Favorite ist ein Pferd, welches schwarz ist“.

δ) Dagegen *nur, wenn $a \cdot b$ als Prädikat steht, ist das Malzeichen auch durch die Partikel „und“ übertragbar.*

$c \neq\!\!\!\in ab$, übersetzt mit „Favorite ist ein Pferd *und* schwarz“ wird uns, genau wie die vorhergehenden Sätze darüber informiren, dass (das Rennpferd) Favorite ein Rappe sei.

Das diesem vorhergehende Beispiel jedoch, für $ab \neq\!\!\!\in c$, würde sich — wie man sogleich übersieht — durchaus nicht mit „Schwarze Dinge *und* Pferde sind selten“ übersetzen lassen.

Sagten wir aber: „Was schwarz *und* ein Pferd ist, ist selten“, so stünde „schwarz *und* ein Pferd“ wieder nicht als Subjekt da, sondern als Prädikat des Relativsatzes (zu dem Relativpronomen „Was“, = „Dasjenige, welches“) der das Subjekt des ganzen Satzes vertritt.

Auf diese Eigenschaft der Partikel (Konjunktion) „*und*“, im Subjekt gebraucht eine andere logische Bedeutung zu erlangen als wie im Prädikate, werden wir weiterhin noch näher einzugehen haben (vergl. $\varkappa$).

ε) Als eine besondre Anwendungsweise der identischen Multipli-

kation erscheint die von der alten Logik so genannte Operation der „*Determination*". Durch Determination wird der Umfang eines Begriffes allemal vermindert, sein Inhalt vermehrt, und ist der Grund für diese Benennung darin zu erblicken, dass, wenn wir z. B. unter den „Pferden" die „schwarzen" hervorheben, wir zu dem Begriff des Pferdes, welcher zwar das Merkmal „eine Farbe zu besitzen" in sich schliesst, in welchem aber die Beschaffenheit dieser Farbe *unbestimmt*, offen gelassen ist, nunmehr noch das Merkmal der schwarzen Farbe hinzufügen und jenen Begriff dadurch noch *näher bestimmen*.

Das Wesen des Determinirens ist zu erblicken in der Einschränkung der freien Wahl, in der Verengerung, Verminderung des Spielraumes, der für unsre Willkür, Phantasie, oder den Zweifel gelassen ist, unter Vermehrung vielleicht der Information.

Verlangen wir im Kaufladen etwa Perlen a, so ist die Klasse der Objekte, die wir verlangen, durch ihren mit dem Namen „Perlen" verflochtenen Begriff charakterisirt. Begriff und Klasse erfahren eine nähere Bestimmung, wenn wir Glasperlen verlangen. Was von Glas ist, „gläsern", möge b genannt werden. Dann ist durch die Forderung von ba (oder ab) schon weniger Spielraum gelassen in Bezug auf dasjenige, was der Kaufmann uns vorlegen mag, und dieser Spielraum wird immer weiter eingeschränkt, das Verlangte immer genauer bestimmt (determinirt), wenn wir weisse Glasperlen, runde weisse Glasperlen u. s. w. verlangen. Jeder neue, durch ein Adjektiv (eventuell durch einen Relativsatz) ausgedrückte Faktor, wie „rund" c, „weiss" d, fügt hier wirklich eine weitere Bestimmung für die Klasse, die wir meinen, hinzu.

Solches ist aber durchaus nicht überall der Fall, wo Faktoren in Gestalt von Adjektiven oder Relativsätzen auftreten. Sagen wir z. B.

„Das mächtige (a) deutsche (b) Reich c..." so ist Subjekt des hiermit begonnenen Satzes das identische Produkt abc.

Hier aber bewirkt nur der Faktor b eine Determination des c. Sagen wir bc, so wird gefordert und hinzugebracht, dass der Hörer sich aus der Klasse der „Reiche" das „deutsche" isolire, es absondere, hervorhebe und vorstelle. Es wird durch das Adjektiv „deutsch" angegeben, bestimmt, von welchem Reich die Rede sein soll.

Ganz anders der Faktor a. Derselbe sagt nicht etwa aus, dass man unter „den deutschen Reichen" gerade das „mächtige" meine; das „mächtige deutsche Reich" ist (sofern wir die Gegenwart im Auge haben) ganz dasselbe als wie „das deutsche Reich". Schon als bc ist das Subjekt vollkommen bestimmt, es ist hier geradezu $a \cdot bc = bc$.

Mit dem Faktor a legen wir dem bereits determinirten Subjekte bc ein Prädikat bei, dem „deutschen Reiche" das Prädikat „mächtig zu sein", indessen nur beiläufig, anmerkungsweise, in der Voraussetzung, dass ihm dieses Prädikat anerkanntermassen zukomme oder wenigstens in der Erwartung, dass diese Prädikation nicht bestritten werde (ansonst wir vor dem beabsichtigten Satze ein eigenes Urteil: „das deutsche Reich ist mächtig" formulirt haben würden, um zunächst diese Position gegen etwaige Einwände zu verteidigen). Wir bezwecken durch die Hinzufügung des Attributs „mächtig", die Aufmerksamkeit des Hörers besonders auf dieses Merkmal (der Macht) zu lenken, das Vorhandensein dieses Merkmals in dem Begriffe des deutschen Reichs in Erinnerung zu rufen, es als ein besonders wichtiges im Bewusstsein aufzufrischen. Wir vermehren durch solchen Gebrauch eines Adjektivs wol mitunter den Vorstellungsinhalt der Hörer oder Leser, wir steigern die Intensität der Vorstellung in einer bestimmten Richtung, ohne jedoch die Klasse, welche vorgestellt wird, zu beeinflussen, ohne den Umfang des vorgestellten Begriffs zu verengern.

Die Philologie bezeichnet solche Verwendung eines Attributs (eines Beiwortes oder auch Relativsatzes) passend als die *prädikative*, im Gegensatz zu der früher besprochenen, die wir eine *determinative* nennen werden.

Sagen wir (mit J. St. Mill): „der Vater des jungen Mannes, der ihm jenes verboten hatte . . .", so ist der Relativsatz „der . . . verboten hatte" ein anderes Beispiel prädikativer Verwendung. Über das Subjekt $a =$ Vater des jungen Mannes — eine Klasse, die hier naturnotwendig aus nur *einem* Individuum besteht — und (vorausgesetzt, dass man wisse, von welchem jungen Mann die Rede) bereits vollkommen bestimmt erscheint, über dieses Subjekt erteilt der Relativsatz eine beiläufige Information, sagt aus, dass es $\Subset$ (vielleicht identisch $=$) sei der (wol auch nur aus *einem* Individuum bestehenden) Klasse derjenigen Personen, welche dem jungen Manne jenes verboten hatten. Jedenfalls aber bezweckt und vermag dieser Relativsatz *nicht*, das Subjekt des Satzes näher zu bestimmen, auszudrücken, dass „derjenige unter den Vätern des jungen Mannes, welcher ihm jenes verboten hatte" gemeint gewesen.

Man sieht hier auch das Mittel, die beiden Verwendungsweisen attributiv gebrauchter Adjektive als solche zu erkennen, zu discerniren. Ist in ab oder in dem Ausdruck „die a, welche b sind", der Relativsatz „welche b sind", resp. der Faktor b, von determinativem Charakter, so muss der Ausdruck: „diejenigen unter den a's, welche b sind" den-

selben Sinn geben; im gegenteiligen Falle aber wird der letztere unzulässig, nicht selten lächerlich erscheinen.

Ist b in ab ein „prädikativer Faktor", so kann der Sinn des Produktes ab auch mit „die a (welche, nebenbei gesagt, $\Subset b$ sind)" oder mit „a (welches ja $\Subset b$)" vollkommen ausgedrückt werden. Dann ist in der That $a \Subset b$, sowie $ab = a$; und diese beiden Aussagen sind solche, die wir in der Theorie des Gebietekalkuls auch wirklich als äquivalente, einander gegenseitig bedingende nachweisen, die wir durch Rechnung aus einander ableiten können, vergl. Th. 20).

Dass aber $ab = a$ hier ist, lässt erkennen, dass man einen Faktor b, sofern er prädikativ ist, auch ganz unterdrücken, die mit ab bezeichnete Klasse kürzer durch a allein darstellen kann.

Prädikative Faktoren sind also in der rechnenden Logik ohne Belang, im Gegensatz zu den determinativen.

So wenigstens, wenn sie wirklich nur eine beiläufige Information geben. Es kommt jedoch auch vor, dass eine Behauptung $a \Subset b$ eine folgenschwere Prämisse für weitere Untersuchungen bildet und sich keineswegs von selbst verstand. Mit dieser selbständig hinzustellenden Aussage $a \Subset b$ ist dann ein etwa prädikativ mit a verknüpfter Faktor b als gleichwertig zu erachten, welcher letztere nun aber eine neue und wesentliche Information enthält. In diesem Falle können wir ihm erst im „Aussagenkalkul" volle Gerechtigkeit widerfahren lassen.

Mit prädikativ erteilten Attributen wird unbewusst oder bewusst im gemeinen Leben, in Journalistik, Kritik, rhetorischen und polemisirenden Schriften ein weit verbreiteter Missbrauch getrieben, darauf gerichtet, im minder wachsamen Leser Voreingenommenheit zu erzeugen, irrige Ansichten einzuschmuggeln, die Zustimmung zu denselben, deren Annahme gewissermassen zu erschleichen, um unversehens unberechtigte Denkgewohnheiten zu begründen, die sich der wahren Erkenntniss hinderlich erweisen. Wird z. B. gesagt: „der feige Gegner wich dem Kampfe aus" und dann gleich mit der Erzählung fortgefahren, so bleibt dem Hörer meist nicht die Zeit zu überlegen, ob auch das Epitheton „feig" berechtigt gewesen, ob nicht vielleicht gerade das Gefühl der Überlegenheit, eventuell Klugheit, Schonung oder Friedensliebe Motiv jenes Ausweichens war. Und dadurch dass mit verschiedenen Variationen des Ausdrucks dergleichen Imputationen möglichst oft in jener rasch darüber hingleitenden Form wiederholt zu werden pflegen, gelingt es, in der unkritischen Menge verhängnissvolle Ideenassoziationen zu festigen. Auch dem Logikkalkul widerfuhr bereits beinahe ein derartiges Schicksal, indem der Verfasser eines wol besser ungeschrieben gebliebenen Buches kaum anders, als mit dem Epitheton „der unfruchtbare" von demselben spricht. —

Herr Wundt will die „Determination" anders aufgefasst wissen, als — so viel ich sehen kann — alle übrigen Schriftsteller über diesen Gegen-

stand, insbesondere alle Diejenigen, welche ausser ihm die — neuerdings von Prantl so genannte — „mathematisirende Logik“ kultiviren — (Sitzungsberichte d. Kgl. Bairischen Akademie der Wissenschaften von 1886).

Durch Determination des Begriffes „Schaf“ mittelst des Begriffs „weiss“ ergibt sich ihm [1] pag. 224 sq., gleichwie auch uns, der Begriff „weisses Schaf“, dessen Umfang die Klasse der weissen Schafe, d. i. der weissen (Dinge) unter den Schafen.

Dagegen gelangt Herr Wundt, indem er den Begriff „Weiss“ determinirt, vermittelst des Begriffs „Schaf“ zu dem Begriffe: „die Weisse des Schafes“ — anstatt, wie wir, zu dem Begriffe „weisses Schaf“ wie oben, indem wir einfach unter den weissen Dingen die Schafe hervorheben. Für Herrn Wundt ist also, wie er selbst betont, die Determination im allgemeinen eine *nicht* kommutative Operation.

Meiner Meinung nach findet bei den Überlegungen, die Herrn Wundt zu der angegebenen Ansicht führen, eine *Vermengung* statt zwischen Prozessen, die sich auf den Umfang und solchen, die sich auf den Inhalt der fraglichen Begriffe beziehen.

Hielten wir uns streng in dem Rahmen einer „Logik des Umfanges“, so konnten wir jedenfalls der Wundt'schen Auffassung nicht beipflichten.

Wir können es aber auch nicht, wenn wir uns *streng* in dem Rahmen einer „Logik des Inhaltes“ halten.

Bei den Umfängen oder Klassen lief die Determination hinaus auf eine *Sonderung*, ein Hervorheben von der, den determinirenden Faktoren*) gemeinsamen Unterklasse.

Nicht zu übersehen ist, dass aber bei den Inhalten oder Begriffen die Determination wesentlich eine Knüpfung ist, auf eine *Verbindung* der gegebnen Begriffe hinausläuft:

Wir erhalten den Begriff „weisses Schaf“, indem wir mit den sämtlichen im Begriff Schaf bereits enthaltenen Merkmalen verbinden den Begriff „weiss“, d. i. das Merkmal der weissen Farbe. Und dasselbe Ergebniss erhalten wir notwendig auch, wenn wir mit dem Merkmal der weissen Farbe verbinden die sämtlichen Merkmale des Begriffes Schaf.

Unter den letzteren ist — wohlbemerkt — das Merkmal der „Weisse“ oder weissen Farbe gar nicht enthalten: es gibt ja auch schwarze Schafe! Und der Begriff Schaf soll doch nur die *allen* Schafen gemeinsamen Merkmale enthalten, auch hätten wir nicht nötig, erst zu verbinden, was schon verbunden gewesen wäre. Man kann also eventuell wohl reden von der Weisse eines bestimmten Schafes, oder auch einer Gruppe von solchen, nämlich von der „Weisse“ der *weissen* Schafe. Dagegen ist — bei der allgemeinen Auffassung des Begriffes „Schaf“ — die „Weisse des Schafes“ überhaupt ein Unding, sie postulirt nämlich die „Weisse“ auch für die schwarzen Schafe.

---

*) Wundt bezeichnet diese als „Determinator“ und „Determinand“, durch welchen letzteren Namen jedoch unliebsame Gleichklänge mit dem längst anderweitig eingebürgerten Namen der „Determinanten“ herbeigeführt würden. Eine unterscheidende Benennung beider Faktoren erscheint auf unserm Standpunkt unnötig.

Zu diesem Begriff der „Weisse des Schafes“ kann nun aber Wundt nur gelangen, indem er — anstatt zu verknüpfen — das Merkmal der weissen Farbe *absondert*, hervorhebt — faktisch aus dem Begriffe „weisses Schaf“, vermeintlich indess wol aus dem zur Determination herbeigezogenen Begriff „Schaf“, der jenes Merkmal aber, wie gezeigt, überhaupt nicht enthält.

ζ) Um demnächst auch den verbalen Ausdruck für die identische *Summe* $a + b$ zu gewinnen, müssen wir uns vor allem über die logische Bedeutung der Partikel *„oder“* orientiren.

Es ist in logischer Hinsicht entschieden als ein Misstand zu beklagen, dass die modernen Kultursprachen je nur *ein* Wort für „oder“ besitzen, während doch zur unterscheidenden Darstellung der wesentlich verschiedenen Verhältnisse, welche wir mit dieser einen Konjunktion unterschiedslos anzudeuten pflegen, mindestens *drei* Partikeln erforderlich sein würden. Die lateinische Sprache hat in diesem Betreff feiner empfunden, schärfer unterschieden.

Ein *erstes* ist das *„erklärende“* (auch gleichsetzende, identifizirende, wiederholende, iterative) *„oder“* = *„oder mit andern Worten“* (lateinisch: sive, seu), welches Namen, Redeteile verknüpft, deren zweiter noch einmal das nämliche besagt wie der erste, indess zum Zweck der Verdeutlichung, eventuell schärferen Präzisirung des ersten: in neuer Ausdrucksweise.

Sagen wir z. B.: „Der Bauer *oder* Landmann“ . . ., so ist das angewendete das obige „oder“, wofern wir nur die Klassen „Bauer“ und „Landmann“ als identisch ansehen. Die Wiederholung mit dem andern Worte mag hier den Zweck haben, dem vorzubeugen, dass etwa der Hörer entgegen unsrer Absicht an einen Bauer im Schachspiel, einen Vogelbauer oder anderes denke.

Wie man an dem Beispiel sieht, ist dieses „oder“ schon deshalb Bedürfniss, weil die Sprache manche Homonyme enthält, gleichlautende Namen für ganz Verschiedenes, welche häufig eine unabhängige Entstehungsgeschichte und etymologische Zusammensetzung besitzen, nur zufällig gleich lauten. Je vollkommner eine Sprache, desto weniger freilich dürfte solches in ihr vorkommen.

Aber auch wenn Homonyme gar nicht vorkämen, würde das genannte „oder“ — beziehungsweise ein Äquivalent dafür — doch bleiben müssen, um Bedürfnissen der Wissenschaft zu genügen. Dieses „oder“ dient dazu, eine als Einschaltung, in Parenthese, anzumerkende Definition mit dem begrifflich zu erklärenden nomen zu verbinden und als solche zu kennzeichnen, z. B. „die Kugelfläche *oder* der Ort der Punkte gleichen Abstands von einem festen Punkte“, . . . Am häufigsten kommt

es bei wissenschaftlichen Untersuchungen vor, dass einunddasselbe Objekt als ein, zwei verschiedenen Objektreihen a_1, a_2, a_3, ... und a', a'', ... zugleich angehöriges auch zwei verschiedene Namen erhalten hat: a_1 und a', sodass $a_1 = a'$ bedeutet, während etwa die übrigen accentuirten und mit Suffixen behafteten a lauter verschiedene Objekte bedeuten mögen, und dieser oft folgenschwere Umstand wird, indem man von jenem erstern Objekte als von „a' oder a_1“ spricht, in dem Bewusstsein aufgefrischt erhalten. Es erscheint sonach dieses „oder“ als nahe synonym mit d. i. (das ist), d. h. (das heisst), i. e. (id est) — englisch „viz. (gesprochen: namely)“ — und kommt demselben logisch die Bedeutung $=$, nämlich die Kraft einer in Parenthese ausgesprochenen Identität, identischen Gleichheit zu.

Es wäre vielleicht, weil denn doch „oder m. a. W.“ als zu lang erscheint, ganz angemessen und empfehlenswert, für dieses erste „oder“ das lateinische „sive“ zu verwenden und in die modernen Sprachen einzuführen.

η) Ein zweites ist das „gegensätzliche“, *„ausschliessende“*, *„exklusive“* (auch „disjunktive“) *„oder“* = *„oder aber“* (lateinisch: aut, englisch: or else).

„a oder aber b“ will sagen: *entweder a und dann nicht b, oder b und dann nicht a.*

Wie dieses „oder“ im identischen Kalkul auszudrücken ist, werden wir in § 18, ε) sehen.

ϑ) Das dritte ist das *„einschliessende“* *„inklusive“* (auch „konjunktive“) *„oder“* = *„oder auch“* (lateinisch: vel).

„a oder auch b“ will sagen: *entweder a, oder b, oder beides zugleich.*

Mit diesem letzteren „oder“ werden wir es bei der Übersetzung des Zeichens + der identischen Addition zunächst allein zu thun haben.

Es würden bei den zwei letzten Gattungen von „oder“ sich noch weitere Nüancen unterscheiden lassen, je nachdem es nur unbekannt, jedoch (an sich) bestimmt ist, welcher von den zwei oder drei Fällen eintritt, stattfindet, zwischen denen die Alternative zu stellen ist, d. i. *„oder vielleicht“*, — oder aber völlig unbestimmt gelassen, ganz (oder auch nur teilweise, bedingt, innerhalb gewisser Grenzen) in unser Belieben gestellt, willkürlicher Wahl anheimgegeben ist, für welchen Fall man sich entscheide, d. i. *„oder wenn man will“* — eine Auffassung, auf die gerade „vel“ etymologisch besonders hinweist. Indessen will ich mich begnügen, diese Unterscheidungen nur angedeutet zu haben.

In Bezug auf „oder auch“ scheint freilich der Sprachgebrauch sich nicht genau an die obige Erklärung zu halten, vielmehr dessen Bedeutung

noch über die oben stipulirte hinauszugehen, nämlich oft auch für „oder aber, wenn man will“ herhalten zu müssen.

Der Ausdruck „a oder auch b“ wird gleichbedeutend mit dem „a oder aber b“, das inklusive „oder“ deckt sich mit dem exklusiven, und begreift auch dieses mit, in dem Falle wo die dritte Alternative „a und b zugleich“ ohnehin undenkbar ist, oder aus sachlichen Gründen fortfallen muss. So ist

„Silber oder auch Gold“ = „Silber oder aber Gold“

und wird besser dargestellt durch das kürzere „Silber oder Gold“, weil es nichts gibt, was Silber und Gold zugleich sein könnte, weil die Begriffe „Silber“ und „Gold“ ohnehin „*konträre*“ Gegensätze vorstellen, einander von selbst ausschliessen, disjunkt sind.

ι) Nach diesen Vorbemerkungen wird es verständlich sein, wenn wir nunmehr konstatiren, *dass die identische Summe $a+b$ sich in der Wortsprache stets durch „was a oder auch b ist“ ausdrücken lässt.* Durch „*a oder auch b*“ selber kann die Summe auch in jedem Zusammenhange übersetzt werden mit Ausnahme des Falles, wo sie als *Subjekt* steht; in diesem wäre solches nicht unbedenklich, weil dadurch (vergl. § 15, Schlussanmerkung) eine Verwechselung des Urteils mit einem „disjunktiven“ nahe gelegt würde; ganz unbedingt wird dann auch die Partikel „oder“ viel besser durch die Partikel „*und*“ ersetzt. Also: *Steht $a+b$ als Subjekt, so lese man das Pluszeichen als „und“; andernfalles als „oder“, genauer: „oder auch“.*

Wo $a+b$ als Prädikat steht indessen — und dies bildet eine bemerkenswerte Eigentümlichkeit der Wortsprache — *ist die Ersetzung des Bindewörtchens „oder“ durch „und“ nicht zulässig*, wie sich demnächst und unter $\varkappa$) unzweifelhaft herausstellen wird.

Die Proposition $c \Subset a+b$ lässt sich übersetzen mit „c ist a oder auch b“, resp. mit „alle c sind a oder (auch) b“.

Und ferner ist $a+b \Subset c$ in Worten darzustellen mit „a und b ist c“, „alle a und b sind c“.

[Nicht angängig wäre, dafür zu sagen: „(entweder) a oder b ist c“ und mindestens gewagt: „alle a oder b sind c“, „jedes a oder auch b ist c“.]

Beispiele zu $a+b \Subset c$: „Canadier *und* Indianer sind Amerikaner“, auch: „Canadier *sowie* Indianer etc.“ Die Klassen a und b in dem gewählten Beispiel sind nicht disjunkt, schliessen einander nicht aus, es ist ab hier nicht gleich Null, weil es auch canadische Indianer gibt. Ähnlich noch in diesem Beispiel:

„Adelige *und* Besitzende werden zur Aristokratie gerechnet“.

Anders dagegen im folgenden, wo $ab = 0$ gelten müsste, die Begriffe a und b disjunkt zu nennen wären:

„Gold *und* Silber sind Edelmetalle".

Es wäre zur Not wol angängig, zu sagen:

„Silber, oder auch Gold, ist Metall",

„Adelige, oder auch Begüterte, gehören zur Aristokratie", und ganz gut jedenfalls: „Wer adelig *oder auch* begütert ist gehört dazu", „Was Silber *oder* Gold ist, ist Metall". Desgleichen allenfalls, weil von dem adjektivischen Zahlwort, numeralen Adjektiv „alle" regirt: „Alles Gold oder Silber ist Edelmetall". Besser aber: „Alles Gold *und* Silber etc." Unzulässig dagegen wäre es oder wenigstens von geringerem logischen Gehalte, zu sagen: Entweder Gold oder Silber ist Edelmetall, und darum: „Gold oder Silber, das Gold oder das Silber, ist Edelmetall", eine entschieden schlechte Ausdrucksweise, weil das „und" soviel deutlicher.

Beispiele zu $c \neq\!\!\!\in a + b$.

„Jene Familien sind adelige *oder auch* wohlhabende." Hier können einzelne von den genannten Familien auch zu den unbemittelten Adeligen gehören, andere wohlhabend aber bürgerlich sein.

Einen wesentlich hievon verschiedenen Sinn würde aber die Behauptung darbieten: „Jene Familien sind adelig(e) *und* wohlhabend(e)". Dies würde bedeuten, dass sie sämtlich beides zugleich sind, und wäre mittelst $c \neq\!\!\!\in ab$ auszudrücken, vergl. δ).

Anderes Exempel: „Diese Behauptungen sind richtige *oder auch* falsche". Als Übersetzung von $c \neq\!\!\!\in a + b$ hingestellt, wird dieser Satz besser mit „richtige *oder* falsche" darzustellen sein, mit Unterdrückung des „auch", weil hier a und b einander ausschliessen, $ab = 0$ ist. So aufgefasst ist das Urteil ein rein „analytisches", welches denknotwendig gelten muss von jeder beliebigen Gruppe von Behauptungen: Alle Behauptungen sind entweder richtige oder falsche.

Dagegen würde es mindestens eine Nachlässigkeit des Ausdrucks sein, hiefür zu sagen: „diese Behauptungen sind richtige *und* falsche".

Dergleichen „Nachlässigkeiten" kommen allerdings nicht nur ungemein häufig in der Sprache des gemeinen Lebens, sondern auch bei den besten Schriftstellern vor, und sie entschuldigen sich zu einem Teile durch die Sitte, nach welcher im Verkehr zwischen Personen vorausgesetzt zu werden pflegt, dass der Andere keinen Unsinn rede und man selbst auch dies nicht zu thun beabsichtige. Wenn also eine Äusserung von einer der Parteien, die miteinander in geistigem Verkehr stehen, bei korrekter Deutung nach den Regeln der Schule sowie des überwiegenden Sprachgebrauchs ein offenbarer Unsinn ist, Widersprüche in sich schliesst — vielleicht auch, wenn sie dabei nur als allzu selbstverständlich, „nichtssagend" und darum zwecklos erscheint — so pflegt der andern Partei zugemutet zu werden, dass sie die nächstliegende unter den möglichen ver-

nünftigen Deutungen herausfühle und als den beabsichtigten Sinn jener Äusserung unterlege.

So würde ein Ausspruch: „Diese Behauptungen sind richtige *und* falsche“, wenn wirklich gebraucht, zu verstehen sein in dem Sinne: „einige (die einen) von diesen Behauptungen sind richtige, einige (die andern) sind falsche“ — ein Urteil, welches wir an dieser Stelle noch nicht in der Lage sind, in der Zeichensprache des Kalkuls darzustellen.

Man könnte sogar sagen: „diese Behauptungen sind richtig *und* falsch (zugleich)“, wenn der Sinn derselben nicht unzweifelhaft feststeht: richtig in dem einen Sinne und zugleich falsch in dem andern Sinne, der ihnen etwa untergelegt werden kann. Im Grunde ist dann aber das Subjekt c des Satzes beidemal nicht dasselbe und der Ausspruch nur eine abkürzende Zusammenfassung der beiden Aussagen: „diese Behauptungen (auf die eine Art gedeutet) sind richtig“; „ebendiese Behauptungen (auf die andre Art gedeutet) sind falsch“.

Kraft des oben Bemerkten würde das eingangs gewählte Exempel, i. e. die Aussage: „diese Behauptungen sind richtige *oder auch* falsche“, im Verkehr gebraucht, auch nicht die oben ihr gegebene Bedeutung $c \neq\!\!\!\in a + b$ als ein „nichtssagender“ Ausspruch haben, sondern — mit einem Stich in's Ironische — die Aufforderung an den Gegenpart enthalten, zu prüfen, ob nicht unter seinen Behauptungen doch wol einige falsche sein möchten! Auf diese Interpretation aber würde dabei das „auch“ in „oder auch“ jetzt wesentlich mit hinwirken.

Von solcher Gepflogenheit, von solchen Freiheiten, Lizenzen der Verkehrssprache aber müssen wir hier, um nicht in übergrosse Weitläufigkeiten verwickelt zu werden, nach Möglichkeit absehen. Es wäre überhaupt besser, wenn man sich korrekter Ausdrucksweisen befleissigte. Zudem würden wir sonst genötigt sein, auf die Eigentümlichkeiten und Feinheiten der *speziellen* Sprache, in welcher wir unsre logischen Untersuchungen führen, in einem Umfange einzugehen, welcher sich mit den allgemeineren Zwecken dieses Buches nicht vertrüge, vielmehr einer spezifisch „deutschen“ Sprachlehre anheim fiele. In Bezug auf die Übertragung irgendwelchen sprachlichen Textes in die Zeichensprache der Logik wird darum noch Manches dem Takt und Sprachgefühl des Studirenden zu überlassen sein.

$\varkappa$) Wir haben im Bisherigen — unter δ) und ι) — bereits gesehen, *dass der Partikel „und“ im Subjekt und im Prädikat eine logisch durchaus verschiedene Bedeutung zukommt.*

Der Gegensatz möge noch an einem prägnanten Beispiel sichtbar gemacht werden, welches uns zugleich die vier Schemata der Definitionen (3) illustriren wird. Sagen wir:

„Betrüger (a) *und**) Betrogene (b) sind auf dem Holzwege, ver-

*) Ohne die Tragweite des Ausspruchs zu verändern, kann man dieses „und“ auch durch „oder“ ersetzen, wenn man sich zu der Umschreibung bequemt: Wer ein Betrüger oder ein Betrogener ist, ist etc. Dagegen würde: „Betrüger oder Betrogene sind etc.“ undeutlich sein.

dienen Tadel", oder dergleichen, so will dies freilich sagen einerseits: „Betrüger sind auf unrechtem Wege, sind tadelnswert" und andrerseits: „Betrogene sind auf unrichtigem Wege, verdienen einigen Tadel" — entsprechend dem Schema $(3_+)''$ oder dem zweiten Teil der Definition (3_+) für $a + b \Subset c$; entsprechend — können wir auch sagen — der *ganzen* Definition (3_+) von $a + b$ als Subjekt, soferne die zwei letzten Sätze auch umgekehrt wieder in den ersten zusammengezogen werden dürfen, als mit ihm gleichbedeutend hingestellt werden.

Sagen wir desgleichen:

„Jene Herren sind Betrüger *und* Betrogene" so heisst dies *ganz analog:* „Jene Herren sind Betrüger" und zugleich: „Jene Herren sind Betrogene" — in Illustration des Schema's $(3_\times)''$ für $c \Subset a \cdot b$, sowie auch der ganzen Definition $(3_\times)$ von $a \cdot b$ als Prädikat, indem wieder für die zwei letzten Sätze auch umgekehrt der erste eintreten kann, dieser mit jenen gleichbedeutend ist.

Das beidemal völlig gleichlautende *„Betrüger und Betrogene"* -ist nun aber als Klasse im erstern Fall mit $a + b$, im letztern doch mit $a \cdot b$ zu übersetzen gewesen!

Im Subjekt hat die Konjunktion „und" die Kraft des Plus-, im Prädikat die des Malzeichens.

Es erscheint uns so, wenn wir dieses nun einheitlich zusammenfassen, als die *Hauptaufgabe des Bindewortes „und": die Operationsglieder innerhalb der Definitionen (3) miteinander zu verknüpfen,* Glieder, welche eben bei (3_+), wo sie im Subjekt stehn, additive oder Summanden, bei $(3_\times)$ wo sie im Prädikat stehn, multiplikative, oder Faktoren sind.

λ) Ähnliches gilt auch in Bezug auf die nahe liegende Ausdehnung der Schemata unsrer Def. (3) auf mehr als zwei Operationsglieder (cf. Zusatz 2 zu Th. 13):

$$a \Subset bcd \qquad\qquad | \qquad\qquad a + b + c \Subset d$$

sagt nicht mehr und nicht weniger, wie:

$$a \Subset b, \quad a \Subset c, \quad a \Subset d \qquad | \qquad a \Subset d, \quad b \Subset d, \quad c \Subset d.$$

Etc. Wir können auch diese Theoreme für die Wortsprache in Anspruch nehmen. Darnach lassen sich beliebig viele Sätze

vom selben Subjekt aber mit verschiedenen Prädikaten	mit demselben Prädikat aber verschiedenen Subjekten

jeweils zusammenziehen in einen einzigen Satz mit ebendiesem Subjekt resp. Prädikate und mit einem neuen, *zusammengesetzten*

Prädikate	Subjekte.

Desgleichen können umgekehrt Sätze der letztern Art, d. i. Sätze mit einem auf gewisse Art zusammengesetzten

Prädikat	Subjekte

immer aufgelöst werden in eine Anzahl von als gleichzeitig gültig anzuerkennenden Sätzen vom nämlichen Subjekt resp. Prädikate und den Elementen jenes zusammengesetzten

Prädikats als einzelnen Prädikaten	Subjekts als einzelnen Subjekten

— eine Zerfällung durch welche der Sinn jener Sätze seine Erklärung findet, dieselben „auseinandergesetzt“ werden.

Die „Zusammensetzung“ erfolgt beidemal (sowol bei dem linkerhand als bei dem rechterhand Gesagten) vermittelst der Konjunktion *„und“*, wozu nur zu bemerken ist, dass letztere nicht immer ausdrücklich gesprochen wird. Vielmehr pflegt bekanntlich statt *„a und b und c und d“* in der Regel blos gesagt zu werden:

„a, b, c und *d“*, indem man alle Bindewörter, mit Ausnahme des letzten, durch Kommata (Pausen) ersetzt — und zwar sowol wenn *a, b, c, d* Adjektive (oder auch Relativsätze) als wenn sie Substantive bedeuten. Ähnlich später bei Adverbien. *Exempel:*

„Die Löwen sind Raubtiere, vom Katzengeschlecht und im Oriente heimisch“ heisst: „Die Löwen sind Raubtiere“, „Die Löwen sind vom Katzengeschlecht“, „Die Löwen sind Orientbewohner“ — ein sog. (bejahendes) *„konjunktives“* Urteil.

„Säuren, Basen und Salze sind chemische Verbindungen“ heisst: „Säuren sind chemische Verbindungen“, „Basen sind chemische Verbindungen“ und „Salze sind chemische Verbindungen“ — sogenanntes *„kopulatives“* Urteil.

Der Sinn des erstern Satzes wird durch die drei letzten „auseinandergesetzt“; die drei letztern Sätze ziehen sich in den ersten zusammen.

Es beherrscht, regulirt unser Schema im Grossen und Ganzen den Gebrauch von „zusammengesetzten“ nämlich aus andern abgeleiteten Klassen in Subjekt und Prädikate, führt ihn zurück auf den schon bekannten Gebrauch der sie zusammensetzenden einfachen Klassen.

Indessen sind sowol in Bezug auf das Schema linker- als in Bezug auf dasjenige rechterhand auch Ausnahmen zu konstatiren.

μ) Links tritt eine Ausnahme zutage da, wo das Subjekt konstruirt erscheint mit einem der sog. „unbestimmten Zahlwörter“: *„einige,* etliche, manche, gewisse, wenige, viele“ — auch *„kein* oder keine“, desgleichen schon, wo es versehen ist mit dem unbestimmten Artikel „ein“, oder mit einer Zahlbestimmung überhaupt — vergl. S. 180.

Z. B. die drei Sätze: „Einige Substanzen sind (in Wasser) löslich“; „Einige Substanzen sind (an der Luft) verbrennlich“ und „Einige Substanzen sind (in der Hitze) verflüchtigend“ sagen zusammen doch *weniger* aus, als der eine Satz: „Einige Substanzen sind löslich, verbrennlich und flüchtig“, mit welchem sie ja nach dem allgemeinen Schema ganz gleichbedeutend sein müssten. In jenen drei Sätzen wird nämlich nur gesagt, dass es Substanzen gibt, welche eine beliebige der drei erwähnten Eigenschaften für sich (vielleicht nur getrennt von den übrigen) besitzen. In diesem einen Satze dagegen wird konstatirt, dass es auch Substanzen gibt, die alle drei Eigenschaften auf sich vereinigen (wie dies in der That manchmal, sogar bei Salzen, z. B. beim salzsauren Anilin der Fall ist).

Ähnliches liesse sich bei den folgenden Aussagen durchsprechen:

„Gewisse Pflanzen sind Fleischfresser, Dicotylen und Bewohner tropischer Moore“. „Manche Menschen sind unklug und leichtsinnig“. „Wenige Menschen sind arm und zufrieden“. „Viele sind unwissend und leichtgläubig“. Etc. „Zwei Mann wurden verwundet und gerieten in feindliche Gefangenschaft“ heisst nicht: Zwei Mann wurden verwundet, und zwei Mann gerieten in Gefangenschaft; vielmehr bezieht sich letzteres auf *dieselben* zwei Mann, wie erstres, und weil eben der Name „zwei Mann“ das Subjekt nur unzulänglich bezeichnet, reicht die Wiederholung des Namens nicht aus, es als dasselbe zu kennzeichnen, und muss formell die Ausnahme Platz greifen.

Statt „Einige a sind b *und* c“ zu sagen: „Einige a sind b *oder* (auch) c“ würde dem Inhalt der beiden Sätze: „Einige a sind b“ und: „Einige a sind c“ zwar etwas näher kommen, sich aber auch nicht mit ihm decken. Es wird nicht mehr nötig sein, hierauf zurückzukommen, nachdem diese sog. „*partikularen*“ Urteile im Zusammenhange behandelt sein werden. Lassen wir auch dieselben bis dahin noch möglichst zurücktreten, so durfte doch hier der Hinweis auf die Thatsache nicht unterbleiben, dass sie eine Ausnahme für das linksseitige Schema begründen.

Und ein analoges Verhalten nehmen wir uns hier auch zur Richtschnur in Bezug auf die später ebenfalls allgemein zu behandelnden verneinenden Urteile.

Ein „*negatives*“ Urteil, wie: „Kein Mensch ist fehlerfrei *und* allwissend“ behauptet wiederum weniger, als wie die beiden Sätze: „Kein Mensch ist fehlerfrei“ und „Kein Mensch ist allwissend“ zusammen — welche nur in den Satz: „Kein Mensch ist fehlerfrei *oder* allwissend“ ohne Änderung (Erweiterung oder Einschränkung) des Sinnes zusammengezogen werden könnten.

ν) Eine Ausnahme von unserm Schema rechterhand unter λ) ist formell zu statuiren in folgendem Falle: Wenn das Prädikat eine *Beziehung zwischen* den Individuen der Subjektklasse, oder auch zwischen Unterklassen derselben, konstatirt, so darf $a + b \neq\!\!\!\in c$ *nicht ohne weiteres* in $a \neq\!\!\!\in c$ und $b \neq\!\!\!\in c$ zerfällt werden (und analog bei mehr als zwei

Termen). Z. B. „Buschmänner (Hottentoten, Namaqua) und Neger (Damra, Hererö's) befehden einander“ will nicht sagen: „Buschmänner befehden einander“ und „Neger befehden einander“, sondern: „Die Buschmänner befehden die Neger“ und „Die Neger befehden die Buschmänner“.

„a und b sind *einander gleich*“ heisst natürlich nicht: „a ist *einander gleich*“ und „b ist *einander gleich*“, sondern: „a ist gleich b“ und „b ist gleich a“. Analog: „Der Kläger und der Beklagte verglichen sich“. Etc.

„Die Herren A und B schliessen einen Kauf ab“ heisst: „Herr A schliesst einen Kauf ab“ und „Herr B schliesst einen Kauf ab“, und lässt es offen, ob sie dies *miteinander* thun, wobei der eine Herr als Käufer der andere als Verkäufer erscheinen würde, oder aber *mit dritten Personen.* Im ersten Falle würde das Prädikat zwar eine *Beziehung* zwischen den beiden Individuen der Subjektklasse involviren, und doch die erwähnte Ausnahme *nicht* Platz greifen, weil die gedachte Beziehung im Prädikat *nicht* ausdrücklich *erwähnt* ist.

In allen Beispielen überträgt sich doch wesentlich das Prädikat („befehden“, „gleich sein“, „Kauf abschliessen“ etc.) auch auf die Unterklassen und Individuen der Subjektklasse, und in gewissem Sinne bleibt es immer wahr, *dass, was von der Gattung ausgesagt wird, auch von deren Arten und Individuen gelten, ausgesagt sein soll;* nur die *Beziehung*, welche dem Prädikat beigefügt ist, das „einander“ oder „mit, gegen, durch, etc. einander“ muss bei den Einzelübertragungen des Prädikats auf jene Unterklassen jeweils modifizirt, verschieden ausgedrückt, oder — um einen bei Nicht-Mathematikern in diesem Sinne beliebten Ausdruck zu gebrauchen — muss dabei „differenziirt“ werden.

Regeln aufzustellen, nach welchen in dergleichen Fällen die Zerspaltung des zusammengesetzten Urteils in einzelne einfachere, oder umgekehrt die Zusammenfassung solcher zu einem einzigen korrekt zu erfolgen hätte, liegt uns hier noch ferne. Es wären diese Regeln in die *Logik der Beziehungen überhaupt* zu verweisen. Diese aber, als eine allgemeine Disziplin, stellt einen höheren Teil der Logik vor, demgegenüber wir es hier nur mit den *allerelementarsten* Beziehungen zwischen Klassen oder Begriffs*umfängen* zu thun haben, nämlich mit jener besonderen Gruppe von Beziehungen, deren Erklärung ganz auf den Begriff der Einordnung gegründet werden kann, und bei welchen, wenn von Individuen einer Klasse etwas ausgesagt wird, die übrigen Individuen dieser Klasse dem Geist nicht gegenwärtig zu sein brauchen.

ξ) Die nämliche Bedeutung, wie im Prädikat — nämlich die Kraft des *Mal*-Zeichens — kommt der Partikel *„und"* auch in *Appositionen* zu, d. h. zwischen Adjektiven (ev. auch Relativsätzen) die vom nämlichen Substantiv regirt sind, sowie zwischen Umstandswörtern (Adverbien) die sich auf das nämliche Verbum beziehen. Z. B. „Umsichtige *und* wohlmeinende Freunde rieten ihm ..." = „Freunde, umsichtig und wohlmeinend, rieten ..." Der Satz hat zum Subjekt $(a \cdot b) \cdot c$, d. i. „Freunde c, die umsichtig (a) und wohlmeinend (b) zugleich sind (resp. waren)", nicht aber $(a+b) \cdot c = c \cdot (a+b)$, das ist „Freunde, die umsichtig oder aber wohlmeinend, oder vielleicht beides zugleich sind". Der Deutlichkeit zuliebe würde allerdings das „und" besser unterdrückt und gesagt: „Umsichtige, wohlmeinende Freunde" ... Indess wird des Wohlklangs wegen, bei einer Aufzählung von mehreren Eigenschafts- oder aber Umstandswörtern, die Sprache ungern auf das deren letzte verknüpfende Bindewort verzichten. Z. B. „Opferwillige, reiche und verschwiegene Freunde halfen ihm aus seiner Geldverlegenheit". Es muss gemeint sein: Freunde, die alle jene Eigenschaften zugleich besassen; hätte z. B. auch nur einer derselben geplaudert, so würde die Diskretion der Übrigen nichts genützt haben!

„(Gewohnheitmässiger) Haschīsch(genuss) tötet schnell, elegant und sicher" besagt wieder, dass die Tötung in jeder der genannten Weisen *zugleich* erfolge. Etc.

Als fernere Beispiele mögen noch angeführt sein: „Ein marktschreierisches und schwindelhaftes Unternehmen florirte daselbst". „Die arglosen und unbewaffneten Eingeborenen erschraken sehr". „Gewissenhafte und pflichttreue Beamte werden geschätzt". „Gezogene und weittragende Geschütze ..." „Seltene und teure Mineralien ..." Etc.

Wie *schwankend* übrigens der Gebrauch bei derartigen Sätzen ist, zeigen Urteile wie:

„Taugliche und untaugliche Militärdienstpflichtige haben sich einzufinden". „Unsre aktiven und passiven Mitglieder sind eingeladen" etc. — wo die in die Apposition eingehenden beiden Klassen a und b sich nicht zu $a \cdot b$ sondern zu $a + b$ zusammensetzen. Es wäre hiezu wieder auf das unter ι) Ausgeführte zu verweisen. Ob eine aus den Teilen a und b zusammengesetzte Apposition mit ab oder mit $a + b$ zu übersetzen, ihrem Sinne nach logisch darzustellen ist, würde *ohne sachliche Nebenbetrachtungen* in der That oft dunkel bleiben; über den Sinn von einigen Appositionen wird man wirklich streiten können.

Man lege sich bei dergleichen Übertragungen stets die Frage vor, ob beabsichtigt sei, dass die durch die Appositionsglieder ausgedrückten

Eigenschaften gleichzeitig oder nur einzeln dem regirenden Substantiv (oder Verbum) zugeschrieben werden: im erstern Fall wird ab, im letztern $a + b$ die richtige Übersetzung sein.

Wir haben es in der Wortsprache, wie man sieht, fast immer nur mit *Regeln* zu thun, welche auch Ausnahmen zulassen. Erst im Kalkul werden wir *Gesetze* haben, bei denen Ausnahmen nicht vorkommen.

Im logischen Interesse haben wir vorstehend den Begriff der „Apposition" etwas weiter gefasst, als es in der Grammatik üblich ist, wo derselben zugemutet zu werden pflegt, dass sie — wie bei „Dionysius, der Tyrann von Syrakus", „Polykrates, Herrscher von Samos", etc. — in der Form von Substantiven auftrete.

ο) Wir lernten für identische Produkte und Summen verschiedene Weisen der Übertragung in die Wortsprache kennen.

Die Operationszeichen $\cdot$ und $+$ dürfen aber als *mal* und *plus* nur gelesen werden, wenn die Klassen, welche sie verknüpfen, durch Buchstaben dargestellt sind: Es soll hier nicht dafür plädirt werden, dass man sage: „schwarz mal Pferd gleich Rappe" oder „Pferd mal weiss gleich Schimmel"!

Wird das Malzeichen gar nicht gesprochen, so werden die Sätze wieder legitim, und machen — *im Deutschen* — wegen mangelnder Flexion des Eigenschaftswortes und eventuell dessen hier nicht üblicher Hintansetzung hinter das Hauptwort, nur den Eindruck, von einem Kinde oder etwa einem Böhmaken, einem auf tiefer Kulturstufe stehenden, oder der deutschen Sprache nicht recht mächtigen Ausländer, halbwilden Eingebornen, etc. herzurühren:

„Schwarz(es) Pferd (black horse) ist (=) Rappe"

„Pferd weiss(es) (cheval blanc) = Schimmel" —

— im übrigen vollkommen entsprechend der Schreibung: $ab = c$.

Desgleichen soll nicht „Herren plus Damen" für „Herren und Damen" gesagt werden. Etc.

π) Als Exempel zu Th. 6) führen wir an:

$ab \Subset \begin{cases} a \\ b \end{cases}$. „Gebildete Adelige sind gebildet".

„Besitzende Adelige sind adelig (Adelige)."

„Schwarze Pferde sind schwarz" [oder „Rappen sind schwarz"; „sie sind auch Pferde", etc.].

Hier gibt es nun sowol schwarze als auch nicht schwarze Pferde. Man beachte in dieser Hinsicht den Gegensatz des Beispiels zu den beiden folgenden:

„Der weisse Schnee ist weiss",

„Alle runden Quadrate sind rund" —

welche indess ebenso berechtigt sind, das Th. $6_\times$) zu exemplifiziren.

Das zweite Beispiel fordert die Bemerkung heraus, dass *aller* Schnee weiss sei*), die versuchte Determination des Subjekts „Schnee“ durch das Adjektiv „weisse“ mithin überflüssig. Es gibt hier ab — d. h. b welche a sind — aber keine b, welche nicht a wären.

Das dritte Beispiel provozirt den Einwurf, dass es runde Quadrate überhaupt nicht gebe. [Da es zu einer Kontroverse Anlass geben kann, werden wir auf dasselbe unter ϱ) des § 9 implicite nochmals zurückkommen.]

Die drei kursiv gedruckten Exempel können als *typische* bezeichnet werden, indem — wie leicht zu sehen — jede denkbare Anwendung des Satzes $6_\times$) von der Art eines dieser drei Exempel in beregter Hinsicht sein muss.

$\left.\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right\} \mathrel{\overline{\in}} a + b$. „Die Adeligen sind Adelige oder auch Besitzende [gehören zur Aristokratie]“. „Die Besitzenden ebenfalls“.

„Gleich ist untergeordnet oder gleich“, vergl. den § 1.

Der Satz: „Norddeutsche sind Deutsche“ kann angesehen werden als eine Exemplifikation von $6_\times$) sowol als von 6_+). Ersteres, indem man „Norddeutsche“ versteht als die Klasse derjenigen Deutschen, welche aus dem Norden stammen, resp. nördlich der Mainlinie wohnen. Letzteres, insofern man die Klasse der Deutschen ansehen kann als die identische Summe aus den Klassen der Nord- und der Süddeutschen (einschliesslich der durch die Kolonialerwerbungen hinzugekommenen Reichsangehörigen).

Alle diese Sätze dürften einfach als Selbstverständliche zu bezeichnen sein. — Wir müssen hier eben auch die verschiedenen Arten des Selbstverständlichen registriren. Und dieses hat verschiedene Grade! Wo ist die Grenze des unmittelbar Selbstverständlichen für den einen, wo für den andern Denker oder Studirenden? Im Grunde wird — so hoffen wir — Alles in diesem Buch behauptete als *selbstverständlich* richtig zu bezeichnen sein — nicht minder wie diese elementarsten Betrachtungen so auch die komplizirtesten Theoreme und Lösungen verwickelter Aufgaben, in welche vielleicht schon der begabteste menschliche Intellekt ohne die Technik unsres oder eines ihm gleichwertigen Kalkuls nicht mehr Einsicht zu gewinnen vermöchte.

Zur Entschuldigung dafür, dass wir jeweils auch bei dem einfacheren, dem unmittelbar Selbstverständlichen verweilen, sei der Ausspruch aus Goethe's Wahlverwandtschaften citirt:

*) Der sog. „rote Schnee“ ist es bekanntlich nur *zum Scheine* zufolge der eingestreuten Protococcus nivalis — Algen.

„Es klingt freilich wunderlich, wenn man etwas ausspricht, das sich ohnehin versteht; doch nur indem man sich über das Bekannte völlig verständigt, kann man miteinander zum Unbekannten fortschreiten“.

Andernfalls nämlich trennen sich alsbald die Wege und wird offenbar, dass es doch von einer nicht zu unterschätzenden erziehlichen Wirkung gewesen wäre, dass es geradezu unerlässlich ist, sich erst um die Sicherung von gemeinsamen Ausgangspunkten und Richtungen des Fortschreitens zu bemühen, selbst auf die Gefahr hin, dem Vorwurf der Trivialität zu begegnen.

§ 9. **Fortsetzung. Konsequenzen der Adjungirung einer Nullklasse. Reine Mannigfaltigkeit.**

ϱ) Die Betrachtungen unter π) würden nicht vollständig sein, wenn wir nicht bei Th. $6_\times$) den Fall noch eingehender erörterten, wo $ab = 0$ ist.

Ich wähle dazu ein gewisses typisches Beispiel, ein Beispiel, welches sich zu einem Vorbild für alle Fälle dieser Art besonders gut eignet. Sagen wir:

„*Alle gleichseitigen rechtwinkligen Dreiecke sind gleichseitig*“

so gibt dies, wenn als Klasse „gleichseitig“ mit a bezeichnet und „rechtwinkliges Dreieck“ oder „Rektangel“ $= b$ genannt wird, eine Illustration zu dem Satze $6_\times$) $ab \not\in a$.

Sind nun die Dreiecke, von welchen wir sprechen, solche auf der Kugelfläche, sind es „*sphärische*“ Dreiecke, so *gibt es**) Individuen der Klasse $a \cdot b$, welche ja die „gleichseitigen rechtwinkligen (Kugel-)Dreiecke“, oder kürzer gesagt, die „gleichseitigen (sphärischen) Rektangel“ bedeuten soll. Aus der Sphärik nämlich gleichwie aus der Anschauung ist es bekannt, dass jedes dreirechtwinklige Dreieck als der achte Teil der ganzen Kugelfläche zugleich auch ein gleichseitiges (nämlich dreirechtseitiges) ist. Hier ist dann $a \cdot b$ *nicht* gleich 0, und haben wir ein Beispiel, welches sich den früher unter π) angeführten als gleichartig an die Seite stellt.

Sprachen wir dagegen von geradlinigen oder *ebenen* Dreiecken, so wird $a \cdot b$ jetzt ein Name sein, welcher „nichts“ bedeutet; es ist ein sinnloser oder leerer Name geworden, eine Klasse vorstellend, welche *kein* Individuum in sich schliesst, sintemal es gleichseitige rechtwinklige ebene Dreiecke bekanntlich nicht geben kann.

Ob man nun auch für ebene Dreiecke den obigen Ausspruch

*) Es ist hier nebensächlich, ob wir diesen Ausspruch auf die Mannigfaltigkeit 1 des Wirklichen, Realen, oder auf die noch umfassendere des überhaupt zu denken Möglichen beziehen.

gelten lassen wird?? Man könnte darüber streiten, und es wäre das buchstäblich ein Streit „um nichts und wieder nichts", denn auch die fragliche Aussage ist nichtssagend, sie bezieht sich auf nichts.

Wie man solches im gemeinen Leben halten mag, ist uns gleichgültig; ich meine, man sollte (auch da) sie gelten lassen, man sollte ihr wenigstens eine sozusagen „*formale* Gültigkeit" zuerkennen, in Anbetracht, dass in ihr dem Subjekt, den gleichseitigen ebenen Rektangeln, nur eine bei demselben *schon vorausgesetzte* Eigenschaft (der Gleichseitigkeit) zugesprochen, beigelegt wird.

Hier aber, in dem Rahmen unsrer Disziplin der Algebra der Logik, *sind wir* jedenfalls *verpflichtet, die* gedachte *Aussage als richtig anzuerkennen.*

Diese — ja eine noch viel weitergehende — Verpflichtung ist eine Wirkung, notwendige Folge der seiner Zeit von uns vollzogenen und durch die Vorteile, die sie gewährt, ja bereits motivirten *Adjungirung der Null* zu unsrer Mannigfaltigkeit, Folge der Aufnahme des Nullgebietes unter die Gebiete, der Zulassung einer Nullklasse zu den Klassen, der Hinzuziehung des Begriffs des „Nichts" zu den sonstigen Begriffen des Menschengeistes.

Nach Def. $(2_\times)$ ist $0 \Subset a$, was auch a für ein Gebiet, für eine Klasse bedeuten möge. Wenn also ab die 0 bedeutet, so ist in der That $ab \Subset a$.

Das „Nichts" ist sogar *Subjekt zu jedem Prädikate:* das Nichts ist schwarz; das Nichts ist zugleich auch nicht schwarz; denn die Nullklasse ist in jeder Klasse mit enthalten. Wenn sie „nichts" betrifft, kann eine Aussage niemals falsch sein, und wenn sich Aussagen auf gar nichts beziehen, so ist auch kein Widerspruch zwischen diesen Aussagen möglich.

Den in diesem Absatze ausgesprochenen allgemeinen Sätzen wird später doch eine gewisse Einschränkung nachträglich zu geben sein; indem es nötig fällt, die Mannigfaltigkeit 1, aus welcher jene Gebiete, Klassen oder Prädikate nach Belieben herausgehoben werden dürfen, in gewissem Sinne *nach oben* zu beschränken, indem sich herausstellt, dass diese Mannigfaltigkeit eine „reine" bleiben, d. i. eine gewisse Beschaffenheit bewahren muss, worüber ψ, χ) zu vergleichen.

In Bezug auf unser typisches Exempel kann man sich nunmehr auch vorstellen, dass etwa die Natur zu untersuchender Dreiecke — ob sie ebene, ob sphärische — von vornherein unbekannt sei. Die in dem Exempel als gültig hingestellte Aussage mag dann vielleicht ein Glied bilden in einer Kette von Überlegungen, die den Zweck haben, zu ermitteln, von welcher Natur die fraglichen Dreiecke wirklich sein müssen. Wird dabei nach hier

entwickelten logischen Prinzipien konsequent verfahren, so kann die erwähnte Aussage als Prämisse zu weiteren Schlussfolgerungen nun ganz unbedenklich mitverwendet werden, und ist kein Grund ersichtlich, weshalb gedachte Untersuchungen nicht ihren Zweck erreichen dürften.

So kann man z. B. auf die Behauptung, dass gedachte Dreiecke gleichseitig sind, nach bekanntem Satze den Schluss gründen, dass sie auch gleichwinklig sein, ihre Winkelsumme mithin drei Rechte betragen müsse, womit dann die Frage entschieden ist und die ebenen Dreiecke ausgeschlossen erscheinen.

σ) Es wurde in § 1 ausgeführt, dass das Subsumtionszeichen $\Subset$ der *Kopula* entspricht, und, wenn a und b Klassen vorstellen, die Subsumtion $a \Subset b$ mit „a ist b“ resp. „alle a sind b“ wiederzugeben sei.

Die seitdem mit Def. $(2_\times)$ von uns vollzogene Zuziehung, Adjungirung der „Null“ zu den Gebieten und Klassen hat nun im Gefolge, dass auch diese Bemerkung eine Modifikation nachträglich erfahren muss, wenigstens für die Sprache des gemeinen Lebens.

Hat a den Wert 0, so gilt die Subsumtion $a \Subset b$ ohnehin, was auch für eine Klasse b immer bedeuten möge. Diese Subsumtion $0 \Subset b$ lehrt uns dann nichts besonderes, sie wird (hinsichtlich des b) zu einer geradezu „nichtssagenden“.

Der Fall $a = 0$ ist nun der, wo die Klasse a überhaupt keine Individuen enthält, eine leere ist, was die Sprache mit: „*Es gibt keine a*“ ausdrücken wird.

Diesen Fall muss man nunmehr, wenn ausgesagt wird, dass $a \Subset b$ sei, stets mit als möglich zugelassen denken; daher ist die Subsumtion:

$$a \Subset b$$

fortan zu lesen:

„*Alle a, sofern es welche gibt, sind b*“

sie ist m. a. W. zu interpretiren als:

Entweder: es gibt keine a,

Oder, wenn es welche gibt, so sind sie alle b.

Im Rahmen der gegenwärtigen Disziplin wird es zwar [mit einem kleinen unter υ) zu erwähnenden Vorbehalt] ganz unbedenklich sein, auch bei der einfacheren Fassung zu bleiben und nur zu sagen: „a ist b“ resp. „alle a sind b“, wie früher.

Für die Verkehrssprache aber wäre hiezu nicht zu raten! Indem hier stillschweigend die Unterstellung hinzutritt, dass Derjenige, der etwas sagt, auch wirklich (über) etwas aussagen wolle, so wird eine auf „alle a“ bezügliche Aussage allgemein so aufgefasst, dass sie das Subjekt als existirend annehme oder hinstelle.

Wird etwa gemeldet: „Alle Versuche seien fehlgeschlagen“, so wäre in der Auffassung des Publikums damit implicite auch gesagt, dass wirklich Versuche gemacht worden. Und wenn jemand, der niemanden beraubte, etwa von sich sagen wollte: „alle von ihm Beraubten seien wohlhabend gewesen“, der würde sich einer argen Selbstverleumdung schuldig machen. Etc. Vergl. hiezu noch weiter unten φ).

Immerhin beruht auf diesem Umstand eine Art von Witz, eventuell bewusster Täuschung oder Lüge, welche *vor dem logischen Gewissen* noch am ehesten zu entschuldigen (auch vor dem *mathematischen*, sofern eben in der Mathematik eine Anzahl, die der a, auch gleich 0 gedacht werden darf).

Wer sich im Alltags-Leben die Subsumtion $0 \Subset a$ zur Verhaltungsregel wählen wollte, würde sicherlich bald der Wortklauberei, Sophistik, Spitzfindigkeit geziehen werden, und dieser wollen wir hier nicht das Wort reden.

Aber „Eines schickt sich nicht für Alle“. In der Wissenschaft ziemt es sich, schärfer zu unterscheiden, stillschweigende Voraussetzungen jeweils zu ausdrücklichen zu erheben, dann aber, was gar nicht gesagt worden, auch nicht als behauptet hinzustellen.

Auch die gewöhnliche Verkehrssprache kann den Begriff des „nichts“ oft nicht entbehren; sie zieht ihn zeitweilig allerdings heran, ohne jedoch auf sein Mitunterlaufen immer und überall gefasst zu sein. Sie verhält sich in dieser Beziehung der identischen Null gegenüber ungefähr so, wie die arithmetische Analysis sich verhält gegenüber der „absoluten Unendlich“, welche hier ebenfalls zeitweilig herangezogen wird, um den Mangel eines Zahlenwertes äusserlich zu verdecken, den Ausfall einer Zahl zu maskiren, welche m. a. W. hier wesentlich die Rolle eines Lückenbüssers („stopgap“) spielt, und dennoch nie als eine wirkliche Zahl angesehen und behandelt werden darf, dem Zahlengebiete schon darum nicht einverleibt werden kann, weil sie die Regeln der Arithmetik über den Haufen werfen würde.

Im identischen Kalkul dagegen wird die identische Null in ähnlicher Weise überall zugelassen erscheinen, wie in der Mathematik bei allgemeinen Untersuchungen im Zahlengebiete die arithmetische Null von vornherein mitbegriffen zu werden pflegt.

Dieser Umstand begründet einen Hauptunterschied zwischen der Sprache der Logik und der des gemeinen Lebens.

τ) Es hat die Zuziehung der Null auch noch die weitere Folge, dass wir die sog. *„Existenzialurteile“*, Sätze wie *„Es gibt a's“* nicht mehr (wie in § 2 noch provisorisch geschah) vermittelst einer Subsumtion darzustellen in der Lage sein werden. Man kann freilich eine Klasse bilden: r, die Klasse des Realen, die alles umfassen soll, was in Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft (oder, wenn man will, auch

in der Gegenwart allein) dem Bereich der Wirklichkeit angehört, was existirt. Wenn es a's gibt, so ist dann $a \mathrel{\overline{\in}} r$. Das letztere aber ist, kraft Def. ($2_\times$), auch richtig, wenn es keine a's gibt; es schliesst die Subsumtion den Fall $a = 0$ nicht aus.

Wie Existenzialurteile selbst in unsrer Zeichensprache angemessen darzustellen sind, werden wir später sehen (§ 33).

Einstweilen sind wir nur im stande die *Verneinung eines Existenzialurteils* darzustellen, indem, wie gezeigt, die Gleichung $a = 0$ [oder, nach Th. $5_\times$) auch die Subsumtion $a \mathrel{\overline{\in}} 0$] ausdrücken wird: „Es gibt *keine* a's". Dies wäre z. B. richtig, wenn a die Klasse der „Zauberer, Hexen und Gespenster", oder auch wenn es die der „runden Quadrate" bedeutete.

υ) Zur Stelle ist über die verbale Einkleidung der mit Def. (2) als allgemeine Formel eingeführten Subsumtionen:

$$(2_\times) \qquad 0 \mathrel{\overline{\in}} a \quad \text{und} \quad a \mathrel{\overline{\in}} 1 \qquad (2_+)$$

überhaupt noch einiges zu bemerken.

Wir sahen: 0 bedeutet „nichts"; das Zeichen $\mathrel{\overline{\in}}$ entspricht der Kopula, und muss mit „ist" in die Wortsprache übertragen werden; endlich a mag jedes beliebige*) Prädikat sein — sagen wir beispielsweise „schwarz".

Die Subsumtion $0 \mathrel{\overline{\in}} a$ ist unzweifelhaft richtig, weil die Klasse aller der Dinge, welche wir „schwarz" nennen würden, ausser diesen nichts enthält, also wie ich sagen darf, noch obendrein auch „nichts" enthält.

Wenn wir diese Subsumtion aber, dem vorausgehenden gemäss, mit „Nichts ist schwarz" übersetzen wollten, so würden wir gleichwol eine falsche Aussage erhalten. Denn letztere würde ja den Sinn haben: „Es gibt nichts Schwarzes"; sie würde die Verneinung eines der oben erwähnten Existenzialurteile sein, welche in Formeln nicht die Subsumtion, sondern nur die *Gleichung* $0 = a$ oder $a = 0$ ausdrückt.

Die Subsumtion hatten wir demnach falsch übersetzt, und dieses weist darauf hin, dass für unsre „extremen" Fälle die Übersetzungsregeln eine Ausnahme haben, und haben müssen, indem über den Sinn des *regelrechten* Übersetzungsergebnisses die Wortsprache bereits anderweitig verfügt hat.

Dies aber lässt sich nicht nur erklären sondern auch rechtfertigen. Bei der Aufstellung ihrer Regel, nämlich indem sie es zur Gewohnheit

*) Wie schon angedeutet, mit einer Einschränkung, welche unter ψ) auseinandergesetzt werden wird.

werden liess, mittelst der Kopula die *Einordnung* des Subjekts unter das Prädikat auszudrücken, hat die Wortsprache auf jene äussersten Fälle (des Subjekts 0 oder Prädikates 1) überhaupt nicht ihr Augenmerk gerichtet. Indem sie die Kopula die logische Bedeutung „$\Subset$" gewinnen liess, durfte sie jene Fälle beiseite lassen.

Sie musste ja in der That darauf bedacht sein, die Mittel auszubilden, vermöge deren sich von irgend etwas (nicht aber von nichts) etwas aussagen lasse, und zwar etwas Bedeutsames, nicht aber etwas Selbstverständliches und vollkommen Belangloses.

Als ebenso zweck- und nutzlos, wie selbstverständlich, erscheint aber für das gemeine Leben sowol, wie für die verschiedensten Spezialwissenschaften jegliche Äusserung von dem Sinne oder der Form einer der beiden Subsumtionen der Def. (2). Dass in irgend einer Klasse unter Anderem auch „nichts" mitenthalten sei, oder dass irgend eine Klasse von Dingen in Allem mitenthalten sei, dieses hervorzuheben dürfte nicht leicht irgendwo von Wert sein. Und zwar kann dies zugegeben werden ganz unbeschadet dessen, dass für die Technik des Kalkuls jenen Subsumtionen (2) doch eine ganz wesentliche Mission zufällt, dass ihre Unentbehrlichkeit hiefür bereits erkannt wurde, und wir allmälig vollends sehen werden, wie sie ihre Mission daselbst glänzend erfüllen (die: Ausnahmslosigkeit zu ermöglichen).

Für die gedachten beiden Grenzfälle nun, wo die Einordnung also selbstverständlich und darum nichtssagend sein würde, hat die Wortsprache sich vorbehalten, der Kopula die Kraft des *Gleichheitszeichens* zu verleihen.

In Bezug auf $(2_\times)$ — dass eine Aussage „Nichts (0) ist schwarz (a)" sagen will: $0 = a$ und nicht $0 \Subset a$ — haben wir dies bereits auseinandergesetzt.

Dasselbe trifft auch bezüglich (2_+) zu. Geben wir etwa am Ende einer Aufzählung eines Berichtes die Versicherung ab: „Dies (das Bisherige, Aufgezählte, Referirte a) ist Alles", so wollen wir damit sicherlich nicht blos aussprechen, dass das Bisherige (a) in allem Denkbaren (1) mitenthalten sei neben — Gott weiss noch was — Anderem, also dass $a \Subset 1$ sei, sondern wir wollen versichern, dass die fragliche oder erwartete Klasse resp. Mannigfaltigkeit von Objekten oder Ereignissen, umfassend z. B. alles Dasjenige, dessen Kenntniss für die richtige Beurteilung der Sachlage wesentlich ist, durch das Aufgezählte, Referirte gerade erschöpft sei — in unsrer Zeichensprache also, dass $a = 1$ sei, wenn wir in der That jene ganze Mannigfaltigkeit mit 1 bezeichnen.

Bedeutet nun also a irgend eine Klasse, wie „schwarz“ oder „Gold“, etc., so dürfen wir Subsumtionen wie

$$0 \not\Subset a, \qquad a \not\Subset 1$$

jedenfalls nicht mit:

„Nichts ist Gold“ resp. „Gold ist Alles“

übersetzen, obgleich 0 nichts und 1 alles Denkbare bedeutet, resp. auf unserm gegenwärtigen Standpunkte noch bedeuten kann.

Die Übersetzung dieser Subsumtionen in die Wortsprache ist überhaupt *unnötig*.

Will man sie aber dennoch ausführen, so ist etwa, wie oben (unter ϱ), die erstere mit „Das Nichts ist Gold, ist schwarz, etc.“ wiederzugeben — vergleiche „das *goldene Nichts*chen und das silberne Warteeinweilchen“ des Volkswitzes im deutschen Sprichwörterschatze.

Bei geeigneter Betonung würde sich sogar die oben zurückgewiesene, refutirte Aussage aufrecht erhalten lassen. Falsch ist sie nur in der *gewöhnlichen* Betonung: „*Nichts* ist schwarz“, welche an den Tonfall des Daktylus: — ◡ ◡ wenigstens erinnert. Richtig dagegen (in unserm Sinne) wäre sie mit der ungewöhnlichen Betonung: „Nichts...ist *schwarz*“ (es ist ja ebensogut auch weiss) mit dem Tonfall des Amphimacer oder Kretikus: — ◡ —, und einer Pause hinter der ersten Länge.

Wird 0 anstatt durch „nichts“, durch ein Produkt dargestellt, das 0 zum Werte hat, so kann die gewöhnliche Ausdrucksweise wieder Platz greifen. Da z. B. die Klasse „rundes Quadrat“ $= 0$ ist, so wäre es wenigstens unverfänglich zu sagen: „alle runden Quadrate sind schwarz“ und dergl.

Am besten sage man etwa: das Nichts ist in Allem, so auch in der Klasse a noch mitenthalten.

Die zweite Subsumtion: $a \not\Subset 1$ liesse sich übersetzen mit: „Gold ist etwas“, „Schwarze Dinge sind etwas“, etc. indem das unbestimmte Pronomen „etwas“ die Klasse vorstellt, die alles Denkbare unter sich begreift, *alles, wovon man überhaupt zu reden vermöchte.*

Es würde diese allumfassende Klasse entsprechen dem von Boole in die Logik eingeführten „Universum des Diskussionsfähigen“ (universe of discourse), Jevons' und R. Grassmann's „Totalität“ oder „All“.

Ob es aber angängig ist, eine so umfassende Klasse überhaupt zu bilden, die unter anderm auch die Ableugnung ihrer eigenen Zulässigkeit, die Verneinung ihrer Existenz mitenthalten müsste, ob wir diese hier als Bedeutung unsrer identischen 1 (Peirce's ∞) beilegen dürfen, soll gleich nachher noch eingehender untersucht werden.

φ) Nach dem Bisherigen dürfte es beinahe überflüssig sein, noch besonders darauf hinzuweisen, dass auch die Subsumtion

$$0 \not\Subset 1$$

nicht mit „Nichts ist Alles“ in die Wortsprache übertragen werden darf, und zwar aus doppeltem Grunde. Desgleichen darf sie nicht mit „Nichts ist etwas“ wiedergegeben werden (aus einfachem Grunde), weil hier wenigstens noch das Subjekt „nichts“ — wie vorhin noch obendrein das Prädikat „alles“ — bewirkt, dass der Kopula „ist“ die assertorische Kraft des *Gleichheits*zeichens nach dem Sprachgebrauch zukommt, statt derjenigen der Einordnung.

Will man jene Subsumtion durchaus in Worte fassen, so sage man etwa: „Das Nichts ist auch in der Gesamtheit mitenthalten“.

Wir glaubten mit den Betrachtungen unter ϱ), υ) und φ) so eingehend bei einer verhältnissmässigen Kleinigkeit, anscheinenden Bagatelle verweilen zu sollen, weil in Bezug auf sie und ihre Auffassung ein schroffer Gegensatz der Meinungen unter den Anhängern verschiedener philosophischer Systeme zutage getreten ist und noch immerfort gestritten wird.

Von Herbart, dem auch Sigwart beitritt, ist in Abrede gestellt, dass die Wortsprache die Existenz des Subjektes unterstelle, und wird von letzterem als Beleg das Urteil angeführt: „Der Pegasus ist geflügelt“. Allerdings will mit diesem und in vielen ähnlichen Urteilen nicht ausgesprochen sein, dass es *in der Mannigfaltigkeit des Wirklichen* überhaupt Individuen der Subjektklasse gebe, hier also: dass wirklich ein Pegasus existire. Dennoch aber wird mit dem Urteile ein Subjekt als wirklich vorhanden gesetzt.

Das logische Subjekt fällt nur hier nicht zusammen mit dem grammatikalischen Subjekte. Wir haben den logischen Gehalt des als Beispiel hervorgehobenen Urteils schon in § 2 dahin erläutert, dass dasselbe lediglich behaupte: die *Vorstellung des Pegasus ist* enthalten in der Klasse der Vorstellungen von geflügelten Wesen, und *jene Vorstellung ist eine wirkliche*, hat eine historische Existenzberechtigung in einer gegebenen Mannigfaltigkeit von mythischen Wesen.

Wer diese Wirklichkeit leugnen, die Subjektklasse hier als eine leere hinstellen wollte, der müsste als einen vollberechtigten Ausspruch auch das Urteil zugeben: „Der Pegasus ist *ungeflügelt*“ — oder, sagen wir z. B. auch „grün“ — kurzum mit jedem beliebig gewählten Prädikate!

Auch *der* Umstand bildet nur eine Bestätigung unsrer Thatsache: dass der Glaube an die Existenz so mancher Subjekte oder auch Objekte — sagen wir z. B. des leibhaftigen Teufels, eines tierisch-magnetischen Fluidums etc. — eben dadurch erzeugt und gefestigt zu werden pflegt, dass von früh auf in der Umgebung des heranwachsenden Menschen vielfach über dieselben ausgesagt, prädizirt wird — ein Verfahren, das als ein weitverbreiteter Missbrauch dem Aufmerksamen nicht entgehen kann.

Sehr Treffendes über die hier berührte noch nicht abgeschlossene Kontroverse sagt auch Venn[1] p. 126 sqq., welcher, die Frage wol am gründlichsten behandelnd, derselben ein eignes Kapitel widmet. — Aussagen, Prädikationen über gar nicht existirende Subjekte spielen gerade in den Wissen-

schaften eine höchst hervorragende Rolle — wie z. B. in der Mechanik die Sätze über die *„vollkommen"* starren Körper. Solche Sätze haben wesentlich die Bedeutung von *Schlüssen*, welche an die Voraussetzung der absoluten Starrheit eines Körpers die betreffenden Behauptungen als Folgerungen knüpfen; ihr logisches Subjekt ist eben diese Hypothese (der vollkommnen Starrheit eines Körpers) und erscheinen damit auch sie als Urteile über Urteile, und somit über Existirendes.

Wenn es demnach mit der Wortsprache sich doch so, wie wir oben sagten, verhält, so sind wir aber an deren Brauch in unsrer Disziplin nicht gebunden.

χ)*) Am letzten Beispiel, der Subsumtion $0 \Subset 1$, lässt sich übrigens schon darthun, dass es in der That unzulässig ist, unter 1 eine so umfassende, sozusagen ganz offene Klasse, wie das oben geschilderte „Universum des Diskussionsfähigen" (von Boole) zu verstehen.

Wie ausgemacht ist, sollte nämlich 0 in *jeder* Klasse, welche aus der Mannigfaltigkeit 1 herausgehoben werden kann, mitenthalten sein, sodass $0 \Subset a$ gilt, 0 sollte Subjekt zu *jedem* Prädikate sein.

Verstünden wir nun unter *a die Klasse derjenigen Klassen der Mannigfaltigkeit, welche gleich* 1 *sind*, [und dies wäre ja, wenn wir alles Denkmögliche in die Mannigfaltigkeit 1 hereinziehen dürfen, gewiss erlaubt], so umfasste diese Klasse wesentlich nur *ein* Objekt, nämlich das Symbol 1 selbst, beziehungsweise das Ganze der Mannigfaltigkeit, die seine Bedeutung ausmacht — *ausserdem aber auch „nichts" mithin* 0. Da nun also 1 und 0 die Klasse derjenigen Objekte ausmachten, welche gleich 1 zu gelten haben, so müsste nicht nur: $1 = 1$, sondern *auch:* $0 = 1$ anerkannt werden. Denn ein Prädikat, welches einer Klasse zukommt (hier das Prädikat, identisch gleich 1 zu sein), muss auch jedem Individuum dieser Klasse zukommen, gemäss Prinzip II.

In einer solchen Mannigfaltigkeit, wo $0 = 1$ gälte, würde jede Möglichkeit der Unterscheidung zweier Klassen oder auch Individuen von vornherein ausgeschlossen sein; hier wäre dann alles „wurst".

Indem man die Gleichung $0 = 1$ nach später bewiesenen Regeln beiderseits mit a, daneben auch mit b multiplizirte [gemäss Th. $16_\times$), $21_\times$) und $22_\times$)] sodann die Ergebnisse $0 = a$ und $0 = b$ [gemäss Th. 4)] miteinander vergliche, würde sich die Gleichung $a = b$ *als allgemeine Formel* ergeben, gültig, was auch a und b für Klassen oder Individuen vorstellen mochten! Als allgemeine Formel hingestellt ist solche Gleichung jederzeit ein Unsinn.

Wir werden die Gleichung:

$$0 = 1$$

*) Was unter χ) hier folgt ist wol als zu subtil für den ersten Unterricht weniger geeignet; es wäre mit jugendlichen Anfängern — in der Schule z. B. — zu überspringen.

nur anzuerkennen vermögen für eine *völlig leere* Mannigfaltigkeit 1, eine Mannigfaltigkeit, welche selbst *gar kein* Element oder Individuum enthält — und eine solche schliessen wir von unsern Betrachtungen grundsätzlich aus.

Die vorstehende Überlegung würde — mutatis mutandis — auch statthaft gewesen sein, wenn man in ihr das Symbol 1 von Anfang an durch den Namen irgend einer speziellen Klasse b der erstbetrachteten Mannigfaltigkeit ersetzt hätte; sie würde ebenso auf die absurde Gleichung $0 = b$ geführt haben. Und zwar wie folgt: Es gelte $0 \Subset a$ für *jede* Klasse a. Versteht man unter a die Klasse derjenigen Gebiete, welche gleich b sind, so muss diese neben b (welches ja von allen Gebieten ganz allein gleich b ist) auch die identische 0 enthalten, was eben die Subsumtion $0 \Subset a$ behauptet. Dann muss also auch 0 ein solches Gebiet sein, welches gleich b ist; es folgt (im Widerspruch mit Obigem) so: $0 = b$ — für *jedes* b!

Diese Überlegungen zeigen, *dass Boole's universelle Interpretation der* 1 in der That *eine zu weitgehende gewesen.**)

Im eigentlichen Gebietekalkul, für die Gebiete a einer Mannigfaltigkeit 1 von Punkten z. B., lässt sich die Subsumtion $0 \Subset a$, wie wir schon sahen, ganz unumschränkt aufrecht erhalten.

Doch ist nun die Frage zu beantworten, inwiefern sich die Gesetze des Kalkuls auch auf die Mannigfaltigkeit, gebildet aus *allen möglichen* Klassen, aus *irgendwelchen Objekten des Denkens* werden übertragen lassen.

Es ist gezeigt, dass es unzulässig ist, diese Mannigfaltigkeit 1 vollkommen bestimmungslos, sie gänzlich uneingeschränkt oder offen zu lassen, indem sich gewisse denkmögliche Formulirungen der Prädikatklasse a schon in $(2_\times)$ als unzulässig erwiesen. Wie muss sie nun aber beschaffen sein, damit auf sie angewendet, die Regeln des Kalkuls, insbesondre die Def. $(2_\times)$, zu Widersprüchen in sich nicht mehr führen können?

Ich will die Antwort auf diese schwierige Frage zu geben versuchen.

Wir haben es zunächst zu thun mit einer Mannigfaltigkeit von irgend welchen „Dingen" — Objekten des Denkens überhaupt — als „*Elementen*" oder „*Individuen*". Diese mögen (sämtlich oder auch zum Teil) von vornherein gegeben, oder aber (zum andern Teil oder sämtlich) nur begrifflich irgendwie bestimmt sein. Denn völlig bestimmungslos dürfen sie, wie schon gezeigt, nicht bleiben.

Damit die Symbole 0 und 1 etc. nach den Regeln des Kalkuls in dieser Mannigfaltigkeit verwendbar seien, wird dieselbe hinsichtlich

*) Bei Abfassung meines „Operationskreis etc." hatte ich diesen Umstand noch nicht beachtet.

der Art, wie ihre Elemente gegeben oder auch begrifflich bestimmt sein dürfen, gewisse Anforderungen zu erfüllen haben.

Als eine erste Anforderung haben wir schon in § 7 unter Postulat (1_+) *die* namhaft gemacht: dass die Elemente der Mannigfaltigkeit sämtlich *vereinbar*, miteinander „*verträglich*“ sein müssen. *Nur in diesem Falle bezeichnen wir die Mannigfaltigkeit mit* 1. Im andern dagegen ziehen wir für dieselbe den Namen ∞ vor als des einzigen (Zahl?)-Zeichens aus dem Bereich der Arithmetik, welches daselbst eine *definitiv* unerfüllbare Forderung (die: mit 0 multiplizirt 1 zu geben) ausdrückt (wogegen die anfängliche Unmöglichkeit andrer Symbole, wie -1, $i = \sqrt{-1}$, etc., sich bekanntlich durch Erweiterung des Zahlengebiets beheben liess), als des spezifischen *Symboles*, also, *der Unmöglichkeit.* [Ein Exempel für letztere wird in Gestalt einer Mannigfaltigkeit von miteinander unverträglichen Funktionalgleichungen in Anhang 5 gegeben.] Eine Mannigfaltigkeit, welche demnach ∞ zu nennen wäre, lassen wir im „*identischen*“ Kalkul ausser Betracht.

Sind die Elemente der Mannigfaltigkeit vereinbar, so lassen sich in derselben kollektiv *nach Belieben* Systeme, „*Gebiete*“ aus ihren Elementen zusammensetzen, in ihr abgrenzen, es lassen sich m. a. W. auch zwecks distributiver Verwendung irgendwie *Klassen* von Individuen aus ihr hervorheben.

Und insbesondre gehören auch ihre Individuen selbst mit zu den Klassen, welche wir dann, wenn sie eben zu nur *einem* Individuum zusammenschrumpfen, als „monadische“ oder „*singuläre*“ Klassen bezeichnen mögen.

Durch jenen Prozess der beliebigen Hervorhebung von Klassen von Individuen der ursprünglich gedachten Mannigfaltigkeit wird nun (im Allgemeinen) eine *neue*, noch viel umfassendere Mannigfaltigkeit entstehen, geschaffen, nämlich die der Gebiete oder Klassen der vorigen.

So ist die *Mannigfaltigkeit der Punktgebiete* der Tafelfläche eine viel umfassendere als die *Mannigfaltigkeit ihrer Punkte;* denn während die letztere als Gebiete, Punktklassen, nur irgend welche Flächen enthält, umfasst die erstere ausser diesen selben Flächen (als ihren „singulären“ Klassen) auch noch alle denkbaren Gattungen von Flächen, z. B. die Gattung der kreisförmigen Flächen, als Klassen in sich. Jedes Individuum der letztern Mannigfaltigkeit ist ein *Punktgebiet*, eine Fläche, die auch in Linie, Punktgruppe oder Punkt zusammenschrumpfen kann. Jedes Individuum der erstern ist eine *Gattung von Punktgebieten*, die ebenso auch in ein einzelnes Punktgebiet schrumpfen kann und notwendig auch alles vorige mit in sich schliesst.

Die neue Mannigfaltigkeit könnte man als die „zweite Potenz“ der vorigen — besser wohl als deren *„erste abgeleitete* oder *derivirte* Mannigfaltigkeit“ bezeichnen.

Von ihr liesse sich abermals eine (eventuell) neue, noch umfassendere Mannigfaltigkeit „ableiten“, welche als die derivirte der ersten derivirten oder als die *zweite abgeleitete* Mannigfaltigkeit der ursprünglichen zu bezeichnen wäre. Und so fort.

Wie aus den vorausgeschickten Überlegungen zu ersehen ist, darf nun die Bedeutung der identischen 1 sich von der ersten jedenfalls nicht über die zweite, deren „abgeleitete“ Mannigfaltigkeit, mit erstrecken, noch weniger also über noch höhere von den abgeleiteten Mannigfaltigkeiten.

Und damit auch in der ursprünglichen Mannigfaltigkeit die Subsumtion (2_{+}) aufrecht erhalten werden könne, ist von vornherein erforderlich (und hinreichend), *dass unter ihren als „Individuen“ gegebenen Elementen sich keine Klassen befinden, welche ihrerseits Elemente derselben Mannigfaltigkeit als Individuen unter sich begreifen.*

Bildete man auch nur eine singuläre „Klasse“ in ebendieser und liesse solche als ein neues Individuum derselben zu, so drängte augenblicklich wieder die identische Null sich zu ihr hinzu, schlüpfte sozusagen durch die Thür der Def. $(2_{\times})$ in sie ein.

Ich werde eine Mannigfaltigkeit der genannten Art eine *„reine“* nennen — im Gegensatz zu einer *„gemischten“*, bei welcher obige Anforderung nicht durchaus erfüllt ist, also wenigstens einzelne ihrer Elemente Klassen sind, die schon andere Elemente derselben als Individuen enthalten.

Damit der identische Kalkul auf eine Mannigfaltigkeit anwendbar sei, muss sie eine reine Mannigfaltigkeit sein von vereinbaren Elementen.

ψ) Auch auf die derivirte einer solchen Mannigfaltigkeit ist der identische Kalkul wiederum anwendbar, *nur muss die Null in dieser unterschieden werden von der Null in jener, der ursprünglichen Mannigfaltigkeit. Ebenso auch* selbstverständlich *die Eins*, indem ja die eine Mannigfaltigkeit als Ganzes nicht identisch war, sich nicht deckte mit der andern; *überhaupt werden in ihr sämtliche Ausdrücke, Operations- und Beziehungszeichen eine neue, eigenartige Bedeutung beanspruchen.*

Ein Gebiet 0, welches die fundamentale Eigenschaft: $0 \Subset a$ nicht nur in der ursprünglichen, sondern zugleich auch in der abgeleiteten zweiten Mannigfaltigkeit besässe, kann es, wie wir gesehen, jedenfalls nicht geben; ein solches zu fingiren wäre nicht zulässig, man könnte,

ohne sich in Widersprüche zu verwickeln, es nicht einführen. M. a. W. *Man darf die Betrachtungen innerhalb der ersten mit denjenigen innerhalb der zweiten Mannigfaltigkeit nicht vermengen.*

Schon das Subsumtionszeichen gibt zwischen Gebiete gesetzt einen ganz anderen Sinn, als wenn es Klassen von Gebieten verknüpft.

Zur Unterscheidung wollen wir die Klassen der ursprünglichen Mannigfaltigkeit — also etwa *Punktgebiete* unsrer Tafel — wie früher mit *kleinen*, dagegen die Klassen ihrer derivirten Mannigfaltigkeit, d. i. also *Gattungen von Punktgebieten*, oder Klassen jener Klassen, mit *grossen* lateinischen Buchstaben darstellen.

Was dann eine Subsumtion $a \Subset b$ ausdrückt, haben wir längst erörtert. Auch fahren wir fort, die identische Null dieser ursprünglichen Mannigfaltigkeit mit 0, die ganze mit 1 zu bezeichnen. Es mögen uns a', a'', a''', ... noch spezielle Punktgebiete oder Klassen der ursprünglichen Mannigfaltigkeit vorstellen.

Wenn nun in der zweiten oder derivirten Mannigfaltigkeit eine Subsumtion

$$A \Subset B$$

gelten soll, so müssen alle in A zu einer Gattung zusammengefassten Punktgebiete auch vorkommen unter den in B zusammengefassten.

Das Gebiet 0 kann dabei zu jenen gehören oder auch nicht.

Wenn etwa:

$$A = \begin{cases} 0 \\ a \\ a' \end{cases}, \qquad B = \begin{cases} 0 \\ a \\ a' \\ a'' \\ a''' \\ 1 \end{cases}$$

gerade die rechts angemerkten Gebiete umfasst, so ist die Subsumtion $A \Subset B$ beispielsweise erfüllt. Und zwar ist hier $A \subset B$. Hielten wir aber die Bedeutung von A fest, so wäre $A = B$ nur dann zu nennen, wenn auch B nur die drei angeführten Gebiete 0, a, a' enthielte.

Ich verbinde die zu einer Klasse A oder B zusammengefassten Gebiete rechts hier nicht durch Pluszeichen, weil solche als Gebiete-verknüpfende bereits einen abweichenden Sinn erhalten haben, und ihre Anwendung bei B, z. B., bewirken würde, dass wir von den angeführten Gebieten nach Th. 22_+) nur mehr das eine 1 behielten.

Auch in unsrer zweiten Mannigfaltigkeit ist der Fall zulässig, dass die Klassen (Gebietgattungen) A, B als singuläre zu verstehen

sind, nämlich je in ein individuelles Gebiet ausarten. Es mag einmal $A = a$, und vielleicht ebenso $B = b$ je nur *ein* Gebiet vorstellen.

Im Allgemeinen wird dann nicht mehr $A \mathrel{=\!\!\!\in} B$ sein. Dass aber trotzdem vielleicht noch $a \mathrel{=\!\!\!\in} b$ sein kann, vermöchten wir in dieser zweiten Mannigfaltigkeit nun überhaupt nicht auszudrücken — jedenfalls nicht mittelst des bisherigen Subsumtionszeichens.

Hieran wird auch die Möglichkeit ersichtlich, dass AB von ab verschieden; es muss z. B. das erstere Produkt unter den angegebnen Voraussetzungen, sobald nur b mit a nicht gerade zusammenfällt, *verschwinden*, ohne dass doch ab, welches $= a$, gleich 0 zu sein brauchte.

Das angeführte Beispiel, wo etwa $A = a$, $B = b$, $a \mathrel{=\!\!\!\in} b$ und doch *nicht* $A \mathrel{=\!\!\!\in} B$ augenscheinlich ist, lässt erkennen, dass es beim Übergang von Betrachtungen innerhalb der ersten zu solchen innerhalb der zweiten Mannigfaltigkeit *nicht* einmal *erlaubt* sein wird, zu beiden Seiten einer Subsumtion *Gleiches für Gleiches zu setzen*, und zwar aus dem Grunde, weil bei Ausführung der Substitution auch das Subsumtionszeichen seine Bedeutung notwendig ändert!

Sollte $A \mathrel{=\!\!\!\in} B$ sein während $A = a$ und $B = b$ singuläre Klassen von Gebieten, also Einzelgebiete selber vorstellen, so wäre der Fall $A \subset B$ undenkbar, indem ja B dann ausser dem A (welches einerlei mit a ist) noch mindestens ein zweites Gebiet enthalten müsste, im Widerspruch zu der Annahme, dass es auch nur *ein* Gebiet, b, umfasse. Es bliebe nur die Möglichkeit $A = B$ übrig, und wäre es sonach *dasselbe* Gebiet $a, = b$, das beide Klassen ausschliesslich enthielten. —

Wir hätten nun in der zweiten Mannigfaltigkeit A gleich O („gross Null") zu nennen, wenn A eine leere Klasse ist, welche gar kein Gebiet der ersten Mannigfaltigkeit enthält, also jedenfalls auch deren Nullgebiet (klein) 0 nicht — auch nicht einmal dieses.

Hieraus erhellt, dass in der That die Nullklasse der zweiten Mannigfaltigkeit, O, eine ganz andere Bedeutung hat, als diejenige 0 der ersten, dass sogar erstere die letztere auch nicht unter sich begreift. Das Nullgebiet der ersten Mannigfaltigkeit ist, als ein „Gebiet", doch gewiss ein ordentliches, legitimes Individuum der zweiten; *das „Nichts" in jener ist „Etwas" in dieser.*

Zu dem absurden Ergebniss $0 = 1$ waren wir aber oben, bei χ), im Grunde nur gelangt, indem wir beide Nullen verwechselten, auch die andre, O, mit 0 bezeichneten. —

Lag hienach eine Mannigfaltigkeit ursprünglich vor, auf welche die Postulate unsres Kalkuls anwendbar waren, so durfte die Bedeutung der 1 schon nicht über die Ableitung oder Derivirte dieser Mannig-

faltigkeit mit erstreckt, und jedenfalls also auch nicht über alles Denkmögliche überhaupt ausgedehnt werden!

Es ist indess auch *gar nicht wünschenswert*, die Bedeutung der 1 in solch' abstrakter Allgemeinheit, wie Boole sie anstrebt, zu fassen.

Jede Untersuchung dreht sich doch nur um gewisse Dinge. Diese werden als eine *„reine“* Mannigfaltigkeit sich ansehen lassen, insofern es eben möglich und geboten sein wird, von den Untersuchungen über irgendwelche Klassen dieser Dinge getrennt zu halten alle etwaigen Untersuchungen über die *Klassen der Klassen* von ebendiesen Dingen!

Man strebt, bei den Untersuchungen folgerichtig denkend zuwerke zu gehen. Will man die Schlüsse, die auszuführen sind, sich in der knappsten Form, wie sie allein die algebraische Zeichensprache gewähren kann, zum Bewusstsein bringen, sie nach den Methoden der logischen Theorie kontrolliren, oder auch sogleich von der Technik des Kalkuls für die Probleme der Untersuchung Nutzen ziehen, so empfiehlt es sich, und *genügt es*, nur eben jene Dinge, um welche die Untersuchung sich dreht, zu einer umfassendsten Klasse zusammenzufassen, und sie als „die ganze Mannigfaltigkeit“ oder „identische Eins“, als den *„Denkbereich“*, mit der Ziffer 1 zu bezeichnen.

ω) Zum Schlusse wollen wir noch, obwol es nicht mehr ganz unter die Überschrift dieses Paragraphen gehört, die identischen Operationen und Symbole in Vergleichung ziehen mit den gleichnamigen arithmetischen, mit den sonstigen mathematischen.

Die durchgängige Übereinstimmung ihrer formalen Eigenschaften, welche aufseiten der identischen Operationen nur noch ein kleines Mehr aufweist, rechtfertigte bereits ihre übereinstimmende Benennung und Bezeichnung mit den arithmetischen Operationen, wenigstens für ein selbständiges (mit arithmetischen Untersuchungen nicht vermengtes) Studium des identischen Kalkuls, wie es hier dargestellt ist.

Im übrigen aber zeigt ihrer Bedeutung nach die identische Multiplikation *gar keine*, die Addition nur eine *bedingte Verwandtschaft* mit der arithmetischen Operation gleichen Namens. Letzteres insofern:

Ist die identische Summe $a + b$ zweier Gebiete eine „reduzirte“, sodass $ab = 0$ ist, mithin kein Teil des einen Summanden als ein auch im andern versteckter, implicite in diesem tautologisch wiederholt erscheint, so wird die Maasszahl jener Summe $a + b$ auch die arithmetische Summe $a' + b'$ der Maasszahlen a' und b' ihrer Glieder a und b sein. In diesem Falle lässt sich dann also das Pluszeichen ohne weiteres beibehalten, wenn man unter a, b und $a + b$, statt diese Ge-

biete selber, nur ihre Maasszahlen verstehen will, und die identische Addition geht bei solchem Wechsel der Deutung in die arithmetische über, fällt völlig mit ihr zusammen.

Anders, wenn das identische Produkt ab nicht 0 ist, wenn a und b einen Teil ab gemeinhaben. Hier würde, wie leicht zu sehen, das arithmetische Aggregat:

$$a' + b' - (ab)'$$

als die Maasszahl der identischen Summe $a + b$ anzusetzen sein, wenn darin $(ab)'$ diejenige des identischen Produktes ab bedeutet. Dem Umstande, dass in $a' + b'$ der beiden Gliedern gemeinsame Teil $(ab)'$ doppelt in Anrechnung gebracht ist, müsste dann eben durch einmaliges Subtrahiren des letztern nur einfach abgeholfen werden.

Es begreift dieser Ansatz auch den vorhin besprochenen Fall mit unter sich, und ist derselbe also als allgemeingültig anzusehen, indem für $ab = 0$ auch $(ab)' = 0$ sein muss (was aber nicht umgekehrt zu gelten braucht*), nämlich die Maasszahl eines Gebietes welches als identische Null verschwindet, sicher die arithmetische Null sein wird.

Bei gemischten Untersuchungen ist aber, was beachtenswert und vielleicht für den Anfänger überraschend, auch die identische Null, das logische „*Nichts*“ von dem *Zahl*individuum 0 sorgfältig zu unterscheiden. Ein einfaches Beispiel schon vermag dies darzuthun. Das *identische* Produkt $2 \cdot 3$, z. B., (im Gegensatz zum arithmetischen 2×3 verstanden) ist „nichts“, nämlich der identischen Null gleichzusetzen, weil es Nichts geben kann, was zugleich 2 und 3 wäre. Würde man es aber der arithmetischen Null gleichsetzen, so hiesse das: behaupten, dass das Zahlindividuum 0 einerlei sei mit den Zahlindividuen 2 und 3, was absurd.

Bei der Rechnung mit vieldeutigen arithmetischen Ausdrücken muss demnach nicht nur das identische vom arithmetischen Produkt mittelst konsequenter Anwendung verschiedener Malzeichen, sondern es muss auch die identische Null von der arithmetischen etwa durch kursiven Druck der erstern oder einen über sie gesetzten Punkt, Accent oder dergleichen unterscheidbar gemacht werden. Ebenso würde die identische Eins hier das ganze Zahlengebiet, auf welchem die Untersuchungen sich bewegen, vorzustellen haben und erscheint es über-

---

*) Das gemeinsame Gebiet, identische Produkt zweier Flächengebiete z. B. kann falls diese etwa aneinander grenzen, sich berühren, aus getrennten Punkten und Linien bestehen, welche zum Flächenmaasse null haben werden, ohne doch ein leeres Gebiet zu sein, ohne auch im logischen Sinne zu verschwinden.

flüssig zu betonen, dass sie von der arithmetischen 1 unterscheidend bezeichnet werden müsse.

Sind a, b lineare oder Flächen- oder Raumgebiete und als solche durch ihre Begrenzung gegeben, so würde es nach den in Herrn Otto Bödicker's „Erweiterung der Gauss'schen Theorie der Verschlingungen" etc. (Stuttgart, Spemann 1876, 68 Seiten) entwickelten Methoden nicht schwer fallen, die Maasszahlen $(a+b)'$ und $(ab)'$ ihrer identischen Summe und desgl. Produktes durch Integrale darzustellen, erstreckt über die Gebiete a, b selbst oder ihre Umgrenzungen.

Wenn sonach die Analogie der identischen beiden Grundoperationen mit ihren arithmetischen Namensverwandten keine tiefgehende ist, so tritt dafür eine sehr weitgehende Analogie jener beiden mit gewissen komplizirteren arithmetischen Operationen zutage, die wir nur kurz anführen wollen: die identische *Multiplikation* verhält sich ihrem ganzen Wesen nach durchaus ähnlich, wie die Operation der *Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Divisors* oder Teilers gegebener Zahlen und die identische *Addition* entspricht ebenso der *Aufsuchung ihres kleinsten gemeinschaftlichen Multiplums* oder Vielfachen.

In der That könnte man hinstellen: das *identische Produkt* von Gebieten als das *grösste* denselben *gemeinsame Gebiet*, als das umfassendste von all' den Gebieten, welche ihnen gemein *sind*; desgleichen die *identische Summe* von Gebieten als das *kleinste* von all' den Gebieten, die ein jedes von den gegebnen in sich enthalten, als das mindest umfassende also von denen, die diese alle gemein *haben*.

Die Wahrnehmung dieser auch Herrn Georg Cantor nicht entgangenen Analogie hat in der That Herrn Dedekind veranlasst, in seiner schon erwähnten Abhandlung[1] unser identisches Produkt ab, welches er die *„Gemeinheit"* von a und b nennt, mit $\mathfrak{G}(a, b)$, unsre von ihm die *„Zusammensetzung"* genannte identische Summe $a+b$ mit $\mathfrak{M}(a, b)$ darzustellen. Da diese Bezeichnung unstreitig etwas schwerfälliger erscheint, wie die unsrige, so möchte ich, sogar bei logisch-arithmetischen Untersuchungen gemischter Art, unterscheidenden Knüpfungszeichen, z. B. für die identische Addition einem erheblich kleineren Pluszeichen im allgemeinen den Vorzug geben. Eventuell, namentlich für schriftlichen Gebrauch, dürfte es sich in solchen Fällen auch empfehlen gemäss Herrn Peirce's zeitweiliger Übung eines Pluszeichens mit in die Ecke rechts unten gesetztem Komma $+_,$ als identischen Knüpfungszeichens sich zu bedienen zur Unterscheidung vom einfachen als dem arithmetischen $+$Zeichen — wobei dann auch die Summen und Produktzeichen Σ, Π, wenn als identische (nicht arithmetische) zu deuten, mit einem *Komma* als Apostroph nur zu versehen wären, gleichwie erforderlichenfalls die 0 und 1 — vergl. S. 193 sq.

Fünfte Vorlesung.

§ 10. Die nicht von Negation handelnden Sätze. Reine Gesetze, von Multiplikation und Addition je für sich.

12) Theorem. *Für die identischen Operationen gilt das „Kommutationsgesetz“:*

$12_\times$) $ab = ba.$ | 12_+) $a + b = b + a.$

Nach diesem dürfen die beiden

Faktoren eines identischen Produktes | Glieder einer identischen Summe

miteinander *ausgetauscht* werden — ohne dass dies von Einfluss auf die Bedeutung, den Wert des Ausdrucks wäre. Die identische Multiplikation resp. Addition — können wir auch sagen — ist eine „*kommutative*“ Operation; ihr Ergebniss ist „*symmetrisch*“ in Bezug auf die (beiden) Operationsglieder.

Beweis des Satzes. Nach den Formeln des Th.

$6_\times$) $ab \subseteq b,\ ab \subseteq a$ | 6_+) $b \subseteq a + b,\ a \subseteq a + b$

von welchen ja nach Anmerkung zu Pr. I, S. 170, eine beliebige zuerst statuirt werden durfte, folgt gemäss Def. $(3_\times)'$ resp. $(3_+)'$:

$ab \subseteq ba$ | $b + a \subseteq a + b$

und in dieser hiemit allgemein bewiesenen Formel darf man auch a und b vertauschen und erhält:

$ba \subseteq ab$ | $a + b \subseteq b + a$

was mit dem vorigen Ergebniss nach Def. (1) zusammenfliesst zu

$ab = ba,$ | $a + b = b + a,$

welches zu beweisen war.

[Das zweite Ergebniss hätte auch, analog wie das erste, direkt aus den vom Th. 6) gelieferten Subsumtionen:

$ba \subseteq a,\ ba \subseteq b$ | $a \subseteq b + a,\ b \subseteq b + a$

nach Def. $(3)'$ abgeleitet werden können; doch wäre diese Variante des Beweises augenscheinlich etwas weniger einfach gewesen.]

Exempel. $a =$ Adelige, $b =$ Besitzende.
Die Besitzenden unter den Adeligen sind einerlei mit den Adeligen unter den Besitzenden.

Anderes Beispiel: $a =$ weiss, $b =$ Pferd. Etwas weisses, was ein Pferd ist, muss ein Pferd sein, welches weiss ist, und vice versā.

Sei $a =$ Europäer, $b =$ Russe, so gilt: Europäer und Russen sind Russen oder Europäer. Die Europäer nebst den Russen sind die Russen oder Europäer.

Es bedeute a das, was einem andern (einer bestimmten Klasse) untergeordnet ist, b das, was ebendiesem gleich ist, so gilt: gleich sowie untergeordnet ist untergeordnet oder gleich.

13) **Theorem.** *Für die identischen Operationen gilt auch das „Assoziationsgesetz“*:

$13_\times)$ $a(bc) = (ab)c.$	$13_+)$ $(a+b)+c = a+(b+c).$

Wenn man in bestimmter Folge, sei es

ein Symbol mit dem Produkt zweier andern Symbole,	ein Symbol zu einer Summe zweier andern Symbole,

sei es

ein Produkt zweier Symbole mit einem dritten (Symbol) multiplizirt	eine Summe zweier Symbole zu einem dritten Symbol addirt

so ist es nach dem angegebenen Satze für den Wert des Ergebnisses *gleichgültig*, ob sich der in seinem Ausdruck in die Mitte tretende

Faktor	Term oder Summand

(hier b) mit dem ersten (a) oder ob er sich mit dem letzten (c) der drei genannten Symbole *„vergesellschaftet“* oder *„assoziirt“*, nämlich ob er mit diesem oder mit jenem vermittelst einer Klammer zusammengeschlossen und dadurch zu

einem Teilprodukte	einer Teilsumme

des ganzen Ergebnisses vereinigt wird — unter

Teilprodukt ein solches Produkt	Teilsumme eine solche Summe

verstanden,

welches selbst wieder Faktor eines andern Produktes ist.	welche ihrerseits als Term einer andern Summe erscheint.

Es erscheint hienach der Name des „Assoziationsgesetzes“ gerechtfertigt.

Man sieht, wie viel einfacher in Formeln, als in Worten, sich ein solches Gesetz darstellt.

In dem formalen Ausdruck des letzteren treten *Klammern* auf, und ist dies in unserm Lehrgebäude hier wesentlich zum ersten mal

der Fall. Über Zweck, Sinn und Verwendungsweise dieses Elementes der Zeichensprache, welches für die Erzielung knapper Ausdrucksformen so hoch wichtig ist, im Grunde jedoch — zur Not — entbehrt werden könnte, möge auf den Exkurs über Klammern in Anhang 2 verwiesen sein.

Beweis des Theorems. Nach $6_\times$) resp. 6_+) ist:

$bc \Subset c$ und $a(bc) \Subset bc$,

folglich nach II:

$$a(bc) \Subset c.$$

Ebenso ergibt aus

$bc \Subset b$ und $a(bc) \Subset bc$

sich auch:

$$a(bc) \Subset b.$$

Endlich ist nach $6_\times$) unmittelbar:

$$a(bc) \Subset a.$$

Aus dieser letzten und der vorhergehenden Subsumtion folgt nach Def. $(3_\times)'$: $a(bc) \Subset ab$

und hieraus, in Verbindung mit der vorher erwiesenen Subsumtion $[a(bc) \Subset c]$ folgt ebenso:

$$a(bc) \Subset (ab)c.$$

$c \Subset b+c$ und $b+c \Subset a+(b+c)$

somit nach II:

$$c \Subset a+(b+c).$$

Ebenso ist:

$b \Subset b+c$, $b+c \Subset a+(b+c)$,

somit:

$$b \Subset a+(b+c).$$

Endlich ist nach 6_+) unmittelbar:

$$a \Subset a+(b+c).$$

Aus dieser und der vorhergehenden Subsumtion folgt nach $(3_+)'$:

$$a+b \Subset a+(b+c)$$

und hieraus, in Verbindung mit der zuerst konstatirten Subsumtion $c \Subset a+(b+c)$ folgt ebenso:

$$(a+b)+c \Subset a+(b+c).$$

Analog zeigt man, dass umgekehrt:

$$(ab)c \Subset a(bc) \qquad | \qquad a+(b+c) \Subset (a+b)+c$$

ist, womit sich dann die Gleichheit der beiderseitigen Ausdrücke nach Def. (1) bewiesen findet.

In der That ist nach $6_\times$):

$(ab)c \Subset ab$, desgl. $ab \Subset a$

folglich a fortiori:

$$(ab)c \Subset a.$$

Aus

$(ab)c \Subset ab$ und $ab \Subset b$

folgt ebenso:

$$(ab)c \Subset b.$$

Endlich ist nach $6_\times$) direkt:

$$(ab)c \Subset c.$$

Man hat nämlich nach 6_+):

$a \Subset a+b$, $a+b \Subset (a+b)+c$,

folglich

$$a \Subset (a+b)+c.$$

Ebenso

$b \Subset a+b$, $a+b \Subset (a+b)+c$,

woraus:

$$b \Subset (a+b)+c.$$

Endlich nach 6_+) direkt:

$$c \Subset (a+b)+c.$$

Aus den zwei letzten Subsumtionen folgt nach $(3_\times)'$: $(ab)c \in bc$,
und hält man mit dem vorhergehenden Ergebniss $(ab)c \in a$
dies letztere zusammen, so ergibt sich wiederum nach $(3_\times)'$

$$(ab)c \in a(bc).$$

Hienach haben wir, kraft $(3_+)'$:

$$b+c \in (a+b)+c,$$

und da oben bereits

$$a \in (a+b)+c$$

gefunden ist, folgt endlich nach $(3_+)'$ weiter:

$$a+(b+c) \in (a+b)+c.$$

q. e. d.

Die vorstehenden Beweise der Assoziationsgesetze bilden meines Erachtens eine der schönsten Leistungen des Herrn Peirce.

Exempel zu dem Satze. Die Gebildeten (a) unter den adeligen Grundbesitzern (bc) sind die gebildeten Adligen (ab) unter den Grundbesitzern (c).

Gebildete oder auch Adelige ($a+b$) nebst den Besitzenden (c) sind dieselbe Klasse von Personen, wie Gebildete (a) nebst den Adeligen oder auch Besitzenden ($b+c$).

Exemplifikationen zu 13_+) sind in der Wortsprache nicht leicht ausdrucksvoll darzustellen, weil in dieser ja Klammern nicht verwendet werden und, wo sie doch der Deutlichkeit wegen erforderlich wären, deren mentale Ergänzung höchstens durch die Betonung nebst geeigneten Pausen, durch den Rythmus der Rede angedeutet zu werden vermag. Im vorliegenden Falle jedoch pflegt die Wortsprache — ohnehin gerechtfertigt durch die Theoreme 13) selbst, vergl. die nachfolgenden Zusätze und Zusatzdefinitionen — bei der additiven Vereinigung oder kollektiven Zusammenfassung von drei oder mehr Klassen dieselben stets unterschiedslos, eventuell durch Konjunktionen wie „und", „sowie", „oder" verknüpft hintereinander aufzuzählen; sie pflegt die Theoreme 13) allgemein dahin zu verwerten, dass sie es sich erspart, sich schenkt, Ausdrucksformen für Unterschiede aufzustellen, die ohnehin belanglos sind.

Zusatz 1) und Zusatzdefinition.

Die konsequente Ausdehnung der vorstehenden *speziellen* Kommutations- und Assoziationsgesetze zu den gleichnamigen *allgemeinen* Sätzen, welche sich auf beliebig viele Operationsglieder beziehen, ist nun geradeso, wie in der Arithmetik, zu leisten.

Es würde in diesen Prozess der Verallgemeinerung, hier wie dort, nur das Th. 16) noch mit hereinzuziehen sein.

Die verallgemeinerten Sätze lassen sich zu dem Ausspruche zusammenfassen, dass bei der Verknüpfung beliebig vieler Symbole durch lauter Multiplikationen resp. lauter Additionen die Reihenfolge oder *„Ordnung"* und die *„Gruppirung"* oder Zusammenfassung dieser Operationsglieder *gleichgültig* ist, insbesondre also auch Klammern nach Belieben gesetzt oder unterdrückt werden dürfen.

Auf diese Sätze ist endlich auch die Begriffserklärung

eines Produktes	*einer Summe*

von beliebig vielen

Faktoren	*Gliedern*

genau wie in der allgemeinen Arithmetik zu gründen.

Die Ausführung dieses Programmes kann nur eine Wiederholung desjenigen sein, was manchen Lesern aus den Werken von wissenschaftlicher Tendenz über letztere Disziplin bereits bekannt ist. Zudem wird durch dieselbe in logischer Hinsicht nichts Wesentliches hinzugefügt, und sei sie darum ebenfalls in den Anhang verwiesen (Anhang 3).

Es lässt sich nun auch ein Produkt, eine Summe von drei oder mehr Gebieten wieder als ein solches zur Anschauung bringen, wie es für drei Operationsglieder die Figuren zeigen:

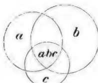


Fig. $11_\times$.

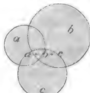


Fig. 11_+.

Man nehme sich die Mühe, an diesen Figuren die Gültigkeit des Assoziationsgesetzes 13) wirklich nachzusehen, indem man

einmal die Zweieckfläche, das Bilineum ab mit der Kreisfläche c, das andere mal die Kreisfläche a mit der Zweieckfläche bc vor dem geistigen Auge zum Schnitt bringt.	einmal die (ebenfalls von zwei Kreisbogen begrenzte) hier in Gestalt eines liegenden Achters sich darstellende Fläche $a+b$ mit dem Kreis c, das andre mal den Kreis a mit der Achterfläche $b+c$ zu einem Gebiet vereinigt.

Beidemal erhält man in der That dieselbe schraffirte Figur als die Bedeutung von

abc	$a+b+c.$

Zusatz 2), auch gehörig zur Def. (3).

Die beiden Teile (3)′ und (3)″ der Def. (3) lassen sich nunmehr leicht von zweien auf beliebig viele Subsumtionen ausdehnen, nämlich:

$(3_\times)'''$ Wenn zugleich
$x \Subset a,\ x \Subset b,\ x \Subset c, \cdots$
ist, so muss auch
$x \Subset abc \cdots$
sein.

$(3_+)'''$ Wenn zugleich
$a \Subset x,\ b \Subset x,\ c \Subset x, \cdots$
ist, so muss auch
$a + b + c + \cdots \Subset x$
sein.

Und umgekehrt:

$(3_\times)''''$ Wenn
$x \Subset abc \cdots$
ist, so muss auch sein:
$x \Subset a,\ x \Subset b,\ x \Subset c, \cdots$

$(3_+)''''$ Wenn
$a + b + c + \cdots \Subset x$
ist, so muss auch sein:
$a \Subset x,\ b \Subset x,\ c \Subset x, \cdots$

Der Beweis ist naheliegend, nämlich z. B. linkerhand so zu leisten.

Ad $(3_\times)'''$. Aus $x \Subset a$ nebst $x \Subset b$ folgt nach $(3_\times)'$, dass $x \Subset ab$; hieraus aber in Verbindung mit $x \Subset c$ folgt abermals nach $(3_\times)'$, dass $x \Subset (ab)\,c$, oder, weil die Klammer weggelassen werden darf, dass $x \Subset abc$. Hieraus dann und aus der Voraussetzung $x \Subset d$ folgt wieder nach $(3_\times)'$, dass $x \Subset (abc)\,d$ sein muss, wo nun abermals die Klammer wegzulassen ist, u. s. w.

Ad $(3_\times)''''$ kann man in der Voraussetzung auch unter Anbringung einer Klammer die rechte Seite als ein Produkt von nur zwei Faktoren schreiben, sodass sie sich darstellt als: $x \Subset a\,(bcd \cdots)$. Hieraus folgt aber nach $(3_\times)''$, dass $x \Subset a$, sowie $x \Subset bcd \cdots$ sein muss. Letzteres kann wieder geschrieben werden: $x \Subset b\,(cd \cdots)$ und zerfällt nach $(3_\times)''$ abermals in $x \Subset b$ nebst $x \Subset cd \cdots$ Indem man so weiterfährt, gewinnt man fortschreitend die verschiedenen Subsumtionen, welche die Behauptung ausmachen. —

Exempel zum Vorstehenden haben wir schon in § 8 unter λ) gebracht.

Es könnten vorstehende Sätze auch als selbständige Definition von Produkt und Summe aus beliebig vielen Operationsgliedern (Faktoren resp. Summanden) hingestellt werden, während im gegenwärtigen Lehrgang wir vorgezogen haben, diese Begriffe rekurrirend auf diejenigen der *„binären"* (d. h. immer nur zwei Symbole auf einmal verknüpfenden) Multiplikation und Addition zurückzuführen.

14) Theoreme. (*„Tautologiegesetze".*) *Allgemein ist:*

$14_\times$) $aa = a.$ | 14_+) $a + a = a.$

Beweis. Nach Th. $6_\times$) resp. 6_+), wenn darin a für b genommen wird, ist einerseits:

$aa \Subset a.$ | $a \Subset a + a.$

Andrerseits treffen die Voraussetzungen der Def. (3) nach I zu, wenn unter c und b dort ebenfalls a verstanden wird, und ist darnach auch:

$$a \mathrel{⋹} aa, \qquad \Big| \qquad a + a \mathrel{⋹} a,$$

sodass nach Def. (1) nun unser Lehrsatz bewiesen erscheint.

Während die vorhergehenden Theoreme Eigenschaften ausdrückten, welche den arithmetischen Operationen ganz ebenso wie den identischen zukommen, ist dies mit den Theoremen 14) nicht der Fall. Wir mögen letztere deshalb als die *spezifischen* Gesetze des identischen (sowie auch des logischen) Kalkuls hinstellen.

In der Arithmetik würde Gleichung 14_+) nur für den Wert 0, Gleichung $14_\times$) nur für die Werte 0 und 1 von a erfüllt sein; ausserdem könnte man beide Gleichungen noch für $a = \infty$ in Anspruch nehmen, welch' letzteres Symbol aber nicht zu den *Zahlen* gehört.

In Worten lassen sich die beiden Sätze wie folgt fassen:

Identische

Multiplikation | *Addition*

eines Gebietes

mit sich selbst | *zu sich selbst*

lässt dasselbe unverändert — doch ist der Formelausdruck als der übersichtlichere dem verbalen vorzuziehen.

Die Anschauung lässt beide Sätze als ganz selbstverständlich erscheinen. Das Gebiet

welches a mit sich selbst gemein hat | zu welchem a sich selbst ergänzt

ist eben a selber. Entsprechend für Klassen:

Ein Mensch, welcher ein Mensch ist, ist ein Mensch, und umgekehrt *darf* man auch sagen: ein Mensch ist ein Mensch *und* ein Mensch, ist ein Mensch, welcher ein Mensch ist. Was Gold *oder auch* Gold ist, ist eben Gold — sowie umgekehrt.

Freilich ist die Bemerkung am Platze, dass man durch solche Urteile sich einer unnötigen Wiederholung, einer „*Tautologie*", eines „*Pleonasmus*" schuldig mache. Es wird auch in der That kaum jemals einem Vernünftigen einfallen solchergestalt in unverhüllter Form, sozusagen nackt zu sagen: „die Pferde, welche Pferde sind", „die Neger-Mohren-Neger" und ebensowenig „die Menschen und die Menschen und die Menschen" oder dergleichen.

In verhüllter Form dagegen — *implicite* — wird solches, wie sich zeigen lässt, in den Wissenschaften sowol wie im gemeinen Leben, ungemein häufig gethan. Ein paar Beispiele werden genügen, dies zum Bewusstsein zu bringen.

Zum Zwecke einer zahlentheoretischen Untersuchung mögen wir etwa aus der Mannigfaltigkeit der positiven ganzen Zahlen diejenigen hervor-

heben, „welche *nur durch* 1 *und durch sich selber* teilbar sind". Die so charakterisirte Klasse wird dann bestehen aus den *Primzahlen* (d. i. den Zahlen die *zwei* Teiler haben) und aus der bekanntlich *nicht* zu diesen gehörigen *Eins* (die ja nur *einen* Teiler hat). Für letztere aber ist es oben doppelt gesagt, dass sie durch 1 teilbar, denn bei ihr heisst eben „durch sich selber" ebenfalls „durch eins" teilbar. Von ihr sagten wir also in versteckter Form aus, dass sie „*durch* 1 *und durch* 1" teilbar sei — eine *ausserhalb des Zusammenhanges* jedenfalls überflüssige Wiederholung, die aber innerhalb des Zusammenhanges ganz unerlässlich ist, um die verbale Charakterisirung der Klasse so kurz wie oben zu gestalten.

Verfügt man bereits über den Namen „Primzahlen", sind diese schon eingeführt, ist ihr Begriff bereits erklärt, so kann man freilich die hervorzuhebende Klasse von Zahlen ungefähr ebenso kurz bezeichnen als die der „Primzahlen nebst der Eins"; jedoch tritt hier erstlich der Gesichtspunkt, unter dem man die Zahlen hervorheben will, nicht so deutlich zutage, und zweitens mochte ja auch die ganze Untersuchung der Einführung des Primzahlbegriffs *voran*gegangen sein.

Sprechen wir einmal von „den Besitzenden und den Adeligen", so sind die besitzenden Adeligen augenscheinlich doppelt aufgeführt, nämlich einerseits unter den Besitzenden, dann nochmals unter den Adeligen. Die Beschreibung der Klasse fällt aber jedenfalls so einfacher aus, als wenn man diesen Umstand vermeiden wollte.

In Bezug auf weitere Beispiele möge noch auf die Betrachtungen unter § 18, $\alpha\,..\,\delta$) verwiesen sein.

Was nun aber (beim Beschreiben, Charakterisiren von Klassen) in verhüllter Gestalt implicite, ganz allgemeine Praxis ist, *muss im System der Wissenschaft auch unverhüllt, ausdrücklich, explicite eine Stelle finden.*

Zusatz 1 zu Th. 14). Die Ausdehnung dieser spezifischen Gesetze des identischen Kalkuls auf beliebig viele unter sich gleiche Operationsglieder ist naheliegend. Wir haben hier auch als allgemeingültige Formeln:

$$aaa\cdots = a. \qquad\qquad a + a + a + \cdots = a.$$

Behufs Beweises hätte man — unter Vorausbeziehung auf Th. 16) — z. B.:

$$aaa = (aa)\,a = aa = a,$$

sodann

$$aaaa = (aaa)\,a = aa = a,$$

u. s. w.

Die erste lässt erkennen, dass eine Operation des „*Potenzirens*" im identischen Kalkul *nicht* vorkommt. Die „Potenzexponenten" der Arithmetik bleiben hier als *obere Indices* für uns verfügbar, und werden wir speziell unter a^1 hier im allgemeinen nicht a selber, sondern irgend ein zweites von a vielleicht verschiedenes Gebiet verstehen; *ebenso wird uns*

$$a, a^0, a^1, a^2, a^3, \cdots$$

weiter nichts als eine Reihe von einander vielleicht durchweg verschiedener Gebiete oder Klassen vorstellen.

Die zweite Formel zeigt, dass der Zusammenhang, wie er zwischen Addition und Multiplikation in der Arithmetik besteht — allerdings nur für den Fall eines positiven ganzzahligen Multiplikators, ein Zusammenhang, der aber gerade die Multiplikation zur Operation der zweiten Stufe dort der Addition gegenüber stempelt — hier im identischen Kalkul kein Analogon hat. Das Fehlen solchen Analogons zu der gedachten Gleichung der Arithmetik:

$$\underset{1}{\overset{\frown}{a}} + \underset{2}{\overset{\frown}{a}} + \cdots + \underset{n}{\overset{\frown}{a}} = a \times n$$

thut unsrer Bemerkung keinen Eintrag, dass die identischen Operationen *sämtliche* formalen Eigenschaften der gleichnamigen arithmetischen besässen. Denn eben weil diese Gleichung nicht allgemein, nicht im komplexen Zahlengebiete für ein ganz beliebiges n Sinn hat oder gültig ist, gehört sie nicht zu den *„formalen“* Eigenschaften — im vollen Sinne dieses Wortes.

Während so von den wirklich formalen Eigenschaften der beiden direkten Operationen der arithmetischen vier Spezies im identischen Kalkul in der That keine fehlt, sehen wir hier noch die spezifischen Gesetze 14) als weitere Eigenschaften hinzutreten, und zu diesen werden ferner noch — im Grunde als eine Folge derselben — die beiden Theoreme 23) kommen. Wir müssen demnach die identischen Operationen der Multiplikation und Addition den arithmetischen gegenüber als die an formalen Eigenschaften *reicheren* hinstellen.

Zusatz 2 zu Th. 14). Wenn nun überhaupt in einem Produkte, einer Summe, Faktoren resp. Glieder *wiederholt* auftreten, sei es auch nicht durchweg als successive oder einander benachbarte, sondern vielleicht getrennt durch noch andre Operationsglieder, so wird man praktisch von den Theoremen 14) Gebrauch machen im Sinne einer Vereinfachung dieser Ausdrücke, indem man von jeder Sorte Faktoren resp. Summanden immer nur *einen* beibehält (etwa den ersten), die übrigen ihm identisch gleichen aber fallen lässt. So wird man z. B. für

$abcaabdacdc \quad | \quad a+b+c+a+a+b+d+a+c+d+c$

in Hinkunft kürzer sagen

$abcd. \quad | \quad a+b+c+d.$

Man kann nämlich wegen der Kommutativität der Operationen die Operationsglieder zunächst so umordnen, dass die übereinstimmenden zusammenkommen, alsdann kann man die Gruppen der letztern wegen der Assoziativität jener Operationen jeweils zu einem einzigen Operationsgliede zusammenschliessen, und endlich sie nach Th. 16) — auf

das wir vorverweisen müssen — ersetzen durch den einfacheren Ausdruck, dem sie nach Th. 14) äquivalent sind. So wäre vorstehend:

$$(aaaa)(bb)(ccc)(dd) \quad | \quad (a+a+a+a)+(b+b)+(c+c+c)+(d+d)$$

als eine Zwischenstufe der Rechnung zu denken gewesen.

Den hier gegebenen Wink darf der Rechner nie aus den Augen verlieren.

Analog wird man für: „die leichtgläubigen, guten, leichtgläubigen Kinder" kürzer blos sagen: „die leichtgläubigen guten Kinder", und für: „Mohammedaner und Briten sowie Russen und Mohammedaner" blos sagen „Mohammedaner, Briten und Russen". —

Für das Th. $14_\times$) gebrauchte Boole[4] den mit Recht allerwärts als ungeeignet qualifizirten Namen des „law of duality", wofür Jevons[1] den „law of simplicity" vorschlägt. Indem Boole eine Addition nur für einander gegenseitig ausschliessende Summanden zuliess, konnte er auch nicht das Th. 14_+) aufstellen oder zugeben. Von Neueren pflichtet ihm hierin nur Herr Venn[1]) noch bei, auf dessen Einwände wir in § 18, α) .. δ) ausführlichst eingehen werden.

Das Th. 14_+) ist zuerst von Jevons[1]) ausgesprochen, welchem auch bezüglich Gebrauchs der hier adoptirten Addition die Priorität zukommen dürfte, soweit sie nicht etwa von De Morgan anticipirt erscheint. Th. 14_+) nennt Jevons das „law of unity", indem er darauf hinweist, dass die Nichtbeachtung des Satzes beim *Zählen* zu falschen Ergebnissen des Zählens führe. Eine schon einmal gezählte Einheit darf nicht wiederholt gezählt werden. Sind $M', M'', M''', \ldots$ individuell verschiedene Münzen, z. B. Markstücke, so gäbe eine Zählung, wie $M' + M'' + M'' + M''' + \cdots$ ein falsches Resultat; es muss beachtet werden, dass $M' + M'$ weiter nichts ist, als M' etc.

Am geeignetsten würde mir die Bezeichnung der Theoreme 14) als *„Tautologiegesetze"* (der identischen Multiplikation resp. Addition) erscheinen, indem sie ausdrücken, dass es belanglos ist, das nämliche, was man bereits genannt hat, nochmals zu nennen, mag es mit simultanen oder unter alternativen Termen aufgeführt sein.

$15_\times$) Theorem.

Wenn $a \neq\!\!\!\in b$ *so ist* $ac \neq\!\!\!\in bc$.

Beweis. Nach $6_\times$) ist $ac \neq\!\!\!\in a$, wegen $a \neq\!\!\!\in b$ also, nach II: $ac \neq\!\!\!\in b$. Ebenso ist nach $6_\times$): $ac \neq\!\!\!\in c$. Aus den beiden letzten Subsumtionen folgt aber nach $(3_\times)'$:

$$ac \neq\!\!\!\in bc.$$

15_+) Theorem.

Wenn $a \neq\!\!\!\in b$ *so ist* $a+c \neq\!\!\!\in b+c$.

Beweis. Nach 6_+) ist $b \neq\!\!\!\in b+c$, nach II also um so mehr: $a \neq\!\!\!\in b+c$, und da ohnehin $c \neq\!\!\!\in b+c$ nach 6_+) ist, so haben wir nach Def. $(3_+)'$ auch:

$$a+c \neq\!\!\!\in b+c.$$

In einer Subsumtion darf man also beiderseits

mit demselben Symbol multipliziren | *dasselbe Symbol addiren*

und muss man wiederum eine gültige Subsumtion hierdurch erhalten. An der Figur

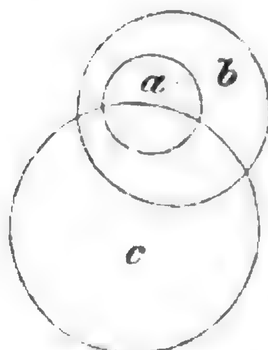


Fig. 12.

lassen beide Sätze sich durch Anschauung kontrolliren. Dass aber diese Sätze *nicht umgekehrt* werden dürfen, nämlich, dass aus $ac ⋹ bc$ resp. $a + c ⋹ b + c$ nicht $a ⋹ b$ folgen kann, offenbaren die Figuren:

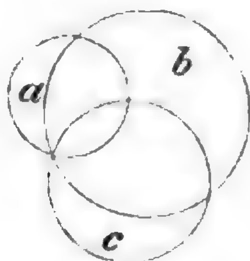


Fig. $13_{\times}$.

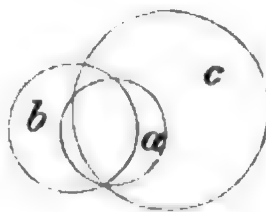


Fig. 13_{+}.

bei denen für die Kreise a, b, c die angegebene Voraussetzung sich je als erfüllt, die fragliche Folgerung aber sich als nicht erfüllt zeigt.

Exempel:

Rappen sind Pferde, ergo: englische Rappen sind englische Pferde. Blau ist farbig, ergo: blaue Salze sind farbige Salze.

Schweden sind Europäer, ergo: Schweden und Russen sind Europäer oder Russen.

Dagegen:

Die europäischen Vulkane*) sind italienische Vulkane. Gleichwol ist „europäisch" nicht notwendig „italienisch".

Russen und Asiaten sind Europäer oder Asiaten, ohne dass doch Russen auch Europäer sein müssten.

Anmerkung. In der Wortsprache kann man durch unbedachte Anwendung des Th. $15_{\times}$) in Fehler kommen; es ist daselbst auf scheinbare *Ausnahmen* des Satzes Rücksicht zu nehmen. Ein paar Beispiele werden dies am schnellsten deutlich machen.

---

*) Sofern Island und der vulkanische Teil des Kaukasus nicht zu Europa gerechnet und von erloschenen Vulkanen in der Eifel, im griechischen Archipel etc. abgesehen wird.

Ein Pistolenschütze ist ein Mensch. Darum muss aber ein vortrefflicher Schütze noch nicht ein vortrefflicher Mensch, der beste Schütze nicht der beste Mensch sein! Ebenso braucht eine grosse Fliege kein grosses Tier, ein kleiner Elephant kein kleines Tier zu sein, eine grosse Hütte kein grosses Gebäude — vergl. Jevons[6]. Pfennige sind Geld, aber viele Pfennige können doch wenig Geld sein. Etc.

Die Ausnahme ist darin begründet, dass hier das Adjektiv c, welches determinirend zum Subjekt und Prädikat tritt, in beiden einen *verschiedenen* Sinn erhält zufolge des Umstandes, dass es als ein relatives verstanden, relativ genommen wird, nämlich eine Beziehung, ein Verhältniss des Substantivs zu andern *seinesgleichen* auszudrücken bestimmt ist. Der Begriff „vortrefflich unter den Schützen" hat einen andern Inhalt, als der „vortrefflich unter den Menschen, vortrefflich als Mensch" und dementsprechend ist auch der Umfang beider Klassen nicht derselbe.

Das Th. $15_\times$) gilt stricte nur dann, wenn die Klasse c im Subjekt und Prädikat *in absolut demselben Sinne* verstanden wird.

Dementsprechend würde auch der Schluss: Alles Metall ist Substanz, folglich muss gelten: Das schwerste Metall (Iridium) ist die schwerste Substanz — dieser Schluss würde formell falsch, ein *Fehlschluss* sein, obwol hier die Prämisse sowol als die Konklusion materiell richtig ist.

Eine ähnliche Bemerkung: dass der Kontrast von Individuen einer Subjektklasse zu ihresgleichen unwillkürlich mit in's Gewicht fällt, trifft nicht selten schon beim Erteilen solcher Prädikate zu, die sich als absolut bestimmte Attribute darzustellen scheinen. So werden wir vielleicht die gleiche Farbe, die falls von Schafen die Rede ist, noch „weiss" genannt wird, bei einer chemischen Substanz als grau oder gelblich bezeichnen. Als den Umfang des Begriffes „weiss" in absolutem Sinne können wir immerhin bezeichnen: die Gesamtheit derjenigen Dinge, welche wir (als solche ihrer Kategorie) eben „weiss" nennen würden, und bleibt dies unbedenklich, es erscheint der Umfang nämlich als völlig bestimmt, solange nicht Objekte bekannt sind als unter verschiedene Kategorieen zugleich fallende, unter deren einer sie als weiss, unter deren andrer sie als nichtweiss zu bezeichnen wären. — Dass wir nur mit wohldefinirten Klassen zu thun hätten, wurde bereits als eine nicht überall wirklich erfüllte, ideale Voraussetzung der Logik hingestellt.

$16_\times$) Theorem.	16_+) Theorem.
Wenn $a = b$, *so ist* $ac = bc$.	*Wenn* $a = b$, *so ist* $a + c = b + c$.

Man darf also auch *beide Seiten einer Gleichung mit demselben Symbol multipliziren, sowie um Dasselbe vermehren.*

Beweis. Die Annahme $a = b$ zerfällt nach Def. (1) in die beiden Subsumtionen $a \Subset b$ und $b \Subset a$. Aus der ersten folgt nach Th.

$15_\times$) $ac \Subset bc$	15_+) $a + c \Subset b + c$

und ebenso aus der zweiten:

$bc \Subset ac$	$b + c \Subset a + c$

womit nach Def. (1) die Behauptung erwiesen ist.

Anmerkung 1. Durch Anwendung des Kommutationsgesetzes 12) auf die Behauptung in den beiden Theoremen 15) und 16) kann man diesen noch verschiedene Formen geben. Z. B. dem Th. $15_\times$) noch die Formen: Wenn $a ⋹ b$, so ist auch $ac ⋹ cb$, desgleichen $ca ⋹ bc$, desgl. endlich $ca ⋹ cb$. Doch werden wir Sätze, die sich so unwesentlich von den aufgestellten unterscheiden, künftig nicht mehr mit anführen, vielmehr ohne weiteres als zugleich mit jenen gegeben betrachten.

Anmerkung 2. In der Arithmetik dürfen die beiden Sätze bekanntlich auch umgekehrt werden. Man darf daselbst einen übereinstimmenden Faktor der beiden Seiten einer Gleichung, desgleichen einen übereinstimmenden Summanden derselben ohne weiteres *„streichen"*, den Faktor allerdings nur, wenn er von 0 verschieden ist. Es kommt dies hinaus auf die Division der Gleichung durch den gedachten Faktor resp. auf die beiderseitige Subtraktion des gedachten Summanden, und beruht die Zulässigkeit des Verfahrens auf der Eindeutigkeit der beiden inversen Operationen, nämlich der arithmetischen Division (mit Ausnahme derer durch 0) und der arithmetischen Subtraktion. Da wie schon erwähnt die inversen Operationen des identischen Kalkuls mit den gleichnamigen arithmetischen ausser ihrem Gegensatz zu den direkten Operationen nur wenig gemein haben, so lässt sich schon erwarten, dass hier der Rückschluss von

$$ac = bc \qquad \textit{oder} \qquad a + c = b + c$$

auf $a = b$ nicht zulässig sein wird.

Für Gebiete thun dies in der That die Figuren kund, in denen a und b die Kreisflächen, dagegen c das schraffirte Gebiet vorstellt:



Fig. $14_\times$.

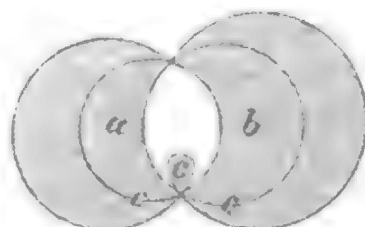


Fig. 14_+.

Ebenso offenbaren für Klassen es Beispiele wie folgende:

Die gleichseitigen Dreiecke sind *die* gleichwinkligen Dreiecke, aber es ist nicht: gleichseitig einerlei mit gleichwinklig — der Rhombus z. B. ersteres ohne das letztere. Die schwerste Substanz ist das schwerste*) Metall, doch ist nicht: Substanz = Metall.

Die Primzahlen nebst den ungeraden Zahlen ist dasselbe wie die Zahl 2 nebst den ungeraden Zahlen. Gleichwol ist die Klasse der Primzahlen nicht identisch mit der Zahl 2, sondern greift noch weit über dieses allerdings in ihr enthaltene Zahlindividuum hinaus. U. a. m.

*) Auch wenn man hier im Prädikat „schwerste" genau so wie im Subjekte versteht als „schwerer wie die übrigen *Substanzen*" und nicht blos als „schwerer wie die übrigen *Metalle*" bleibt dies noch richtig. Vergl. die Anm. zu Th. 15).

Wegen der von der Arithmetik her geläufigen Übung ist es hier am Platze vor dem erwähnten Rückschluss ausdrücklich zu warnen:

In Gleichungen (sowie Subsumtionen) des identischen Kalkuls ist es nicht gestattet, übereinstimmende Faktoren oder auch Terme der beiden Seiten zu „streichen".

$17_\times$) Theorem. | 17_+) Theorem.

Wenn $a \Subset b$ *und* $a' \Subset b'$, *so ist auch:*

$$aa' \Subset bb'. \qquad \Big| \qquad a + a' \Subset b + b'.$$

Beweis. Nach $15_\times$)*) und $12_\times$) | Beweis. Nach 15_+) und 12_+) folgt aus unsern Annahmen:

$$aa' \Subset ba', \quad ba' \Subset bb', \qquad \Big| \qquad a + a' \Subset b + a', \quad b + a' \Subset b + b',$$

woraus die Behauptung a fortiori (d. i. nach II) zu schliessen ist.

$18_\times$) Theorem. | 18_+) Theorem.

Wenn $a \Subset b$ *und* $a' = b'$ *ist, so muss sein:*

$$aa' \Subset bb'. \qquad \Big| \qquad a + a' \Subset b + b'.$$

Beweis aus Th. $17_\times$) resp. 17_+), da die Annahme $a' = b'$ auch $a' \Subset b'$ nach Def. (1) in sich schliesst.

$19_\times$) Theorem. | 19_+) Theorem.

Wenn $a = b$ *und* $a' = b'$, *so ist auch:*

$$aa' = bb'. \qquad \Big| \qquad a + a' = b + b'.$$

Beweis. Nach Def. (1) schliessen die Voraussetzungen in sich, dass sowol $a \Subset b$, $a' \Subset b'$, als auch $b \Subset a$, $b' \Subset a'$ ist. Aus ersterm folgt nach $17_\times$) resp. 17_+):

$$aa' \Subset bb' \qquad \Big| \qquad a + a' \Subset b + b',$$

aus letzterem ebenso:

$$bb' \Subset aa', \qquad \Big| \qquad b + b' \Subset a + a',$$

womit die Behauptung nach Def. (1) erwiesen ist. In Worten kann man sagen:

Gleiches mit Gleichem multiplizirt gibt Gleiches. | *Gleiches zu Gleichem addirt gibt Gleiches.*

Zusatz 1. Die Ausdehnung der Sätze 17) bis 19) auf beliebig viele Subsumtionen oder Gleichungen ist naheliegend.

Um die allgemeinsten Sätze, welche sich auf diesem Wege ge-

*) Nämlich: indem man in der ersten Subsumtion $a \Subset b$ beiderseits mit a' nachmultiplizirt, in der zweiten $a' \Subset b'$ beiderseits mit b vormultiplizirt.

winnen lassen, in Worte zu fassen, müssen wir aber ein paar Bemerkungen vorausschicken.

„Gleichstimmig“ nennen wir solche Subsumtionen, in deren Subsumtionszeichen der Bogen sich nach derselben Seite hin öffnet; dies sind z. B. alle bisherigen Subsumtionen, in welchen er es nach rechts that. Dagegen nennen wir „ungleichstimmig“ zwei Subsumtionen, in denen der Bogen nach verschiedenen Seiten schaut, deren eine also eine eventuelle *Unter*ordnung, deren andre eine eventuelle *Über*ordnung ausdrückt, wenn beide von links nach rechts gelesen werden.

In der Arithmetik herrscht der Gebrauch, die Anwendung der dort ebenfalls geltenden Theoreme 19) sowie schon 16) als eine Multiplikation resp. Addition der die Voraussetzung bildenden (beiden) Gleichungen schlechtweg zu bezeichnen. Dieses Verfahren ist schon in der Arithmetik nicht ganz korrekt, weil man ja in dieser Disziplin faktisch immer nur *Zahlen*, also niemals *Gleichungen* durch Rechnung verknüpft, und aus diesem Grunde haben auch schon einzelne Lehrer dagegen geeifert.

Die gedachte Ausdrucksweise ist jedoch in der Arithmetik entschuldbar und unverfänglich ja zweckmässig, indem sie in dieser Disziplin durchaus nicht missverstanden werden kann und einen in der Mathematik unbeschreiblich oft auszuführenden Prozess kurz und charakteristisch andeutet. Sie ist daselbst auch, wie gesagt, ganz allgemein üblich, und kein Mathematiker wird, wenn etwa die Gleichungen $a = b$, $a' = b'$, $a'' = b''$ vorausgeschickt sind, Bedenken tragen, zu sagen: *Multipliziren wir diese Gleichungen* miteinander, so entsteht $aa'a'' = bb'b''$, *summiren wir sie*, so kommt $a + a' + a'' = b + b' + b''$; desgl. zu sagen: Multipliziren wir die erste Gleichung mit c, so erhalten wir $ac = bc$, etc.

Diesen Gebrauch dürfen wir nun aber in den identischen Kalkul nicht unmodifizirt herübernehmen. Insoweit es sich nur um den Gebietekalkul handelt, wäre dies allenfalls noch angängig. Dazu werden wir aber im Aussagenkalkul zu lernen haben, wie Aussagen, Urteile, Behauptungen überhaupt, insbesondere also auch Subsumtionen und Gleichungen durch Multiplikation sowie Addition zu verknüpfen sind, und zwar in einem von dem oben besprochenen wesentlich verschiedenen, nämlich in dem richtigen, korrekten Sinne.

Solche Verknüpfung von Aussagen wird zu den häufigsten in unsrer Theorie vorzunehmenden Prozessen gehören. Da wird denn z. B. eine Gleichung $a = b$ wirklich zu multipliziren sein mit einer Aussage c, und das Produkt $(a = b) \cdot c$ wird etwas anderes, nämlich *mehr* besagen, als wie die Gleichung $ac = bc$. Ebenso wird uns das Produkt zweier Glei-

chungen $(a = b) \cdot (a' = b')$ bedeutend mehr ausdrücken als dass blos die Gleichung gelte $aa' = bb'$, u. s. w. — worüber des Näheren der Aussagenkalkul selbst zu vergleichen, insbesondre § 33, ξ).

Es ist deshalb unerlässlich, die mehrerlei Prozesse auch unterscheidend zu benennen. Und dieses geschieht unsres Erachtens am einfachsten und besten, wenn man behufs Beschreibung der früheren in unsern Theoremen als zulässig hingestellten Schlüsse dem Multipliziren resp. Addiren ein geeignetes Umstandswort, Adverb zugesellt. Das Adverb muss, wie sich zeigt, ein anderes sein, bei den Schlüssen der Theoreme 15) und 16) als bei denen von 17) bis 19). Für jene ist schon „*beiderseits*" gebräuchlich, für diese schlagen wir „*überschiebend*" vor (nicht unpassend erschiene auch „superponirend").

Es soll gesagt werden: Subsumtionen, Gleichungen (später überhaupt „Propositionen" — zunächst von einerlei Art) werden durch eine Operation „*überschiebend*" verknüpft, wenn man aus ihnen eine neue Subsumtion resp. Gleichung (Proposition derselben Art) dadurch ableitet, dass man sowol ihre linken Seiten als auch ihre rechten Seiten durch die gedachte Operation verknüpft.

Darnach dürfen wir nun erstlich die Theoreme 15) und 16) auch (nur wenig abweichend von der früheren Fassung) wie folgt aussprechen: Subsumtionen sowol als Gleichungen dürfen *beiderseits* mit demselben Symbol multiplizirt, resp. beiderseits um dasselbe Symbol vermehrt werden; es darf beiderseits dasselbe Symbol zu ihnen addirt werden; es darf auch ein Symbol *mit* einer Subsumtion oder Gleichung beiderseitig multiplizirt, es darf zu jenem diese beiderseitig addirt werden. Und zweitens:

Es liefern uns die Theoreme 17) bis incl. 19) darnach den allgemeinsten Satz:

In beliebiger Menge vorhandene sei es gleichstimmige Subsumtionen oder auch Gleichungen dürfen überschiebend mit einander multiplizirt, überschiebend zu einander addirt werden, und zwar ist das Ergebniss eine Gleichung nur, wenn unter den verknüpften Propositionen sich *keine* Subsumtion befindet, dagegen wieder eine mit den gegebenen gleichstimmige Subsumtion im andern Falle, d. i. wenn mindestens *eine* Subsumtion sich unter den verknüpften Propositionen vorfindet.

Würde man aber eine Gleichung $a = b$ mit einer andern $a' = b'$ *beiderseits* multipliziren, so erhielte man eine Aussage

$$a \cdot (a' = b') = b \cdot (a' = b')$$

die sich ebenfalls als eine im Aussagenkalkul gültige nachweisen lassen wird, und daselbst einen Sinn hat, der weder sich deckt mit dem des Ergebnisses der überschiebenden Multiplikation beider Gleichungen: $a \cdot a' = b \cdot b'$, noch mit dem des Ergebnisses ihrer Multiplikation (schlechtweg):

$$(a = b) \cdot (a' = b').$$

Man ersieht hieraus, dass auch die Umstandswörter „beiderseits" und „überschiebend" nicht verwechselt werden dürfen, nicht durch ein einziges Um-

standswort ersetzt werden können, und dass in der That in unserer Theorie es geboten erscheint, in beregter Hinsicht mehr als in der Mathematik auf korrekten Ausdruck zu halten!

Notabene: Multiplizirt man die Gleichung $a' = b'$ *beiderseits* mit $a = b$, so entsteht auch etwas anderes, wie wenn man die Gleichung $a = b$ *beiderseits* mit $a' = b'$ multiplizirte. Vergl. § 33, ξ) und o).

Zusatz 2. Kombinirte Anwendung der Theoreme $19_\times$) und 19_+) liefert den Satz, dass es in jedem Ausdruck, welcher nur durch die Operationen der identischen Multiplikation und Addition aufgebaut erscheint, *gestattet* ist, *Gleiches durch Gleiches* zu ersetzen. Sicherlich wird solche Ersetzung ohne Einfluss auf den *Wert* des Ausdrucks bleiben, wenngleich die *Form* desselben dadurch verändert werden mag.

Exempel. Ist $b + c = a$, so ist auch

$$a(b+c) + d + (b+c)c = aa + d + ac = a + ac + d = a + d.$$

Wie Venn[1] p. 146 und anderwärts bemerkt ist das der linkseitigen Kolumne von Sätzen 15) . . 19) zugrundeliegende Th. $15_\times$) bereits von Leibniz gegeben (Specimen demonstrandi, Erdmann, p. 99), der auch schon die Determination durch Nebeneinanderstellen der Symbole nach Art der Faktoren eines Produktes ausdrückt.

Die Theoreme des gegenwärtigen Paragraphen sind von so ausserordentlich häufiger Anwendung, dass es zu umständlich wäre, sie jedesmal zu citiren. Dieselben müssen in succum et sanguinem, in Fleisch und Blut des Rechners übergegangen sein.

§ 11. Gemischte Gesetze, den Zusammenhang zwischen beiden Operationen zeigend.

20) Theorem. *Eine jede von den beiden Gleichungen:*

$$a = ab \qquad , \quad a + b = b$$

ist nur eine Umschreibung der Subsumtion:

$$a \mathrel{=\!\!\!\in} b,$$

dergestalt, dass diese drei Aussagen äquivalent sind, einander gegenseitig bedingen: wenn irgend eine von ihnen gilt, so gelten auch die beiden andern.

Der Beweis besteht aus vier Teilen, indem zu zeigen ist, dass aus jeder der Gleichungen die Subsumtion und umgekehrt aus der Subsumtion eine jede von den Gleichungen folgt.

Ist $a = ab$, so folgt nach Def. (1) auch $a \mathrel{=\!\!\!\in} ab$, und weil nach Th. $6_\times$) auch $ab \mathrel{=\!\!\!\in} b$ ist, so folgt a fortiori:

$$a \mathrel{=\!\!\!\in} b.$$

Ist $a + b = b$, so haben wir auch $a + b \mathrel{=\!\!\!\in} b$, und weil nach 6_+) ohnehin $a \mathrel{=\!\!\!\in} a + b$ ist, so folgt nach II:

$$a \mathrel{=\!\!\!\in} b.$$

Ist $a \mathrel{=\!\!\!\in} b$, so kommt nach $15_\times$): $aa \mathrel{=\!\!\!\in} ab$, oder wegen $14_\times$): $a \mathrel{=\!\!\!\in} ab$. Da nun nach $6_\times$) ohnehin $ab \mathrel{=\!\!\!\in} a$ gilt, so ist nach Def. (1) bewiesen, dass $a = ab$ ist.

Ist $a \mathrel{=\!\!\!\in} b$, so kommt nach 15_+): $a + b \mathrel{=\!\!\!\in} b + b$, oder wegen 14_+): $a + b \mathrel{=\!\!\!\in} b$. Da nun nach 6_+) ohnehin $b \mathrel{=\!\!\!\in} a + b$ gilt, so ist $a + b = b$ nach (1) bewiesen.

Für Gebiete wird der vorstehende Satz durch die Figuren 1 und 2 versinnlicht.

Exempel für Klassen. Rappen sind Pferde. Also sind Pferde, welche Rappen sind, nichts anderes als Rappen. Desgl. Rappen oder Pferde sind schlechtweg Pferde. Es versteht sich, dass unsre Exemplifikationen noch in der mannigfaltigsten Weise vermehrt werden könnten.

Zusatz. Im Th. 20) ist mitenthalten das Theorem von Robert Grassmann, dass auch die beiden Gleichungen einander gegenseitig bedingen. Das nämliche gilt von den beiden Subsumtionen:

$$a \mathrel{=\!\!\!\in} ab \quad \text{und} \quad a + b \mathrel{=\!\!\!\in} b,$$

die ja mit solchen des Th. 6) in jene Gleichungen zusammenfliessen: *Auch diese beiden sind mit den drei obigen äquivalente Aussagen.* —

Schreiben wir nun die Subsumtionen der Def. (2): $0 \mathrel{=\!\!\!\in} a$ und $a \mathrel{=\!\!\!\in} 1$ nach Vorbild des Th. 20) in Gleichungen um, so erhalten wir augenblicklich die folgenden Theoreme (die als „reine" Gesetze erscheinen):

$21_\times$) Theorem. $a \cdot 1 = a$.

$22_\times$) Theorem. $a \cdot 0 = 0$.

21_+) Theorem. $a + 0 = a$.

22_+) Theorem. $a + 1 = 1$.

In Worten bezüglich:

Mit 1 *multipliziren ändert nichts,* oder: Der Faktor 1 kann nach Belieben gesetzt oder unterdrückt werden. (Darum heisst 1 der *Modul der Multiplikation.*)

Ein Produkt verschwindet, sobald ein Faktor desselben 0 *wird.*

Null addiren ändert nichts, oder: als Summand kann 0 nach Belieben zugefügt oder weggelassen werden. (Deshalb mag 0 auch der *Modul der Addition* genannt werden.)

Eine Summe nimmt den Wert 1 *an, sobald ein Term derselben gleich* 1 *wird.*

Die beiden letzten Sätze sind nämlich auch leicht auf *beliebig viele* Operationsglieder auszudehnen.

Durch die Voranstellung des Th. 20) haben wir hier die allerdings hübschen vier direkten Beweise, welche Peirce von diesen Sätzen gibt, *erspart.* Zum Überfluss seien auch diese hier reproduzirt.

Beweis von $21_\times$). Nach $6_\times$) ist $a \cdot 1 \mathrel{=\!\!\!\in} a$. Aus der Subsumtion von I: $a \mathrel{=\!\!\!\in} a$ nebst derjenigen (2_+): $a \mathrel{=\!\!\!\in} 1$

Beweis von 21_+). Nach I ist: $a \mathrel{=\!\!\!\in} a$, und nach $(2_\times)$ ist: $0 \mathrel{=\!\!\!\in} a$. Hieraus folgt nach dem Schema $(3_+)'$:

folgt ferner nach $(3_\times)'$: $a \mathrel{\substack{=\\ \in}} a \cdot 1$; womit der Satz kraft (1) bewiesen ist.

Beweis von $22_\times$). Nach $(2_\times)$ ist: $0 \mathrel{\substack{=\\ \in}} a \cdot 0$; nach $6_\times$) aber auch $a \cdot 0 \mathrel{\substack{=\\ \in}} 0$, also nach (1) der Satz erwiesen.

$a+0 \mathrel{\substack{=\\ \in}} a$. Dazu ist nach 6_+): $a \mathrel{\substack{=\\ \in}} a+0$, somit nach Def. (1) der Satz erwiesen.

Beweis von 22_+). Nach (2_+) ist, gleichwie jedes Gebiet, so auch das $a+1 \mathrel{\substack{=\\ \in}} 1$. Dazu nach 6_+) $1 \mathrel{\substack{=\\ \in}} a+1$, somit besteht die Gleichheit.

Für den Gebietekalkul ist die Gültigkeit der Sätze im Hinblick auf die Bedeutung von Produkt, Summe, 0 und 1 auch unmittelbar evident:

Was ein Gebiet der Mannigfaltigkeit mit der ganzen Mannigfaltigkeit gemein hat, ist ebendieses Gebiet selbst.

Was ein Gebiet mit nichts gemein hat, ist nichts.

Dasjenige, wozu ein Gebiet von weiter nichts ergänzt wird, ist dies Gebiet selber.

Dasjenige, wozu ein Gebiet der Mannigfaltigkeit durch die ganze Mannigfaltigkeit ergänzt wird, ist offenbar ebendiese.

Anmerkung 1 zu den Theoremen 21) und 22).

Nach 21_+) kann man jeden Ausdruck darstellen als eine Summe, deren eines Glied er selber, und dessen anderes Glied 0 ist. Auch einen Ausdruck, der gar nicht in Form einer Summe erscheint, ein beliebiges Symbol, kann man hienach jederzeit als eine Summe gelten lassen, dafür ausgeben, als eine solche behandeln, ansehen, betrachten. Insofern man aber den Summand 0 nicht ausdrücklich zu schreiben pflegt, nennt man in solchem Falle den Ausdruck, das Symbol, auch schlechtweg eine *eingliedrige Summe,* ein *„Monom"*. Dies gewährt den erheblichen Vorteil, dass man nun Regeln, die sich auf die Verknüpfung von Summen ebenso beziehen, wie auf diejenige von andern Symbolen (die keine Summen sind) einheitlich zusammenzufassen, für beide Fälle auf einmal darzustellen vermag, worauf wir gelegentlich bereits hinwiesen.

Nach $21_\times$) kann man ebenso jedes Symbol als ein Produkt hinstellen, dessen andrer Faktor 1 wäre, und da man letztern nicht zu schreiben pflegt, dasselbe als ein *einfaktoriges Produkt* bezeichnen.

Zusatz zu ebendiesen Theoremen 21, 22).

Kommen in einem Ausdruck die Symbole 0 und 1 irgendwieoft als multiplikative oder additive Operationsglieder vor, verknüpft mit irgendwelchen andern durch Buchstaben dargestellten Gebiets- oder Klassensymbolen, so wird allemal eine Vereinfachung des Ausdruckes

nach den Schemata 21) und 22) möglich und angezeigt erscheinen, und zwar ist leicht einzusehen, dass sich der vorausgesetzte Umstand des Vorkommens von 0 oder 1 — durch das fortgesetzte und nötigenfalls wechselnde Spiel der Berücksichtigung des jeweils einschlägigen von diesen Schemata — immer gänzlich beseitigen lässt, mit einziger Ausnahme des Falles, wo der ganze Ausdruck nach seiner Reduktion schliesslich selbst den Wert 0 oder 1 annimmt (d. h. sich herausstellt, dass er eben diesen Wert besitzen muss).

Es wird nämlich jede als Summand auftretende Null, sowie jede als Faktor auftretende 1 ohne weiteres zu unterdrücken sein. Wo dagegen die 0 als Faktor erscheint, tilge man das ganze Produkt, in welchem sie Faktor ist. Wofern nämlich dieses Produkt nicht etwa selbst der ganze Ausdruck ist (welcher dann vielmehr in 0 zu verwandeln wäre), muss es nämlich Summand sein; denn wenn es Faktor wäre, hätte man nicht das ganze Produkt genommen gehabt. Ebenso wo 1 als Summand auftritt, tilge man alle übrigen mit ihm verbundenen Summanden. Darnach muss diese 1 Faktor geworden sein, wofern sie nicht der resultirende Wert des Ausdrucks selbst ist, denn wenn sie abermals Summand wäre, hätte man ja die übrigen Summanden noch nicht vollständig getilgt gehabt.

In solcher Weise *reduzirt kann ein aus Gebietsymbolen mittelst Addition und Multiplikation aufgebauter Ausdruck*, sofern er nicht selbst in den Endwert 0 oder aber 1 sich zusammenzieht, *die Symbole* 0 *und* 1 *nicht* (weiter) *enthalten.*

Exempel. $(a+b+c)(a+b+d)(a+c+d)\cdot 0\cdot(1+b+c+d)=0,$

$$\{a(b+c)+d(a+c)\}(ab+cd)(bf+gh)+(1+ac)(1+gh)+(a+b)\cdot 0\cdot(c+d)+ad+bcd=1,$$

$$a+0+(a+1)(1+1)c(0+1)(1+d)+1\cdot\{a(bc+d+1)\cdot 1\cdot d\cdot 0+e\cdot 1\}(1+f+g+0)=a+c+e.$$

So wichtig die vier Sätze 21) und 22) für den Kalkul mit Klassen sich erweisen werden, so wenig Wert scheint es zu haben, dieselben in der Wortsprache für solche in Anspruch zu nehmen.

Mit Widerstreben fast bequeme ich mich zu dem Versuche, der mehr nur als eine Übung für den Leser in der verbalen Einkleidung von Formeln sich rechtfertigen dürfte.

$21_\times$) Was schwarz und zugleich irgend etwas ist, das ist schwarz, und vice versā.

$22_\times$) Was schwarz und zugleich nichts ist, muss nichts sein — dies wird allgemein zugegeben werden. Aber auch umgekehrt: Nichts ist nichts und zugleich schwarz — so wenig-

21_+) Was schwarz oder nichts ist, ist schwarz (und umgekehrt). Es wird sich freilich entgegnen lassen: es könne auch nichts sein. Dieses hebt aber unser Urteil keineswegs auf, da wir übereingekommen sind, unter den schwarzen Dingen auch das Nichts mitzubegreifen.

stens in gegenwärtiger Disziplin, in welcher wir übereingekommen sind, das Nichts in jeder Klasse, so auch in derjenigen der schwarzen Dinge mitenthalten zu denken.

22_+) Was schwarz oder irgend etwas ist, muss eben nur irgendetwas sein, und umgekehrt: Alles ist schwarz oder (sonst) irgend etwas.

Das Wort „nichts" könnte in vorstehenden Sätzen auch teilweise oder durchweg durch „ein rundes Quadrat" z. B. ersetzt werden.

Wir sehen, dass für die Sprache des gemeinen Lebens höchstens wol die Theoreme $22_\times$) und 21_+) beanstandet werden können, aber *nur* diese — durchaus nicht 22_+). Jene sind dort in der That cum grano salis zu nehmen.

Dem *Mathematiker* dagegen, der seine bei den Zahlen erworbenen Gewohnheiten in den identischen Kalkul unbesonnen herübernähme, müsste das Theorem 22_+) allein anstössig erscheinen. Die drei andern von den in Rede stehenden Theoremen konstatiren ja Formeln, die auch in der Arithmetik allgemeine Geltung haben.

Und der Umstand, dass die identische 0 *die (beiden) Grundeigenschaften* $a \cdot 0 = 0$ und $a + 0 = a$ mit der arithmetischen gemein hat, rechtfertigt es zweifellos, dass wir der Arithmetik das Zahlzeichen 0 behufs Darstellung unsres Nullgebietes, des absoluten „Nichts", entlehnten.

Dagegen vereinigt die „identische 1" in sich die Grundeigenschaft der arithmetischen 1, dass $a \cdot 1 = a$ ist, mit einer solchen „der absoluten Unendlich", gemäss welcher in der Mathematik $a + \infty = \infty$ gilt.

In rein formaler Hinsicht würde darnach ein aus 1 und ∞ zusammengesetztes Zeichen, wie etwa:



wol als das geeignetste erscheinen, um Dasjenige vorzustellen, was ich hier „die identische Eins" nenne.

Will man aber statt eines besondern Zeichens (wie Jevons' „Universe" U, R. Grassmann's „Totalität" T) der Einfachheit wegen eines der beiden Zeichen 1 und ∞ selbst hiezu verwenden, so gibt die formale Hinsicht keinen Ausschlag, welches von den beiden etwa vorzuziehen wäre.

Nun haben Boole und Andere stets, auch Herr Peirce früher, nur das Zeichen 1 benutzt. Neuerdings jedoch hat sich letzterer[5] samt seiner Schule — sekundirt durch Wundt[1] — für das Zeichen ∞ entschieden, sodass den Genannten also $a \cdot \infty = a$ gilt!

In sachlicher Hinsicht mag hiebei wol die Überlegung ausschlaggebend gewesen sein, dass das fragliche Zeichen die *ganze* Mannigfaltigkeit, auf deren Gebiete die Untersuchungen spielen, vorzustellen hat, und diese *häufig* „eine unendliche" ist, nämlich, wenn sie auch nicht immer ein unbegrenztes oder unendlich grosses Gebiet vorstellt, doch wenigstens unbegrenzt viele Elemente enthält. So enthält ja in der That die durchaus endliche und vollkommen begrenzte Fläche der Schultafel (z. B.) gleichwol unendlich viele Punkte.

Demungeachtet muss ich jenen Übertritt*) für einen Rückschritt halten

*) Als eine Wirkung dieser Schwenkung citire ich einen Herrn Peirce zugeschriebenen passus aus der verdienstlichen Abhandlung von Miss Ladd (Frau

und scheint mir für den *identischen* Kalkul mit Gebieten und Klassen sowol als mit Aussagen die 1 unbedingt den Vorzug vor der ∞ zu verdienen aus folgenden Gründen:

α) Während die Gleichung $a \cdot 1 = a$ für die Arithmetik eine fundamentale ist, spielt die Gleichung $a + \infty = \infty$ daselbst gar keine Rolle. Grund: die „absolute ∞" ist gar keine Zahl, sondern wird nur zeitweilig zum Zahlengebiet herangezogen um in der That den Mangel, das Nichtvorhandensein eines Zahlenwertes zu verdecken. Manche Leser dürften deshalb schon Anstoss daran genommen haben, dass ich überhaupt von „einer Unendlich" gesprochen. Die ∞ spielt in der Mathematik nur die Rolle eines *„Lückenbüssers"* (S. 240).

β) In den Anwendungen auf Wahrscheinlichkeitsrechnung (cf. De Morgan Boole, Peirce, Mac-Farlane, Mc Coll) entspricht die identische Eins immer dem bekannten Symbol, 1, der Gewissheit.

γ) In der Anwendung auf jede *endliche* Mannigfaltigkeit, d. i. auf eine solche, welche nur eine begrenzte Menge von Individuen, Elementen umfasst (Exempel: Feldergebiet eines Bogens karrirten Papiers) muss Denen, die sich aus dem angeführten Grunde für das Symbol ∞ entschieden haben, dieses ganz ebenso unpassend erscheinen, wie ihnen für eine unendliche Mannigfaltigkeit das Symbol 1 erschien.

δ) Zudem dürfte es sich aber auch empfehlen, das Symbol ∞ reservirt zu behalten für andere Zwecke: nämlich als *Symbol des Widerspruchs*, der *Unverträglichkeit*. Schon im identischen Kalkul — doch ist dies hier von geringem Belange — müsste man damit eigentlich die Ausdrücke $\frac{1}{0} = 0 - 1$ [vergl. § 23, σ)] darstellen. In gewissen andern Disziplinen indess, die mit dem identischen Kalkul nur verwandt sind, nicht zusammenfallen, ist es von hohem Werte, das Symbol ∞ zu dem angedeuteten Zwecke verfügbar zu haben. Speziell z. B. um die Unverträglichkeit gewisser Funktionalgleichungen, Algorithmen miteinander in Formeln zu setzen bedürfen wir dieses Zeichens, als des am angemessensten erscheinenden (vergl. Anhang 5, Beleg 7). *Im Grunde würde so der Gebrauch von ∞, statt 1, legitim eingeschränkt auf den Fall, wo die Elemente (und also auch die Gebiete) der ganzen Mannigfaltigkeit nicht alle verträglich sind miteinander.*

Dieser Fall aber ordnet sich nicht dem identischen Kalkul unter, sondern gibt mit Veranlassung zur Begründung eines neuen Kalkuls, des eigentlich „logischen" oder Kalkuls mit „Gruppen", in Bezug auf den wir sehen werden, dass er von einer gewissen Stelle an sich vom identischen abzweigt — vergl. § 12 und Anhang 4, 5 und 6.

Franklin) — vergl. Studies in logic, p. 19 —: „In any proposition of formal logic, ∞ represents what is logically possible; in a material proposition it represents what exists." Damit scheint mir doch — lucus a non lucendo — der Charakter des Symbols $\frac{1}{0}$ auf den Kopf gestellt zu werden!

Der Anfänger kann hier noch nicht in der Lage sein, die unter δ) rubrizirten Bemerkungen ganz zu verstehen, mithin die angeführten Gründe voll zu würdigen. Anders Derjenige, der schon das Buch durchgearbeitet haben wird. Für diesen müssen wir der Vollständigkeit wegen noch eines bemerken:

Im Aussagenkalkul werden ja auch Aussagen in Rechnung gezogen, die gemeinhin zu reden miteinander „unverträglich" sind, die *mit ihrem Sinne* einander „widersprechen". Es scheint demnach kraft des von mir unter δ) Gesagten das Verfahren des Herrn Peirce, die ganze Mannigfaltigkeit der Aussagen mit ∞ zu bezeichnen, auf den ersten Blick gerade gerechtfertigt zu sein. Und doch bestreite ich eben letzteres! Und dies mein Grund: Der Aussagenkalkul wird — wesentlich ganz in Übereinstimmung mit Peirce — von uns so angelegt werden, dass man die Aussagen (teilweise absehend von deren Sinne) jeweils in *Gebiete* umschreibt: in Gebiete von Zeitpunkten. Von einer Unverträglichkeit der letzteren miteinander (und in *diesem* Sinne also auch der zugehörigen Aussagen) kann dann so wenig die Rede sein, wie von einer Unverträglichkeit, einem „Widerspruch zwischen den Punkten einer geraden Linie".

In der That wird dieser Aussagenkalkul auch nur ein Unterfall sein des identischen Kalkuls mit Gebieten einer Mannigfaltigkeit *von unter sich verträglichen* Elementen.

Ein Beispiel dagegen des „logischen" Kalkuls, der einen wesentlich andern Anblick darbieten wird, liefert erstmals der logische Kalkul mit Funktionalgleichungen, Algorithmen und Kalkuln, auf den wir in Anhang 4 und 5 eingehen.

Aus diesen Gründen sei die Beibehaltung der (Boole'schen) 1 *empfohlen und hier bethätigt.*

$23_\times$) Theorem. *Stets ist:*

$$a(a+b) = a.$$

Beweis 1. Nach I ist $a \mathrel{\leqslant} a$, zugleich nach 6_+): $a \mathrel{\leqslant} a+b$.

Aus diesen beiden Subsumtionen folgt nach Def. $(3_\times)'$:

$$a \mathrel{\leqslant} a(a+b).$$

Umgekehrt ist aber auch nach $6_\times$):

$$a(a+b) \mathrel{\leqslant} a.$$

23_+) Theorem. *Stets ist:*

$$a + ab = a.$$

Beweis 1. Nach I ist $a \mathrel{\leqslant} a$, zugleich nach $6_\times$): $ab \mathrel{\leqslant} a$, woraus nach Def. $(3_+)'$ folgt:

$$a + ab \mathrel{\leqslant} a.$$

Dazu ist nach 6_+) direkt:

$$a \mathrel{\leqslant} a + ab.$$

Hiemit ist denn nach Def. (1) die Gleichheit erwiesen.

Beweis 2. Nach 6) ist: $ab \mathrel{\leqslant} a \mathrel{\leqslant} a + b$ und die erste dieser beiden Subsumtionen lässt sich nach dem einen Teil des Th. 20) umschreiben in die Gleichung 23_+), die zweite Subsumtion, nach dem andern Teil von 20), in die Gleichung $23_\times$). —

Von den beiden Theoremen 23) ist — aus einem erst unter 28) darzulegenden Grunde — das zweite 23_+) von der grösseren Wichtigkeit. Es genügt, von beiden nur dieses für den Gebrauch beim Rechnen sich einzuprägen, weshalb wir dasselbe auch allein in Worte kleiden wollen: *Solche Glieder einer Summe, welche ein anderes Glied derselben zum Faktor haben, können jeweils* unterdrückt, gestrichen, *weggelassen werden*, sie gehen in dem letzteren ein, werden von ihm gewissermassen verschluckt, einverleibt oder *absorbirt* — weshalb man das Th. 23_+) auch als das „Absorptionsgesetz" des identischen Kalkuls bezeichnen kann. *Umgekehrt kann man* natürlich *auch ein beliebiges* (Gebiets- oder Klassen-)*Symbol um das Produkt desselben in irgend welche andere Symbole* auf Wunsch additiv *vermehren*, ohne dass dies von Einfluss auf die Bedeutung des Ausdrucks wäre, in welchem jenes Symbol vorkommt.

Für irgend zwei Gebiete a, b ist die Gültigkeit der Theoreme 23) auch unmittelbar anschaulich.

Exempel für Klassen: Die Adeligen, welche adelig oder auch besitzend sind, müssen eben die Adeligen sein. Die Adeligen und die besitzenden Adeligen sind einfach die Adeligen.

Der Ausdruck: „Pferde oder auch Rappen (schwarze Pferde)" sagt weiter nichts, als der kürzere Ausdruck: „Pferde".

Freilich, wenn jemand erzählte, es seien (bei einer gedachten Gelegenheit) „Pferde und Rappen" zu sehen gewesen, so würde er *mehr* sagen, als wenn er blos erzählte, es seien „Pferde" zu sehen gewesen; es wäre nämlich im erstern Falle positiv behauptet, dass unter den Pferden auch (einige) Rappen bemerkbar gewesen seien, während im zweiten Falle hierüber nichts ausgesagt, also das Gegenteil auch als möglich offen gelassen ist. Wie ein solcher Ausspruch in der logischen Zeichensprache darzustellen wäre, würde sich erst nach dem Eingehen auf die partikularen und Existenzial-Urteile angeben lassen, dann aber dem Studirenden auch keine Schwierigkeit mehr bereiten.

Aufgaben. Den Ausdruck zu vereinfachen:

$$abc(b+c) + (cd+a+def)\,a$$

Resultat: a.

Desgleichen die Ausdrücke:

$$ab\,(a+b),\quad a+b+ab,\quad abc\,(a+b+c),\quad a+b+c+ab+ac+bc+abc.$$

Endergebnisse bezüglich: ab, $a+b$, abc, $a+b+c$.

$24_\times$) Theorem. *Wenn*

$$1 = ab$$

ist, so muss auch sein:

$$1 = a \quad \textit{und} \quad 1 = b.$$

24_+) Theorem. *Wenn*

$$a + b = 0$$

ist, so muss auch sein:

$$a = 0 \quad \textit{und} \quad b = 0.$$

Ein Produkt kann nicht anders gleich 1 werden, als indem jeder Faktor desselben gleich 1 wird.

Beweis 1. Laut Voraussetzung ist nach Def. (1):

$$1 \Subset ab,$$

und da nach Th. $6_\times$)

$$ab \Subset a$$

ist, so folgt nach II auch:

$$1 \Subset a,$$

somit nach Th. 5_+):

$$1 = a.$$

Analog beweist man auch, dass $1 = b$ ist; zudem folgt dies nach $21_\times$) als Rückstand aus der Voraussetzung, nachdem schon $a = 1$ bewiesen ist.

Eine Summe kann nur dann verschwinden, wenn ihre Glieder sämtlich gleich 0 werden.

Beweis 1. Laut Voraussetzung ist nach Def. (1):

$$a + b \Subset 0.$$

Aber nach Th. 6_+) ist

$$a \Subset a + b,$$

folglich nach II:

$$a \Subset 0,$$

nach Th. $5_\times$) also

$$a = 0.$$

Analog beweist man auch, dass $b = 0$ ist; desgl. folgt dies nach 21_+) als Rückstand aus der Voraussetzung, nachdem bereits $a = 0$ bewiesen ist.

Beweis 2. Nach Def. $(3_\times)$ resp. (3_+) sagt die Subsumtion

$$1 \Subset ab \quad | \quad a + b \Subset 0$$

ganz das nämliche aus, wie die beiden Subsumtionen:

$$1 \Subset a \quad \text{nebst} \quad 1 \Subset b \quad | \quad a \Subset 0 \quad \text{nebst} \quad b \Subset 0$$

zusammen, und nach Th. $5_\times$) resp. 5_+) sind diese Subsumtionen alle drei je für sich äquivalent den entsprechenden Gleichungen in unserm zu beweisenden Satze.

Beweis 3. Beiderseitige Addition von a zu der Voraussetzung nach 15_+) gibt wegen 22_+):

$$1 = ab + a$$

also nach 23_+):

$$1 = a,$$

etc.

Beweis 3. Multiplikation der Voraussetzung beiderseits mit a gemäss $15_\times$) gibt wegen $22_\times$):

$$a(a + b) = 0,$$

also nach $23_\times$):

$$a = 0,$$

etc.

Anmerkung. Nach Th. 5) hätten auch die Gleichheitszeichen in der Voraussetzung unseres Satzes (desgleichen überall in demselben) durch das Subsumtionszeichen ersetzt werden können.

Mit Beweis 1 konnte das Theorem schon viel früher aufgeführt

werden, dicht hinter Th. 6), wenn man will; mit Beweis 2 sogar noch vor dem letztern.

Zusätze. Da aus den zwei letzten (den behaupteten) Gleichungen des Satzes auch umgekehrt die erste (die vorausgesetzte) nach 18) und 21) folgt, so kann man sagen, dass diese eine Gleichung äquivalent ist dem System der beiden andern, simultan als gültig hingestellten. Insbesondre also sagt rechterhand die eine Gleichung $a + b = 0$ genau dasselbe aus, wie die beiden Gleichungen $a = 0$ und $b = 0$ zusammen genommen; denn aus jener folgen diese beiden, und aus diesen beiden folgt umgekehrt auch jene. Aus einem bald näher darzulegenden Grunde besitzt dieser Satz wiederum grössere Wichtigkeit als sein duales Gegenstück.

Wir haben auch in der Arithmetik Analoga zu dem erwähnten Satze. So ist, wenn a und b reelle Zahlen bedeuten und i die imaginäre Einheit vorstellt, bekanntlich die Gleichung $a + ib = 0$ äquivalent dem Gleichungenpaare: $a = 0$, $b = 0$ Desgleichen können diese letzteren beiden in die eine Gleichung $a^2 + b^2 = 0$ zusammengezogen werden, indem im reellen Zahlengebiet auch eine Summe von Quadraten nicht anders verschwinden kann, als indem ihre Terme (somit auch die Grundzahlen dieser Quadrate selbst) sämtlich verschwinden. Die Geltung des Th. 24_+) weist darauf hin, dass es im identischen Kalkul nichts geben wird, was den negativen Zahlen der Arithmetik analog wäre. Namentlich kann es hier keine Gebiete geben, die als Summanden oder Addenden zu einmal gesetzten Gebieten hinzugefügt, diese wieder aufhöben. Es würden solche Gebiete sich hier auch nicht fingiren lassen, ohne dass die fundamentalen Gesetze des Kalkuls umgestossen werden müssten. Gleichwol verfügt auch der identische Kalkul über die Mittel, eine Ausschliessung, Ausnahme oder Exception vorzunehmen, worüber die einschlägigen Betrachtungen in § 23 zu vergleichen sein werden.

Die Ausdehnung der Sätze 24) von zweien auf beliebig viele Operationsglieder und Gleichungen ist leicht zu bewerkstelligen und naheliegend.

So wird z. B. die Gleichung $a + b + c = 0$ das nämliche aussagen, wie die drei Gleichungen $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$ zusammen. Denn man kann die dreigliedrige Summe $a + b + c$ zunächst darstellen als eine zweigliedrige: $(a + b) + c$. Die Anwendung des für Binome bewiesenen Th. 24_+) auf die Gleichung $(a + b) + c = 0$ zerfällt diese zunächst in die beiden Gleichungen $a + b = 0$ nebst $c = 0$, und die erstere von diesen wird durch abermalige Anwendung des Th. 24_+) noch in $a = 0$ nebst $b = 0$ gespalten. Und so weiter.

Eine beliebige Menge von Gleichungen, deren eine Seite 0 (resp. 1) ist, *lässt sich* demnach *stets in eine einzige solche Gleichung zusammenziehen und durch diese ausreichend vertreten.*

Exempel für Klassen.

Wenn die Aussage wahr ist: „Alles der Wirklichkeit 1 Agehörige ist ein Räumliches a (d. i. *irgendwo vorhanden* sei es gewesen, sei es gegenwärtig existirend oder künftig in's Dasein tretend) und ein Zeitliches b (*irgendwann* vorhanden)", so gelten auch die beiden Aussagen: „Alles Wirkliche ist als ein Räumliches irgendwo vorhanden (sc. gewesen, existirend oder künftig)" und: „Alles Wirkliche ist als ein Zeitliches irgendwann vorhanden". Und umgekehrt ziehen diese beiden letzteren Sätze den vorhergehenden nach sich.

Der Satz: „Es gibt keine Drachen, Hexen und Gespenster" sagt dasselbe, wie die drei Sätze: „Es gibt keine Drachen". „Es gibt keine Hexen". „Es gibt keine Gespenster".

25) Die beweisbare Subsumtion des Distributionsgesetzes. Es ist allgemein:

$25_\times$) Theorem.

$$ab + ac \Subset a(b+c).$$

25_+) Theorem.

$$a + bc \Subset (a+b)(a+c).$$

Ich gebe für diese Sätze zwei ganz verschiedene Beweise.

Beweis 1. Nach 6_+) ist:

$$b \Subset b + c \quad \text{und} \quad c \Subset b + c$$

somit nach $15_\times$):

$$ab \Subset a(b+c), \; ac \Subset a(b+c).$$

Hieraus aber folgt nach Def. (3_+) der zu beweisende Satz.

Beweis 2. Nach $6_\times$) ist:

$$ab \Subset a \quad \text{und} \quad ac \Subset a,$$

woraus nach Def. (3_+):

$$ab + ac \Subset a.$$

Analog ist:

$$ab \Subset b \quad \text{und} \quad ac \Subset c$$

sonach gemäss 18_+):

$$ab + ac \Subset b + c$$

Aus dem vorigen Ergebniss in Verbindung mit diesem fliesst nach Def. ($3_\times$) die behauptete Subsumtion.

Beweis 1. Nach $6_\times$) ist:

$$bc \Subset b \quad \text{und} \quad bc \Subset c$$

somit nach 15_+):

$$a + bc \Subset a + b, \; a + bc \Subset a + c,$$

und hieraus folgt nach Def. ($3_\times$) die zu beweisende Subsumtion.

Beweis 2. Nach 6_+) ist:

$$a \Subset a + b \quad \text{und} \quad a \Subset a + c,$$

woraus nach Def. ($3_\times$):

$$a \Subset (a+b)(a+c).$$

Analog ist:

$$b \Subset a + b, \; c \Subset a + c$$

somit nach $18_\times$):

$$bc \Subset (a+b)(a+c)$$

Aus den gewonnenen beiden Resultaten fliesst nach Def. (3_+) der zu beweisende Satz.

Zusätze. Wieder gestattet uns das Kommutationsgesetz, in den bewiesenen Formeln sowol Faktoren als Glieder beliebig umzustellen, und dadurch denselben noch andere Gestalten zu geben. Namentlich sei hervorgehoben, dass auch:

$$ba + ca \Subset (b+c)\,a \qquad \Big| \qquad bc + a \Subset (b+a)\,(c+a)$$

fortan gelten muss.

Die Ausdehnung der Sätze auf die identische Addition beliebig vieler Terme mit gemeinsamem Faktor, resp. Addition eines Terms zu einem Produkt von beliebig vielen Faktoren, ist naheliegend, und leicht zu beweisen. So haben wir auch:

$$ab + ac + ad \Subset a\,(b+c+d) \qquad \Big| \qquad a + bcd \Subset (a+b)\,(a+c)\,(a+d),$$

und so weiter. —

Die Rechtfertigung der oben den Theoremen 25) gegebenen Überschrift, und die Exemplifikation dieser Sätze durch Klassen, verschieben wir auf die nächste Vorlesung. Desgleichen verzichten wir darauf, die Sätze schon in Worten zu formuliren, aus Gründen, die daselbst zutage treten werden.

Sechste Vorlesung.

§ 12. Nichtbeweisbarkeit der zweiten Subsumtion des Distributionsgesetzes und Unentbehrlichkeit eines weiteren Prinzipes. Prinzip zur Vertretung des unbeweisbaren Satzes.

Setzen wir einen Augenblick den Fall, es würden sich auch die beiden folgenden Formeln *beweisen* lassen, die ich zwar noch *nicht als Theoreme* bezeichnen aber (vorgreifend) mit den jetzt fälligen Chiffren numeriren will:

$26_\times$) $\quad a(b+c) \Subset ab+ac$ | 26_+) $\quad (a+b)(a+c) \Subset a+bc$,

so würden im Hinblick auf Th. 25) nach Def. (1) auch die Gleichungen gelten müssen:

$27_\times$) $\quad a(b+c) = ab+ac$ | 27_+) $\quad a+bc = (a+b)(a+c)$,

deren erste mit dem *„Distributionsgesetze"* der Arithmetik zusammenfällt. Und umgekehrt: wenn die Formeln 27) als Gleichungen gelten, so sind nicht nur die Subsumtionen 25) sondern auch die 26) kraft Def. (1) als allgemeine Formel wahr.

Auch diese Formeln 26) und 27) wären wieder von zweien leicht auf mehr als zwei Operationsglieder auszudehnen, und hätte man bei 27), z. B. linkerhand, für drei Operationsglieder:

$$a(b+c+d) = ab+ac+ad$$

und so weiter. Der Beweis wäre zu führen, indem man die dreigliedrige Summe $b+c+d$ zunächst als eine zweigliedrige $(b+c)+d$ kraft 13_+) darstellte und dann zweimal nacheinander, zuerst auf diese binomische Summe selber, sodann auf ihren ersten Term $b+c$, das Schema $27_\times$) anwendete. Man hat also zu schliessen:

$$a(b+c+d) = a\{(b+c)+d\} = a(b+c)+ad = (ab+ac)+ad = \\ = ab+ac+ad.$$

Um darnach für eine viergliedrige Summe $b+c+d+e$ den Satz zu beweisen, hätte man auch diese wieder als eine binomische darzustellen, z. B. in Gestalt von $(b+c+d)+e$. Etc.

Auf ihre Gültigkeit — die sich bald offenbaren wird — wollen wir die Formeln 27) erst nachher prüfen und uns zunächst damit be-

schäftigen, dieselben in Worte zu kleiden, so, wie man behufs ihrer Anwendung im identischen Kalkul gut thut, sie sich einzuprägen.

Jede als eine allgemeine Formel geltende *Gleichung* des Kalkuls lässt sich in zweierlei Weise, nämlich im Sinne von links nach rechts, sowie im entgegengesetzten Sinne, anwenden, und liefert, zum Zwecke dieser Anwendungen in Worte gefasst, demgemäss auch *zwei* Sätze: den einen (wie wir sagen können) vorwärts gelesen, den andern indem sie rückwärts gelesen wird. Die Formel drückt nämlich [im Hinblick auf den Zusatz zu Th. 2), 3), auf Zus. 2 zu Th. 19) und später noch dessen Verallgemeinerung Zus. 2 zu Th. 32)] die Erlaubniss aus, gelegentlich die eine Seite der Gleichung durch die andere zu ersetzen, also entweder die linke Seite derselben durch die rechte, oder, falls es beliebt, umgekehrt den Ausdruck zur rechten durch den zur linken Hand befindlichen.

Von links nach rechts gelesen lehrt die Gleichung $27_{\times}$) oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Gleichung: $(b+c)a = ba + ca$, *dass eine Summe mit einem Symbol multiplizirt werden kann, indem man jedes Glied der Summe mit ihm multiplizirt und die Ergebnisse (Einzelprodukte, „Partialprodukte") addirt (summirt).* Kürzer gesagt: die Multiplikation einer Summe kann *„gliedweise"* an dieser ausgeführt werden.

Ein Faktor, mit welchem eine Summe behaftet erscheint, *„verteilt"* sich darnach auf die Glieder der Summe — so jedoch, dass jedes Glied den *ganzen* Faktor bekommt. Und unter diesem Gesichtspunkt erscheint die Bezeichnung des Satzes $27_{\times}$) als *„Distributionsgesetz"* gerechtfertigt.*)

Freilich ist die Art der „Verteilung" eine eigentümliche, wie wir sie übrigens schon bei der distributiven Verwendung der Gemeinnamen in B der Einleitung kennen gelernt haben. Auf dem Gebiete der materiellen Welt dürfte solche Distribution oder distributive *V*erteilung, bei welcher jeder an ihr Teilnehmende, Partizipirende das zur Verteilung gelangende Objekt ganz und un*ge*teilt für sich erhält, ohne dass es darum doch den andern Partizipanten vorenthalten würde, kaum ein Analogon finden — es sei denn (annähernd) etwa bei der Austeilung, dem Weitergeben von Feuer — beispielsweise der Cigarre —, von Fermenten, auch der Verbreitung von Ansteckungsstoffen. Wohl aber vollziehen sich distributive Verteilungen auf dem geistigen Gebiete: in Gestalt der — wie die Sprache zu sagen vorzieht — „*Mit*teilung" von Gedanken. Charakteristisch ist hiebei, dass Derjenige, der einen klugen Einfall z. B. Andern mitteilt, ihn dadurch selber

*) Dieselbe soll nach Hankel[1] und Herrn Bruce Halstead wahrscheinlich von William Rowan Hamilton (im Cambridge & Dublin Mathematical Magazine) als *erster* Quelle herrühren. Von Servois[1] stammen nur die Namen „Kommutations"- und „Assoziationsgesetz".

nicht verliert, während doch ein Jeder des ganzen Einfalles oder Gedankens teilhaftig geworden, und auf diesem Umstand beruhen wesentlich die grossen Vorteile des sog. Gedankenaustausches (eventuell auch die Nachteile, z. B. bei Verleumdung). Wenn in einer Gesellschaft von hundert Personen Jeder auch nur *einen* klugen Gedanken hat und ihn den Andern mitteilt, so geht ein Jeder mit hundert klugen Gedanken nach Hause*)! Der Verteilungsprozess ist hierbei untrennbar verbunden mit einer Vervielfältigung, mit einem wiederholten Inexistenztreten des Verteilungsobjektes. Eine Geldsumme z. B. lässt unter die Anwesenden in dieser Weise sich leider nicht verteilen.

Die Anwendung der Formel $27_\times$) in dem ebenerwähnten Sinne heisst *Ausmultipliziren;* man sagt, dass man die Summe $b + c + \cdots$ „mit a ausmultiplizire", wenn man das Produkt $(b + c + \cdots)\, a$ in $ba + ca + \cdots$ verwandelt.

Man sagt in der Arithmetik auch, das Produkt werde „entwickelt", doch wird man auf diese Ausdrucksweise *hier* besser verzichten, weil wir dieselbe in § 20 in einem andern Sinne einzuführen haben. Der Engländer verfügt hier über das Wort *„expanded"* zum Unterschiede von „developped".

Soll $a(b + c + d \cdots)$ ausmultiplizirt werden, so *„geht man mit dem Faktor a"* in Gedanken *„in die Klammer hinein"*, und lässt ihn bei dem ersten Gliede auf welches man stösst gewissermassen hängen. Ohne aber dadurch seiner Begleitung verlustig zu gehen, wandert man mit ihm weiter, um ihn auch bei dem zweiten Gliede haften zu lassen, und so fort.

Die umgekehrte Anwendung der Formel, wobei man also eine Summe $ba + ca + da \cdots$ in das Produkt $(b + c + d \cdots)a$ zusammenzieht, heisst das „Ausscheiden des gemeinsamen Faktors" a. Rückwärts gelesen also liefert uns die Formel $27_\times$) den Satz: *Wenn die Glieder einer Summe einen „gemeinsamen"* (genauer blos: *übereinstimmenden*) *Faktor „enthalten"***), *so kann man denselben „ausscheiden", d. h. ihn neben eine Klammer setzen, in welche die Summe der andern Faktoren geschrieben wird.*

Damit dies korrekt sei, muss indess jedes Glied der gedachten Summe als ein *„binäres"*, d. i. aus nur *zwei* Faktoren bestehendes, Produkt angesehen werden, dessen einer Faktor der in allen Gliedern laut Voraussetzung übereinstimmend vorhandene oder „gemeinsame" Faktor

*) Volkstümliches Argument des unvergesslichen Dr. Faucher, auf die Anwesenden bei der Gründung eines Arbeiterbildungsvereines exemplifizirend vorgebracht.

**) Soll heissen: „als Operationsglied enthalten", keineswegs aber im Sinne einer Überordnung oder Supersumtion, statt welcher im Gegenteil bei den Gliedern gegenüber dem Faktor eine Unterordnung, Subsumtion vorläge. Für „enthalten" sage man darum unverfänglicher: „haben", *„besitzen"*.

ist. Bestand also ein Glied aus vielen Faktoren, so wird in ihm, nach Abtrennung des „gemeinsamen“ erst das Produkt der übrigen Faktoren den „andern“ Faktor vorstellen, von welchem in obiger Erklärung die Rede war (durchaus nicht dürfte die Summe von dessen Teilfaktoren gebildet werden).

Wie an dem Beispiel der Formel $27_\times$) zu sehen ist, können die beiden Sätze, welche eine Formel vor- und rückwärts gelesen liefert, gänzlich verschieden klingen. Dies wird sich sogar als die Regel erweisen. Gleichlauten, m. a. W. in *einen* Satz zusammenfallen, müssen die beiden nur dann, wenn die Formel symmetrisch ist, d. h. die eine Seite der Gleichung durch blosse Buchstabenvertauschung in die andere übergeführt werden kann, was dann nebenbei gesagt (durch die entgegengesetzte Vertauschung) auch immer umgekehrt der Fall sein muss. Es war dies unter den bisherigen Formeln oder Theoremen nur bei den Kommutationsgesetzen 12) der Fall.

Die Formel $27_\times$) werden wir *„das duale Gegenstück des Distributionsgesetzes“* nennen.*) Dass sie dies wirklich ist, nämlich durch blosse Vertauschung von „plus“ und „mal“ aus dem (eigentlichen) Distributionsgesetze hervorgeht, erkennt man deutlichst, wenn man in beiden Formeln die unterdrückten Malzeichen nebst den gesparten, mental zu ergänzen gewesenen Klammern ausdrücklich anschreibt:

$27_\times$) $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ | 27_+) $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$.

Auch die Formel 27_+) ist von distributivem Charakter; sie zeigt, dass ein Summand, welcher zu einem Produkte tritt, sich auf die Faktoren des letzteren „verteilt“. *Statt ein Symbol zu einem Produkt zu addiren, kann man es zu jedem Faktor desselben addiren und die Ergebnisse (Einzelsummen) miteinander multipliziren.* Umgekehrt: *Wenn die Faktoren eines Produktes einen übereinstimmenden Term* (Summanden) *enthalten, so lässt sich das Produkt reduziren auf diesen Term vermehrt um das Produkt der restirenden Terme* in den als nur zweigliedrige oder *„binomische“* Summen anzusehenden Faktoren.

Von diesen beiden Sätzen ist wol der letztere für die Technik des identischen Kalkuls noch von einigem Werte. Wie sich zeigen wird, lässt aber die Anwendung des Th. 27_+) sich überhaupt umgehen, und kann man schon mit dem Distributionsgesetze $27_\times$) auskommen.

In der Arithmetik gilt die Formel 27_+) *nicht;* hier stehen Multiplikation und Addition nur *in einseitig distributivem Zusammenhange:* die

---

*) In [2] glaubte ich, dieselbe entdeckt zu haben; jedoch war mir Herr Peirce in [14] zuvor gekommen.

Multiplikation verhält sich distributiv zur Addition, aber nicht umgekehrt. *Im identischen Kalkul* dagegen *stehen Addition und Multiplikation in gegenseitig distributivem Zusammenhange.*

Da die Formel $27_\times$) die beiden vorhergehenden Subsumtionen $26_\times$) und $25_\times$) ohnehin umfasst, so verlohnt es natürlich nicht, diese beiden, weniger besagenden Sätze einzeln in Worte zu kleiden und sich gesondert einzuprägen, sondern wird es vorzuziehen sein und hinreichen, dies nur mit dem inhaltreicheren Satze $27_\times$) zu thun. Wir durften daher auf jenes verzichten, und begnügen wir uns, das letztere gethan zu haben.

Dass nun die Formeln 27) — und damit auch die vorhergehenden 26) — *in der That Geltung haben, lehrt* für die bisher als anschauliches Substrat benutzten Flächengebiete oder Klassen von Punkten der Ebene zunächst *die Anschauung.* Man überzeugt sich nämlich sonder Mühe, dass sowol die *linke* als die *rechte* Seite einer jeden Gleichung 27) bezüglich *denselben* in der folgenden Figur schraffirten Teil der Gebiete a, b, c vorstellt:

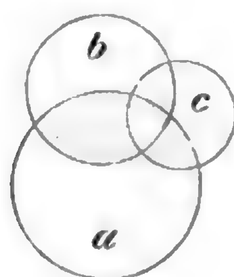


Fig. $15_\times$.

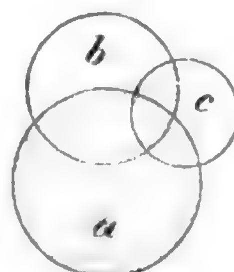


Fig. 15_+.

Die Anschauung konnte auch benutzt werden um *alle* bisherigen Sätze des Gebietekalkuls unmittelbar als richtig zu erkennen. Doch wird man zugeben, dass dies kein *Beweis* derselben sein würde, unter welchem ja ihre (bewusste) Zurückführung auf die bisherigen Definitionen (1) bis (3) durch zwingende nach den Prinzipien (I und II) ausdrücklich erfolgende Schlüsse zu verstehen ist.

Sonach erscheinen auch die Sätze 27) bis jetzt noch als unbewiesen.

Die *Unmöglichkeit*, ihren Beweis *auf der Grundlage des Bisherigen* zu leisten, kann völlig ausser Zweifel gestellt werden auf eine Weise, die ich jetzt auseinandersetzen will.

Ein solcher „negativer" Beweis kann nur durch *Exemplifikation* geleistet werden.

Eine allgemeine Behauptung wird als in dieser Allgemeinheit ungültig erwiesen sein, sobald man auch nur ein einziges Beispiel nachweist, für

welches sie nicht zutrifft, und dieses *für sie selbst oder eine ihrer Konsequenzen* zu thun, erscheint als der einzige Weg, ihre Ungültigkeit zu beweisen. Im letztern Fall hat man dafür einen sog. *„apagogischen"* oder *„indirekten" Beweis*, die *„reductio ad absurdum"* — wovon sich jene Exemplifikation auch als ein spezieller Fall würde hinstellen lassen, in Anbetracht, dass die Geltung der Behauptung für das Beispiel ja eine Konsequenz ist ihrer allgemeinen Geltung.

Handelt es sich insbesondre um den Nachweis der Ungültigkeit einer *Folgerung* selbst, und zwar einer angeblichen Beweisführung für einen materiell richtigen Satz, so bleibt nur der Weg des unmittelbaren Exemplifizirens offen und kommt folgendes in Betracht.

Dass ein Satz A aus einer Gruppe von Definitionen, Axiomen und Sätzen B *nicht* mit Notwendigkeit folgt, wird jedenfalls dann unzweifelhaft erwiesen sein, wenn es gelingt, ein Gebilde als wirklich oder denkmöglich nachzuweisen, welches die Definitionen, Axiome (und Sätze) der Gruppe B sämtlich bewahrheitet und gleichwol den Satz A nachweislich *nicht* erfüllt — kurz: wenn man zeigt, dass irgendwo die Sätze B *ohne* A geltend vorkommen. Dann in der That kann A von B nicht bedingt werden.

In unserm vorliegenden Falle brauchen wir den Beweis der Nichtbeweisbarkeit nur etwa für die Formel $26_\times$) zu führen. Für die 26_+) ergibt sich derselbe alsdann als ein selbständiger ganz ebenso *dual entsprechend*, oder auch als ein vom vorigen abhängiger in unmittelbarer Zurückführung auf diesen auf Grund einer am Anfange des nächsten Paragraphen folgenden Bemerkung.

Der Satz A wird so die Formel $26_\times$), die Gruppe B aber den ganzen Inhalt der Paragraphen 4, 5, 6, 10, 11 vorstellen.

Es empfiehlt sich vielleicht, das Wesen dieser Schlüsse durch ein einfacheres Beispiel zu illustriren. Ich wähle folgendes Sophisma (aus Keynes[1]):

B { Du bist nicht das, was ich bin.
Ich bin ein Mann,

folglich: A) bist du nicht ein Mann (kein Mann).

Sagt dies ein Mann zu irgend jemand, so sind die Prämissen B des ausgeführten Schlusses richtig. Sagt er es zu einer Frau, so ist auch die Konklusion, der Schlusssatz B materiell richtig, und dennoch ist der Schluss unberechtigt, formell falsch! Dies wird erkannt, wenn man es ihn zu einem Manne sagen lässt, wo dann eben die Konklusion auch materiell unrichtig sein wird.

Es kann auch in der Anwendung des Satzes auf eine Frau die Unrichtigkeit des Schlusses als solchen nachgewiesen werden, indem man das Wort „Mann" durchweg durch das Wort „Mensch" ersetzt. Würde eine vom Denkinhalte unabhängige Denknotwendigkeit von den Prämissen B zur Konklusion A hinüberführen, so müsste dies gleichermassen der Fall sein, durch welches andre nomen man auch irgend ein in der Schluss-

folgerung auftretendes nomen ersetzte. Die Folgerung müsste nach einem allgemeingültigen *Schema* vor sich gehen.

Dieses ist hier, wie gezeigt, nicht der Fall, und der Schluss demnach ein „Fehlschluss“ resp. „Trugschluss“, d. i. eben gar kein wirklicher „Schluss“. (Der vorgeschrittenere Leser wird später leicht diesen speziellen Trugschluss auch nach den Regeln der Logik zu analysiren vermögen; derselbe läuft hinaus auf eine Verwechselung von Gleichheits- und Subsumtionszeichen.) —

Dergleichen „*negative*“ Beweise, Beweise für die Unzulässigkeit einer gewissen Folgerung oder die Unmöglichkeit eines gewissen Beweises, sind gewöhnlich nicht ganz leicht zu geben. Dies wird auch in unserm Falle zu sehen sein.

Als an ein berühmtes Vorbild sei hier noch daran erinnert, wie durch die Arbeiten von Beltrami, Cayley und Felix Klein die Nichtbeweisbarkeit des 11ten (in englischen Ausgaben 12ten) Axioms des Euklides aus den übrigen Axiomen der Euklidischen Geometrie dargethan worden ist. Nennen wir jenes Parallelenaxiom kurz A, die Gruppe der übrigen Axiome B, so gelang es zu beweisen, dass A nicht aus B folgen kann, wesentlich dadurch, dass für die Worte: „Raum“, „Abstand“ und „kongruent“ durchweg substituirt wurden die Worte: „Quasi-Raum“, „Quasi-Abstand“ und „quasi-kongruent“, den letzteren aber eine solche (anschauliche) Bedeutung untergelegt wurde, dass die Axiomgruppe B sich als durchaus erfüllt, der Satz A dagegen sich als *nicht* erfüllt nachweisen liess.

Es haben selbst Lehrer der Mathematik in ihren gegen diese Arbeiten oder wenigstens deren Ergebniss polemisirenden Schriften (zahlreiche andere aber durch thatsächliche Nichtanerkennung dieses Ergebnisses) so wenig Verständniss für den logischen Charakter der Frage an den Tag gelegt, dass Denjenigen, die den Wert der Logik überhaupt bemängeln, hier greifbar gezeigt werden könnte, wie viel Streit, beharrlicher Irrtum, Papier- und Zeitverschwendung durch eine bessere logische Schulung des Geistes sich vermeiden liesse!

Da nun im identischen Kalkul — für unsre „Gebiete“ — der Satz A, wie wir durch Anschauung erkannten, doch materiell richtig ist, so wird sich die Unabhängigkeit des Satzes A von der Satzgruppe B nur darthun lassen, indem wir für gewisse Objekte, von denen hierin die Rede war, durchweg andere Objekte substituiren, m. a. W. den Symbolen, welche uns diese Objekte darstellten, eine neue Bedeutung unterlegen, die beiden Partieen von Sätzen in ihrer Anwendung auf ein weiteres Untersuchungsfeld studiren.

Ein solches Anwendungsfeld, in welchem die Gruppe B ohne den Satz A gilt, ist nun in der That der „*logische Kalkul mit Gruppen*, z. B. von Funktionalgleichungen, Algorithmen oder Kalkuln“, den ich in Anhang 4 und 5 (resp. in 6) mit allem Detail begründe. Ich weise — um bei dem Aufbau der gegenwärtigen Theorie nicht zu einer übergrossen Abschweifung genötigt zu sein, unter diesen besondern Überschriften — eingehend nach, dass hier wirklich B durchaus

zutrifft, während Beispiele sich darbieten werden, in welchen A keineswegs zutrifft. Den Beispielen, sowie dem ganzen Kalkul wird ein hervorragendes Interesse auch an sich zukommen.

Die Anwendbarkeit des identischen Kalkuls auf das in § 3, S. 160 mitaufgezählte Feld ζ) wird demnach keine durchgängige sein, vielmehr nur eine beschränkte, teilweise oder partielle; sie wird bei den Sätzen 26) aufhören.

In der systematischen Darstellung der Theorie, mit der wir im Zuge sind, werde ich also die behauptete Nichtbeweisbarkeit der Subsumtion $26_\times$) nunmehr als erwiesen ansehen.

Dieselbe bildet insofern auch kein wesentliches Moment dieser Theorie, als der letzteren doch nur obliegt positiv fortzuschreiten, so gut sie es eben vermag. Das Fortschreiten gelingt ersichtlich auf die Weise, in der wir es ausführen werden, und auf die Herausforderung, es anders zu machen, die Subsumtionen 26) mittelst Beweises auf Grundlage des Bisherigen zu Theoremen zu erheben, wird niemand sich melden können.

Wir stehen darnach einer *merkwürdigen Thatsache* gegenüber.

Nach der in § 8 erörterten sprachlichen Einkleidung von $a + b$ und $a \cdot b$, wenn a und b als Klassen aufgefasst werden, sind die Formeln $25_\times$) und $26_\times$) wie folgt in Worte zu fassen:

$25_\times$) $ab + ac \mathrel{=\!\!\!\!\in} a(b + c)$. *„Alle a, die b sind, nebst allen a, die c sind, müssen solche a sein, die b oder auch c sind.“*

Exempel: Die Gebildeten, welche adelig, und die Gebildeten, welche wohlhabend sind (die adeligen Gebildeten und die wohlhabenden Gebildeten), sind Gebildete, welche adelig oder auch wohlhabend sind.

$26_\times$) $a(b + c) \mathrel{=\!\!\!\!\in} ab + ac$. „Alle a, welche b oder auch c sind, müssen solche a sein, die b sind, oder auch solche a, die c sind.“

Exempel: Die Gebildeten, welche adelig oder auch wohlhabend sind, sind adelige Gebildete oder auch wohlhabende Gebildete (sind Gebildete, welche adelig, oder auch Gebildete, welche wohlhabend sind).

Von diesen beiden gleich selbstverständlich klingenden *Sätzen lässt der erstere sich syllogistisch beweisen, der letztere nicht.*

Bei den älteren blos *verbalen* Behandlungen der logischen Disziplin ist wol sicherlich nie jemand darauf verfallen, jenen ersten Beweis zu liefern, und übersah man ebenso die Unmöglichkeit des zweiten.

In dem Nachweise und der Ausfüllung solcher Lücken gibt sich auch wol eine Überlegenheit der mathematischen Behandlungsweise kund. —

Jene unberücksichtigt gebliebenen Sätze (ich denke fast: sie werden auch nirgends ausgesprochen worden sein) sind nichtsdestoweniger von der allerhäufigsten Anwendung (begreiflich zumeist unbewusster-

weise) — wie dies schon bei den Raisonnements des gewöhnlichen Lebens eine geringe Aufmerksamkeit lehrt.

Anstatt der beiden Subsumtionen 25_+) und 26_+) wollen wir schliesslich nur die Gleichung 27_+), die sie in sich zusammenfasst, noch für Klassen formuliren: „*Was a oder b und zugleich a oder c ist, das sind die a, nebst den b welche c sind.*“

Exempel: Die Gebildeten und die wohlhabenden Adeligen sind gerade diejenigen Personen, welche gebildet oder wohlhabend und (zugleich) gebildet oder adelig sind.

Ich muss an dieser Stelle das Verhältniss des hier Vorgetragenen zu Herrn Ch. S. Peirce's Vorarbeiten kennzeichnen.

So weit der identische Kalkul als Buchstabenrechnung bis hier überhaupt zur Darstellung gekommen ist, erscheint sein Aufbau der Hauptsache nach ganz in den §§ 4, 5, 10 und 11 enthalten. In formeller Hinsicht ist für diese Entwickelung Herrn Peirce's grundlegende Arbeit[5] im dritten Bande des American Journal of Mathematics maassgebend gewesen, und zwar nicht nur in Bezug auf den Plan im grossen und ganzen, sondern auch bezüglich fast aller einzelnen Sätze und der Mehrzahl ihrer Beweise. Die Sätze allerdings waren zum Teil schon von Boole, Jevons und Anderen gegeben.

Ein beträchtlicher Unterschied findet jedoch statt hinsichtlich der Interpretation der vorkommenden Symbole. Herr Peirce nämlich fasst die Buchstaben durchweg als Urteile auf, begründet also die Theoreme als solche des „Aussagenkalkuls“ — wogegen hier sie als solche des „Gebietekalkuls“ entwickelt wurden. Durch das letztere Verfahren erhalten sie, wie in § 32 gezeigt werden wird, eine erheblich grössere Tragweite; sie werden ganz wesentlich verallgemeinert. In formeller Hinsicht indess ist die Verschiedenheit der Interpretation bei dem von Peirce eingehaltenen Gange zufällig fast ohne jeglichen Einfluss gewesen, und lag uns oft einfach ob, die Peirce'schen Betrachtungsweisen auf die Gebiete zu übertragen.

Fussend auf die allbekannten Prinzipien I und II und die Definitionen (1), (2) und (3), von welchen die letzteren namentlich ihm eigentümlich sind, gibt Herr Peirce eine streng analytische Herleitung der verschiedenen Theoreme des Kalkuls und zwar zunächst derjenigen — sagen wir „*bejahenden Charakters*“, in welchen nämlich von Negationen nicht die Rede ist — bis exclusive des Theorems 25).

Hier angelangt hält er indess bei den Distributionsgesetzen inne und werden diese [von uns mit 27) numerirten Formeln] von ihm ([5] pag. 33) mit der Bemerkung abgefertigt, dass sie nach l. c. von ihm citirten Formeln leicht zu beweisen, der Beweis aber für die Mitteilung zu langwierig sei [They are easily proved by*) . . ., but the proof is too tedious to give].

Dies war nun ein zu berichtigender Punkt.

Von den beiden Subsumtionen 25) und 26) aus denen als einfacheren Sätzen das „volle“ Distributionsgesetz 27) sich zusammengesetzt erweist,

*) Hier Def. (3) und Th. 6).

liess die eine 25) sich in der That leicht, aber gar nicht langwierig, auf dem angedeuteten Wege beweisen. (Von den zwei in § 11 von mir gegebnen Beweisen beansprucht der erste kaum mehr als *eine* Zeile an Druckraum.)

Für den andern Teilsatz 26) aber wollte es mir zunächst durchaus nicht gelingen, den fehlenden Beweis zu erbringen. Statt dessen glückte es mir vielmehr, die Unbeweisbarkeit des Satzes — wie oben (in Verbindung mit den citirten Anhängen) auseinandergesetzt — darzuthun, und eine dieserhalb mit Herrn Peirce geführte Korrespondenz lieferte die Aufklärung, dass derselbe seines diesbezüglichen Irrtums ebenfalls schon inne geworden war — vergl. hiezu die Fussnote auf p. 190 in dessen inzwischen erfolgter Fortsetzung [8] seines citirten Aufsatzes, im siebten Bande des American Journal.

Wenn ich auch in dieser Berichtigung mit Herrn Peirce zusammentraf, so glaube ich doch darin über ihn hinauszugehen, dass ich eben die Unerreichbarkeit des zuerst von ihm erreicht Geglaubten nachweise.

Interessant wird es nunmehr sein, zu sehen, in welcher Gestalt das von Peirce errichtete wissenschaftliche Gebäude nach jener Berichtigung weiterzuführen ist.

Durch jenen Beweis der Unbeweisbarkeit der Subsumtion 26) wird es offenbar gemacht, dass statt des *einen* eigentlich *zweierlei* Kalkuln existiren, derart, dass in dem einen beide, im andern nur der eine der beiden Teile des Distributionsgesetzes unbedingt statthat. Mit dieser Erkenntniss aber drängt sich die Notwendigkeit auf, die verschiedenen Kalkuln auch verschieden zu benennen. Es erschien mir angemessen, den ersten, bisher schlechtweg so genannten „Logikkalkul" seitdem als den *„identischen"* Kalkul zu bezeichnen im Gegensatz zu dem andern, dem Kalkul mit „Gruppen" — vielleicht als dem eigentlich *„logischen"*, beide Kalkuln jedoch nach wie vor in das Gebiet der *„Algebra der Logik"* zu verweisen.

Bis zum Einschluss der Theoreme 25) fallen beide Kalkuln wie gesagt in *einen* zusammen, so weit decken sie sich. Erst bei den Subsumtionen 26) erfolgt die Trennung, indem auch diese und damit das volle Distributionsgesetz 27) im identischen Kalkul noch durchaus gelten werden, im logischen (dem *Kalkul mit „Gruppen"*) nicht. So weit auch findet dieser Gruppenkalkul sich in Anhang 4 und 6 entwickelt, und darüber hinaus ist eine Entwickelung ihm überhaupt noch nicht zuteil geworden, auch bleibt er wol naturgemäss zurück, da ihm so wichtige Gesetze des identischen Kalkuls abgehn. Wir beschäftigen uns hiernächst nur mit dem identischen Kalkul weiter.

Um weiter zu fahren, müssen wir uns vor allem klar machen, dass *die beiden Sätze* $26_\times$) *und* 26_+) *sich auf einander zurückführen lassen.*

Gilt z. B. die Formel $26_\times$) allgemein, so auch wie oben dargelegt das „*volle*“ Distributionsgesetz $27_\times$). Und durch des letztern wiederholte Anwendung ist ihrerseits leicht zu beweisen die „*Multiplikationsregel für Polynome*“, welche in dem (uns zunächst genügenden) einfachsten Falle ausgedrückt wird durch die Formel:

$$28_\times) \qquad (a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

Beweis. Multiplizirt man erst nur die Summe $a + b$ mit dem hinter ihr stehenden Faktor nach $27_\times$) aus, so ergibt sich:

$$(a + b)\cdot(c + d) = a\cdot(c + d) + b\cdot(c + d)$$

und wenn man in den beiden Termen rechterhand nunmehr auch die Summe $c + d$ je mit dem vor ihr stehenden Faktor ausmultiplizirt, so entsteht:

$$(a + b)(c + d) = (ac + ad) + (bc + bd),$$

wo nun die Klammern rechterhand auch weggelassen werden dürfen [cf. Anhang 2] und der Satz sich bewiesen findet.

Meist wird die Formel $28_\times$) im Sinne *von links nach rechts* angewendet, und verlohnt es nur zu diesem Zwecke sie sich in Worten einzuprägen (wobei wir wegen der späteren Ausdehnung des Satzes auf beliebig viele Glieder die Gliederzahl, die bis jetzt nur „zwei“ sein dürfte, schon unerwähnt lassen wollen):

Zwei Polynome (mehrgliedrige Summen) können mit einander multiplizirt werden, indem man jedes Glied des einen Polynoms mit jedem Glied des andern multiplizirt und die Einzelprodukte summirt (addirt).

Man nennt diesen Prozess das „*Ausmultipliziren*“ der gedachten Polynome — in der Arithmetik auch wol das „Entwickeln“ ihres Produktes; doch erscheint wieder letzteres aus später zutage tretenden Gründen hier weniger geeignet (vergl. den § 19 über die „Entwickelung“ der Funktionen überhaupt.

Im umgekehrten Sinne, also von rechts nach links gelesen, zwecks der „*Zerfällung*“ eines gegebenen Aggregates von (monomischen binären) Produkten, in polynomische Faktoren, wird in der Praxis mit Recht der einmaligen Anwendung der komplizirten Formel $28_\times$) vorgezogen die wiederholte Anwendung der einfacheren $27_\times$) im Sinne des „Ausscheidens“ gemeinsamer Faktoren, so wie sie im umgekehrten Sinne beim Beweis von $28_\times$) bereits oben geleistet ist. Man wird hier eben den Ansatz machen:

$$ac + ad + bc + bd = a(c + d) + b(c + d) = (a + b)(c + d).$$

Bevor wir weiterfahren sei die Gleichung $28_\times$) auch für Klassen noch durch ein Beispiel erläutert:

Die russischen oder europäischen Kapitalisten oder Kaufleute sind die russischen Kapitalisten nebst den russischen Kaufleuten und den europäischen Kapitalisten sowie den europäischen Kaufleuten.

Sobald wir nun uns auf $28_\times$) berufen dürfen lässt sich die rechte Seite von 27_+) durch Ausmultipliziren wie folgt zerlegen:

$$(a+b)(a+c) = aa + ab + ac + bc,$$

und dies gibt nach Th. $14_\times$)

$$= \{(a+ab)+ac\} + bc = \{a+ac\} + bc = a + bc,$$

indem der erste Term aa oder a nach 23_+) die beiden zunächst ihm folgenden successive „absorbirt".

Hiermit aber wird dann die Gleichung 27_+) und damit auch die kraft Def. (1) in ihr mitenthaltene Subsumtion 26_+) bewiesen erscheinen.

Dem bisherigen genau dual entsprechend würde vermittelst 26_+) auch $26_\times$) sich ableiten lassen. Daher nun musste auch 26_+) notwendig unbeweisbar sein, denn wenn für diese Subsumtion der Beweis gelänge, so wäre damit auch für die $26_\times$) ein Beweis geliefert, was erwiesenermassen unmöglich ist.

Keinesfalls werden wir also genötigt sein, die Sätze 26) *alle beide* als Prinzipien hinzustellen.

Versuche, einen von ihnen etwa *nach* Hinzufügung der Def. (6) der Negation mit ihrem zugehörigen Postulate zu beweisen, schlagen ebenfalls fehl.

Dagegen brauchen wir blos einen speziellen Fall des einen, z. B. von $26_\times$) als Axiom oder Prinzip zu fordern, und zwar den folgenden.

Prinzip $\mathrm{III}_\times$. *Wenigstens, wenn* [$bc \Subset 0$, somit auch] $bc = 0$ *ist, gilt sicher:*

$$a(b+c) \Subset ab + ac.$$

Zusatz 1. Nach $25_\times$) und Def. (1) gilt dann auch die Gleichung:

$$a(b+c) = ab + ac$$

vorerst unter der einschränkenden Voraussetzung, dass $bc = 0$ sei.

Zusatz 2. Von zweien ist der Satz leicht auf drei und mehr Glieder auszudehnen, vorerst unter der entsprechenden Voraussetzung, dass deren Produkte zu je zweien gleich 0 seien. So muss namentlich sein:

$$a(b+c+d) = ab + ac + ad,$$

falls
$$bc = 0, \quad bd = 0, \quad cd = 0.$$
Dann ist nämlich (wegen $bc = 0$) nach Zusatz 1:
$$(b + c)d = bd + cd = 0 + 0 = 0$$
cf. Th. 21_+). Deshalb also abermals nach Zusatz 1 ist:
$$a\{(b + c) + d\} = a(b + c) + ad$$
und durch Einsetzung von $a(b + c) = ab + ac$ rechterhand ergibt sich hieraus der zu beweisende Satz.

Ebenso beweist sich leicht das Schema $28_\times)$ sofern nur $ab = 0$ und $cd = 0$. Etc.

Anmerkung 1. Dem Prinzip $\text{III}_\times$ würde ein Satz III_+ dual entsprechen: dass $(a + b)(a + c) \mathrel{=\!\!\!\in} a + bc$ wenigstens dann sein müsse, wenn $b + c = 1$ ist. Denselben dürfen wir aber *nicht* auch als ein „Prinzip" bezeichnen sondern müssen ihn ein „Theorem" nennen, weil er sich nunmehr — selbst ohne die angegebene beschränkende Voraussetzung, nämlich verallgemeinert zu 26_+) und 27_+) — auf Grund von $\text{III}_\times$ beweisen lassen wird.

Indessen braucht auf dieses Theorem hier überhaupt nicht Bezug genommen zu werden.

Anmerkung 2. Ein spezieller Fall des Prinzips $\text{III}_\times$, also ein noch speziellerer Fall der Subsumtion $26_\times$) würde der folgende Satz sein:

$\text{III}_\times^0$. *Es ist* $a(b + c) \mathrel{=\!\!\!\in} ab + ac$, *soferne wenigstens* $bc = 0$ *und* $b + c = 1$ *ist,*

wo dann auch $a(b + c) = ab + ac$ unter denselben Bedingungen gelten würde — ein Satz, dem wir also weiter unten die kürzere Fassung
$$a(b + b_1) = ab + ab_1$$
oder die noch kürzere: $a = ab + ab_1$ würden geben können.

Mit diesem noch einfacheren Satze, selbst in Verbindung mit seinem dualen Gegenstücke, gelänge es aber (wie wir sehen werden) *nicht*, hier auszukommen.

Da von zwei einander dual entsprechenden Sätzen hier blos der eine $\text{III}_\times$ zum Prinzip erhoben wurde, so werden unsre ferneren Beweisführungen eine Weile notwendig unsymmetrisch: der Dualismus ist uns zur Zeit entschlüpft, wird jedoch in Bälde wieder eingefangen.

Den in Kenntniss zu nehmenden Sätzen werden wir bis dahin auch nicht in der Lage sein, die ihnen dual entsprechenden immer sogleich gegenüberzustellen.

Über die anscheinende Unmöglichkeit, statt einseitig, hier doch symmetrisch vorzugehen, nämlich an Stelle von $\text{III}_\times$ einen sich selbst

dual entsprechenden Satz zum dritten Prinzip zu erwählen, muss ich mir weitere Bemerkungen noch vorbehalten (S. 310 sq.).

Einstweilen garantirt uns unser Prinzip $III_\times$ die Erlaubniss, *eine Summe wenigstens dann nach dem Distributionsgesetze auszumultipliziren,* wenn ihre Glieder unter sich *disjunkt* sind (d. h. zu je zweien multiplizirt ein Produkt 0 geben).

Dergleichen Summen mag man *„reduzirte"* nennen.

Man kann noch bemerken, dass auch die ausmultiplizirte Summe wieder eine reduzirte sein wird und nebenher diese Wahrnehmung mit McColl verallgemeinern zu dem Satze:

Zusatz 3. *Das Produkt zweier (oder mehrerer) reduzirten Summen gibt ausmultiplizirt wieder eine reduzirte Summe.*

Jedes Glied der ausmultiplizirten Summe hat nämlich, als Partialprodukt, ein Glied der ersten und ein Glied der zweiten Summe zum Faktor. Haben zwei Glieder aus der einen Summe *denselben* Term zum Faktor, so müssen ihre andern Faktoren disjunkte Terme aus der andern Summe sein, und sie darum zum Produkt 0 geben. Andernfalles haben sie sowol aus der einen als aus der andern Summe disjunkte Terme zu Faktoren und geben, wenn miteinander multiplizirt, um so mehr ein Produkt 0.

Anmerkung 3 zu Prinzip $III_\times$.

Man kann — vergl. Jevons[1] p. 27 sq. — für das Prinzip $III_\times$ und ebenso schon für die allgemeinere Subsumtion $26_\times$), nachdem sie (wie oben geschah) für Klassen oder auch für Gebiete in Worte gefasst sind, einen verbalen „Beweis" liefern wie folgt.

Vorausbemerkt sei nur, dass hiebei im Satze, wie im Beweis wiederholt (auch in „disjunktiven" Urteilen) die Konjunktion „oder" vorkommt. Beim spezielleren Satze $III_\times$ ist dieselbe im Sinne von § 8, η) zu verstehen als „oder aber", bei dem allgemeineren Satze $26_\times$) dagegen im Sinne von § 8, ϑ) zu ersetzen durch „oder auch". Hierdurch allein würden die beiden Sätze und Beweise sich unterscheiden. Wir sagen hiernächst schlechtweg „oder".

Im übrigen muss man wesentlich auch die *Interpretation* § 8, ι) von $a + b$ vor Augen haben.

Jevons' „Beweis" zu $III_\times$ resp. $26_\times$).

Was a und entweder b oder c ist — wenn es b ist, so ist es ab*), wenn es c ist, so ist es ac, und es ist folglich entweder ab oder ac.

[— sintemal auch $a(b+c) \mathrel{=\!\!\!\in} b+c$, sowie $ab \mathrel{=\!\!\!\in} ab+ac$ und $ac \mathrel{=\!\!\!\in} ab+ac$ nach Th. 6) sein muss —].

*) Dann ist es nämlich a und b zugleich, ist ein a, *welches* b ist, ein ab. Man kann sich auch auf Th. $20_\times$) berufen, wonach für ein dem b eingeordnetes a, für $a \mathrel{=\!\!\!\in} b$, auch sein muss $a = ab$, und um so mehr $a \mathrel{=\!\!\!\in} ab$.

Es sei nicht in Abrede gestellt die gemeinverbindliche Denknotwendigkeit dieser Überlegung, so wenig, als wie schon die Selbstverständlichkeit des durch sie (womöglich *noch*) plausibel(er) gemachten Satzes.

Allein es wird bei diesen Schlüssen von einem Grundsatze Gebrauch gemacht, der bisher weder implicite noch explicite Erwähnung fand, nämlich von diesem:

„*a ist* entweder *b* oder *c*" heisst genau dasselbe, wie „entweder *a ist b*, oder *a ist c*". Kürzer: *Was b oder c ist, ist entweder b, oder es ist c.*

Man sieht, wie hienach die Kopula „ist" sich verteilt auf die beiden Glieder der Alternative, und wie umgekehrt sie von diesen beiden auch wieder abgezogen und in eine einzige Kopula zusammengezogen verschmolzen werden kann.

Von den in diesem Grundsatz für „einander äquivalent" erklärten beiden Urteilen ist das erste ein kategorisches, also mit *einer* Kopula versehenes, mit dem Subjekte *a* und dem Prädikate „*b* oder *c*". Das zweite Urteil aber ist gar kein kategorisches, sondern ein „disjunktives". Es besteht aus zwei Sätzen, deren jeder für sich seine Kopula besitzt, und die mittelst der Bindewörter „entweder . .", „oder . ." verknüpft, in Abhängigkeit voneinander gesetzt sind.

Es gehört dieser Grundsatz als schlechthin gültiger ausschliesslich dem „Aussagenkalkul" an, woselbst wir ihn noch näher studiren werden — § 45, α_+). Im Gebietekalkul gilt er im allgemeinen *nicht:* Wenn ein Gebiet *a* im Gebiete $b + c$ enthalten ist, braucht es nicht entweder in *b* oder in *c* ganz enthalten zu sein. Daselbst gilt er — wie wir erst viel später, § 47, sehen werden — nur für die „*Individuen*" der Klassen, die Punkte von *a*, nicht aber für die Klassen selber.

Erst wenn diese „*Argumentation auf die Individuen*" der Klasse als ein Grundsatz, als ein „Prinzip" ausdrücklich vorausgeschickt worden wäre, dürften wir die obige Überlegung als einen wirklichen *Beweis* hinstellen.

Dergleichen zu thun wäre wohl in der That am zweckmässigsten beim ersten Unterricht mit Schülern.

Hier dagegen wollen wir darauf ausgehen, unsre Axiome oder Prinzipien möglichst aus dem Gebiete- oder Klassenkalkul selbst zu schöpfen (von dem Aussagenkalkul, der sich in ihm mitenthalten erweist, solange es nur irgend angeht auch mit den Prinzipien I und II auszukommen suchend — die wir ja bislang schon in doppeltem Sinne zu citiren hatten). Da *verbietet es sich* denn *von selbst, von Argumentationen auf die Individuen* der Klassen *wesentlich Gebrauch zu machen,* solange das „Individuum" noch überhaupt nicht einer wissenschaft-

lichen Definition im Klassenkalkul teilhaftig geworden, auf welche solche Argumentationen in strenger Beweisführung erst zu basiren wären. Um aber solche Definition und Beweisführung zu verwirklichen (vergl. § 47) werden wir längst schon des vollen Distributionsgesetzes zum Aufbau unsrer Disziplin bedurft haben und vielfach in der Lage gewesen sein, desselben nicht entraten zu können.

Aus diesen Gründen verharren wir bei dem gewählten Prinzipe $\mathrm{III}_{\times}$.

Unverkennbar geht die Arithmetik einen umgekehrten Weg: sie fängt bei Aufstellung ihrer Zahlbegriffe und ersten Sätze eben mit „Argumentationen auf die Individuen" als den plausibelsten Überlegungen des Menschengeistes an. In didaktischer Hinsicht dürfte solches Verfahren auch die grössten Vorzüge besitzen, und tadeln wir sie keineswegs darob. Wir verlangen jedoch, dass entweder das Eine oder aber das Andre *konsequent* durchgeführt werde! *Hier* nun haben wir nicht den Begriff des Individuums sondern den der Einordnung zwischen Gebieten, Subsumtion, an die Spitze gestellt; wir haben bereits den entgegengesetzten Weg eingeschlagen und müssen ihn nun auch zu Ende gehen; wir dürfen darum jenen Begriff auch noch nicht voraussetzen (es sei denn ganz nebenher bei den Illustrationen durch Beispiele oder den Nutzanwendungen des Kalkuls), sondern werden erst verhältnissmässig spät im stande sein, eine Definition des Individuums, Punktes aufzustellen.

Wir begnügen uns, einstweilen mit Peirce zu sagen, der obige „Beweis" sei nicht syllogistisch, sondern „*dilemmatisch*" und verweisen in Bezug auf die als ein „Dilemma" hinzustellende Art des Schliessens auf § 45 des mehrerwähnten Aussagenkalkuls, sowie schon auf das Schema der Aufgabe ι_1) des § 18. [Der vorgerücktere Leser wird leicht diese Schlussform als eine hier wirklich mit zur Anwendung gekommene erkennen, indem er sich das s des Schema's als $a(b+c)$, das p desselben als $ab+ac$ deutet — ohne dass wir nötig hätten, hierauf nochmals zurückzukommen.] Den *vor*greifenden Charakter des „Beweises", zufolge dessen er hier noch nicht am Platze, noch deplacirt erscheint, erblicke ich aber wesentlich nicht darin, dass diese Schlussform in ihm zur Anwendung kommt, sondern vielmehr in dem erwähnten „Argumentiren auf Individuen".

Dual entsprechend könnte der andre Satz:

$$26_{+}) \qquad (a+b)(a+c) \Subset a+bc,$$

— in Worten: „Was a oder b und zugleich a oder c ist, ist entweder a oder: b und c" auch dilemmatisch so „bewiesen" werden: Dasselbe ist entweder a oder nicht. Ist es nicht a, so muss es nach dem ersten Teil der Voraussetzung b und nach dem zweiten c sein; also ist es entweder a oder „b und c".

Nebenbei bemerkt liegt hier ein Fall vor, wo die Wortsprache, als des Instrumentes der Klammern entbehrend, unpräzise, zweideutig oder doppelsinnig wird, resp. durch geeignete Betonung und Pausen die Klammerstellung andeuten, ersetzen muss. Es gibt ja „(a oder b) und zugleich c“, das ist $(a + b)c$, einen wesentlich andern Sinn als „a oder (b und zugleich c)“. Der letztere nur war vorhin maassgebend. Vergl. die Studie unter ζ) und η) des § 18. —

Hiezu ist gehörig Anhang 4 nebst 5 und eine Episode aus Anhang 6. —

Siebente Vorlesung.

§ 13. **Negation (mit Postulat) und darauf zu gründende Sätze. Ihre Einführung für Gebiete.**

Ich werde mich im § 13 und 16, d. h. in Bezug auf die Darstellung und Begründung der für die Technik des Kalkuls wichtigsten Sätze am nächsten an Robert Grassmann[3] anschliessen.

Wir haben nunmehr mit einer dritten fundamentalen Operation des identischen Kalkuls Bekanntschaft zu machen, welche — im Hinblick auf die Begriffsumfänge oder Klassen — *Negation* oder *Verneinung* schon von der alten Logik genannt worden ist — eine Benennung, die wir auch für die Punktgebiete unsrer Mannigfaltigkeit adoptiren. Schon auf die Begriffe angewendet erscheint die Benennung eigentlich als eine übertragene, aus dem Aussagenkalkul, in welchem sie ursprünglich wurzelt (resp. aus der Lehre von den Urteilen) metaphorisch herübergenommene.

Es ist diese dritte Operation insofern von einfacherem Charakter wie die beiden vorhergehenden, als sie immer schon an einem einzelnen Objekte vollziehbar ist, wogegen Multiplikation und Addition je deren zweie als zu verknüpfende Operationsglieder voraussetzen.

Multiplikation, Addition und Negation sind die *„drei Spezies"* des identischen Kalkuls.

Der Begriffserklärung der Negation müssen wir einen Hülfssatz vorausschicken.

29) Hülfstheorem. *Wenn einerseits*

$$ab = 0 \quad \textit{sowie} \quad a + b = 1$$

und andrerseits zugleich auch

$$ac = 0 \quad \textit{sowie} \quad a + c = 1$$

ist, so muss sein:

$$b = c.$$

Beweis. Nach Th. 4) hat man

$$ab = ac \quad \text{und} \quad a + b = a + c.$$

Multiplizirt man die *letztere* Gleichung beiderseits mit b, so entsteht nach Prinzip $\mathrm{III}_\times$ [sogar schon nach $\mathrm{III}_\times{}^0$] und Th. $14_\times$):

$$ab + b = ab + bc.$$

Ebenso entsteht aus ihr durch beiderseitige Multiplikation mit c:

$$ac + bc = ac + c.$$

Wegen der *erstern* Gleichung ist aber gemäss 16_+):

$$ab + bc = ac + bc$$

und folglich nach Th. 4) auch

$$ab + b = ac + c;$$

d. h. nach 23_+), indem die ersten Terme absorbirt werden haben wir:

$$b = c,$$

q. e. d. Einfacher hätte man auch, mit Rücksicht auf die Voraussetzung $ab = 0$, nach 21_+) und 23_+) das eine Multiplikationsergebniss in $b = bc$, das andre, wegen $ac = 0$, in $bc = c$ zusammenziehen können. Indessen hat der erstere Beweis den Vorzug, sich auf eine spätere Erweiterung des Satzes, zu Th. 40) und Zusätze, ohne weiteres übertragen zu lassen.

Bezeichnen werden wir die Negation eines Gebietes a, indem wir diesem den „*Negationsstrich*" $_{\vert}$ als Suffixum anhängen, sonach mit $a_{\vert}$ (gelesen: „*a-nicht*").

Sollte ein zu negirendes Gebiet einen zusammengesetzten Ausdruck haben, so wird es überdies dabei einzuklammern sein gemäss der allgemein bezüglich Gebrauchs der Klammern geltenden Maxime (vergl. Anhang 2). So wird z. B. $(ab)_{\vert}$, $(a+b)_{\vert}$, $(a_{\vert})_{\vert}$ die Negation von ab resp. $a + b$ und $a_{\vert}$ vorstellen.

Bei der Wahl obiger Bezeichnung kommt folgendes in Betracht.

Das Suffixum $_{\vert}$ soll einen *Vertikalstrich* vorstellen. Mittelst eines solchen werden wir auch anderweitig — namentlich für Beziehungen — die Negation andeuten. So wird uns z. B. das vertikal durchgestrichene Gleichheitszeichen: $\neq$, gelesen „ungleich", die Verneinung der Gleichheit auszudrücken haben. Nach diesem Prinzip wird es nämlich leicht, zu jedem Beziehungszeichen sofort dessen Verneinung zu bilden. Indem man einfach dasselbe vertikal *durchstreicht* gewinnt man ein hübsches und durch sich selbst verständliches, mnemonisches, obendrein auch noch nicht anderweitig vergebenes Zeichen zur Darstellung eben der Beziehung, welche die Negation von jener zu nennen.

Aus $>$, z. B. wäre hienach auch das regelrechte Zeichen für „nicht grösser", welches für's reelle Zahlengebiet als $\leq$ („kleiner oder gleich") in der Mathematik sehr viel gebraucht wird, unschwer abzuleiten.

Da es nun nicht angängig ist, Buchstaben oder gar zusammengesetzte Ausdrücke jeweils in Druck und Schrift wirklich durchzustreichen, so muss eben der Vertikalstrich *neben* jenen angemerkt werden (im letztern Falle,

wie betont, unter Einklammerung der Ausdrücke). Da ferner eine Negation (die Operation des Negirens) nicht vollzogen werden kann, es sei denn an einem bestimmten Objekte, so ist es wiederum naturgemäss, das Objekt, welches man behuf Negirens schon haben muss, dem Negationsstrich dabei voranzuschicken, letztern also dahinter zu stellen, sei es auf gleicher Höhe, sei es darüber (als Accent) oder darunter (als Suffixum). Ich entschied mich für das Suffixum als das in Druck und Schrift die grösste Deutlichkeit gewährende Zeichen von immerhin minimalen Raumansprüchen.

[In meiner früheren Schrift[2] verwendete ich zur Bezeichnung der Negation noch das Suffixum 1, schrieb also für unser non-a stets a_1 (gelesen: „*a unten* 1“, kürzer „*a-eins*“). Es sollte dies daran erinnern, dass, wie in § 23 gezeigt wird, die Negation von a auch durch $1 - a$ darstellbar ist. Jedoch erscheint es angezeigt, des Dualismus halber, der alsdann reiner zum Ausdruck kommen wird, ein von den Symbolen 0 und 1 unabhängiges Zeichen zur Darstellung der Negation zu verwenden.]

Von Andern (namentlich Boole, R. Grassmann und Ch. S. Peirce) ist vorgezogen worden, das zu negirende Objekt mittelst *Horizontalstrich* zu *über*streichen, für unser a_1 also zu schreiben $\bar{a}$ (gelesen *a strich*).

Ernstliche Einwände lassen auch gegen diese Gepflogenheit sich nicht erheben. Die Entscheidung für diese oder jene ist gewissermassen Geschmacksache. Eine jede von ihnen hat gewisse Vorteile und Nachteile.

Will man mit dem Horizontalstrich *konsequent* sein, so müsste man nun mit $\equiv$ (statt $\neq$) die Ungleichheit darstellen. Dies sieht nun erstlich aus, wie ein doppelt negirtes Minuszeichen. Sodann ist das Zeichen auch schon anderweitig in Beschlag genommen: in der Zahlentheorie zur Darstellung von „gleichrestig“ oder „*kongruent*“ — in andern Disziplinen auch wol für „identisch gleich“ im Sinne von „allgemein gleich“, d. i. gleich für *alle* Wertsysteme gewisser Buchstabengruppen. Das Zeichen $\equiv$ würde also hier seine dritte, mit den bisherigen disparate, Bedeutung beigelegt erhalten, wogegen $\neq$ für „nicht gleich“ schon vielfach üblich ist (vergl. z. B. Aufsätze von *Netto* und Andern im Journal für die reine und angewandte Mathematik). — Weiter würden wir für die Verneinung noch andrer Beziehungen, wie z. B. für „nicht untergeordnet“ mit dem Horizontalstrich viel weniger hübsche Zeichen bekommen: $\overline{\subset}$ statt $\not\subset$, etc. — Zeichen, die aus getrennten Teilen bestehen, weniger symmetrisch sind und wol auch mehr Raum einnehmen, als mit dem Vertikalstriche.

Endlich, schon bei Buchstaben, gefällt mir nicht, dass die Höhenlage des Horizontalstrichs von der Höhe des Buchstabens abhängig wird, z. B. $\bar{a}\bar{b}$ für unser $a_1 b_1$. Sind aber die Buchstaben von gleicher Höhe, wie a und c, so erscheint es allzu nahe gelegt, solche, wie wir sehen werden, grundverschiedene Ausdrücke wie $\bar{a}\bar{c} = a_1 c_1$ und $\overline{ac} = (ac)_1$ miteinander zu verwechseln, indem ihre Unterscheidung davon abhinge, ob an einer Stelle von höchst geringer Ausdehnung die Druckerschwärze, Tinte, nicht angegangen oder übergeflossen ist.

Bei zusammengesetzten Ausdrücken indess hat der Horizontalstrich den Vorteil, zugleich als Vinculum zu dienen und die Klammer zu ersetzen, wie in $\overline{ab}$, $\overline{a + b}$ und $\bar{\bar{a}}$ für die oben angeführten drei Beispiele. Auch

lässt *unsre* Schreibweise wegen der Ähnlichkeit des Negationsstrichs mit dem Suffixum 1 es fortan weniger ratsam erscheinen, ein erstes, zweites, drittes etc. (in einer Untersuchung auftretendes) a etwa mit $a_1, a_2, a_3, \ldots$ hier zu benennen. Hiefür kann man jedoch, da Potenzen ohnehin ausgeschlossen sind (Th. 14), nun mit $a^1, a^2, a^3, \ldots$ sich sehr gut behelfen.

In Bezug auf die Streitfrage zwischen Horizontal- und Vertikalstrich bei zu verneinenden Beziehungszeichen könnte übrigens Herrn Charles S. Peirce die Autorität seines Vaters Benjamin Peirce[1] gegenübergestellt werden, mit dessen Bezeichnungsvorschlägen in seiner „Linear associative Algebra" wir teilweise zusammentreffen.

De Morgan, Jevons und Andere nehmen für Begriffe resp. Klassen und deren Negation die korrespondirenden Buchstaben aus dem grossen und kleinen Alphabete, bezeichnen die Negation von A mit a, sowie umgekehrt — was nach Th. 31) zulässig. Dies ist nur durchführbar, insoweit blos „einfache" Symbole in Betracht kommen (vergl. Anhang 2), verbietet sich indess, wenn das Negiren auch für zusammengesetzte Ausdrücke soll angedeutet werden können. Denn die Negation von $A + B$ würde durchaus nicht etwa $a + b$ sein, u. s. w. — vergl. die Theoreme 36). Der Vorschlag erscheint uns *hier* als gänzlich unannehmbar.

Mit Worten nennen wir die Negation von a auch „*Nicht-a*" oder „*Non-a*".

Indessen „non-a", „non $(a+b)$" etc. für unser a_1, $(a+b)_1$ in Formeln anzusetzen würde schwülstig („cumbrous") werden.

Definition (6), der Negation.

„*Negation*" *eines Gebietes a nennen wir ein solches Gebiet a_1, welches zu ihm in der Beziehung steht, dass zugleich:*

$$aa_1 \subseteq 0 \quad und \quad 1 \subseteq a + a_1$$

ist.

Da nach Th. 5) ohnehin $0 \subseteq aa_1$ und $a + a_1 \subseteq 1$ sein wird, so gelten dann kraft Def. (1) auch die beiden Sätze:

30) Theoreme. *Allgemein ist:*

$30_\times$) $\quad aa_1 = 0.$	30_+) $\quad a + a_1 = 1.$

Diese Gleichungen hätten ebensogut zur Definition der Negation a_1 von a verwendet werden können, muten jedoch dieser Negation scheinbar etwas mehr zu, als nur die obigen in ihnen mitenthaltenen beiden Subsumtionen zu erfüllen.

Nach § 7, S. 214, können wir nun auch sagen: *Negation eines Gebietes nennen wir ein solches Gebiet, welches zu demselben zugleich disjunkt und supplementär ist.*

Zusatz 1 zu Def. (6). Zu einem Gebiete a kann es *nicht mehr als eine* Negation geben.

Denn wäre a_1' eine zweite, so würden neben den beiden Gleichungen 30), und mit demselben Rechte, auch diese beiden bestehen:

$$aa_1' = 0 \quad \text{und} \quad a + a_1' = 1$$

und würde aus allen vier Gleichungen nach Hülfstheorem 29) [wo b dem a_1 und c dem a_1' entspricht] folgen:

$$a_1' = a_1,$$

d. h. die beiden Negationen wären identisch, einerlei, wären in der That nur *eine*.

Die Operation des Negirens, d. i. die Herstellung der Negation zu einem gegebenen Gebiete, wird darnach jedenfalls keine „mehrdeutige" sein, die Negation a_1 von a ist ein *höchstens eindeutiges* Gebietsymbol. Dagegen könnte noch dieses Symbol als ein „undeutiges", die Operation des Negirens als „unausführbar" erscheinen. Bislang ist noch die Möglichkeit zugelassen, dass — vielleicht je nach dem „Werte" von a — das Zeichen a_1 ein sinnloses, einer Deutung als eigentliches Gebiet eventuell ganz unfähiges ist, welches dann als ein „uneigentliches" Gebiet der Mannigfaltigkeit zu adjungiren die Def. (6) uns zumutet.

Diese Möglichkeit schliesst aus das folgende Postulat mit dem zugehörigen die Interpretation liefernden Nachweise.

Postulat ((3)). *Zu jedem Gebiete a gibt es* (mindestens) *eine Negation* a_1 (und dann wie schon gezeigt auch nur diese).

Dieselbe wird als Rückstand erhalten, wenn man das Gebiet a aus der ganzen Mannigfaltigkeit 1 *fortlässt.*

Dieses Restgebiet hat nämlich in der That die Eigenschaft, erstens: mit dem Gebiete a keinen Punkt gemeinsam zu haben, d. i. die Gleichung $30_\times$) zu erfüllen; hätte es einen Punkt mit a gemein, so wäre ja dieser Punkt von a nicht pflichtschuldigst fortgelassen — und zweitens: das Gebiet a auch zur ganzen Mannigfaltigkeit 1 zu ergänzen, d. i. die Gleichung 30_+) zu erfüllen. Fehlte auch nur ein Punkt an dieser Mannigfaltigkeit, so wäre ja nicht der volle Rückstand genommen. Dasselbe ist sonach eine richtige Negation zu a, und weil es nur *eine* gibt, haben wir hier den bestimmten Artikel anzuwenden und zu sagen: *die* Negation von a.

Die Ausführungen des vorstehenden Absatzes sind nicht etwa als ein „Beweis" des vorhergehenden Postulates anzusehen, dessen Anerkennung vielmehr wir schlechthin fordern. Sie sollen nur beitragen, den Sinn desselben voll zum Bewusstsein zu bringen, und der Anschauung resp. Intuition behülflich sein, dasselbe zu verifiziren.

Die Negation a_1 *eines Gebietes a ist* — in unserm bevorzugten

Falle — *die Ergänzung dieses Gebietes zur Mannigfaltigkeit* 1, d. i. zur ganzen Fläche der Schultafel.

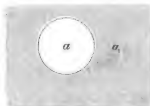


Fig. 16.

Ist z. B. a die (Innen)Fläche eines Kreises, mit Einschluss von dessen Kontur, so bedeutet a_1 die Aussenfläche desselben (soweit sie zur Tafelfläche gehört) mit Ausschluss von dessen Kontur. In Fig. 16 ist dieses Gebiet durch Schraffiren veranschaulicht.

Diese Ergänzung a_1 erscheint als das

Maximalgebiet unter den zu a „disjunkten"	Minimalgebiet unter den zu a „supplementären"

Gebieten.

Als ein „Postulat" durften wir den Satz (3)) deshalb hinstellen, weil er die Forderung in sich schliesst, involvirt, zu irgend einem Gebiet a ebenjene Ergänzung zu denken oder zu bilden, sie aus ihm abzuleiten und in Gedanken zu isoliren.

Dieser Forderung fühlen wir uns gewachsen.

Zusatz 2 zu Def. (6). Insbesondre ist:

$$0_1 = 1 \quad , \quad 1_1 = 0;$$

die Negation der Null ist die Eins und umgekehrt; denn in der That haben wir nach den Theoremen 21) *oder* 22):

$$0 \cdot 1 = 0 \quad \text{und} \quad 0 + 1 = 1,$$

desgleichen mit umgestellten Faktoren resp. Gliedern. Auch ist es unmittelbar intuitiv: Nichts ist erforderlich, um ein Ganzes zu sich selbst zu ergänzen. Die ganze Mannigfaltigkeit ist erforderlich um das Nichts zu ihr selbst zu ergänzen.

Die so hochwichtige Deutung unsrer Definition und Sätze für *Klassen* wollen wir auf demnächstige Paragraphen verschieben und uns bis zum Wiedergewinn des Dualismus im reinen Gebietekalkul fortbewegen.

Die Theoreme 30) mögen auch einzeln in Worte gefasst werden:

Ein Gebiet mit seiner Negation multiplizirt gibt 0.	*Ein Gebiet zu seiner Negation addirt gibt* 1.

Und sie können auch auf beliebig viele Operationsglieder dahin ausgedehnt werden:

Zusatz 1 zu Th. 30).

Sooft unter den Faktoren eines Produktes solche vorkommen, deren	*Findet sich unter den Gliedern einer Summe überhaupt eines, welches*

einer die Negation des andern ist, verschwindet das Produkt.

als die Negation eines andern Gliedes erscheint, so hat die Summe den Wert 1.

So ist z. B.

$$abc \cdot ab_1 cd_1 = 0. \qquad | \qquad a + b + c_1 + a + c + d_1 = 1.$$

Man kann nämlich wegen der Kommutativität der Operationen die Operationsglieder so umordnen, dass das gedachte neben seine Negation zu stehen kommt; diese beiden kann man dann wegen der Associativität zu einem einzigen Operationsglied zusammenfassen (desgleichen die übrigen Operationsglieder) und nach Th. 19) Zusatz 2 durch seinen Wert 0 resp. 1 ersetzen, worauf das Th. 22) in Wirksamkeit tritt. In unsern Beispielen haben wir als Wert des Ausdrucks:

$$acd_1 \cdot bb_1 = (acd_1) \cdot 0 = 0. \qquad | \qquad (a+b+d_1)+(c+c_1) = (a+b+d_1)+1 = 1.$$

31) Theorem. *Es ist allgemein:*

$$(a_1)_1 = a.$$

Die Negation der Negation eines Gebietes ist dies Gebiet selbst, oder: *Doppelte Verneinung „bejaht", hebt sich auf.*

Beweis 1. Nach Th. 30) hat man unter Anwendung des Kommutationsgesetzes:

$$a_1 \cdot a = 0, \qquad a_1 + a = 1,$$

und andrerseits, wenn Th. 30) für a_1 statt a (so, wie es ist) in Anspruch genommen wird:

$$a_1 \cdot (a_1)_1 = 0, \qquad a_1 + (a_1)_1 = 1.$$

Vergleicht man diese vier Gleichungen mit dem Schema der Voraussetzungen des Hülfstheorems 29), so nimmt man dessen Anwendbarkeit wahr, und erhält die Folgerung:

$$a = (a_1)_1,$$

die zu gewinnen war.

Beweis 2. Man kann auch einfach bemerken, dass die beiden Voraussetzungen der Def. (6) kraft Th. 12) unverändert gültig bleiben, wenn man die Symbole a und a_1 mit einander vertauscht. Da nun die Def. (6) eine *allgemeine* Festsetzung sein sollte, so muss auch die an jene Voraussetzung konventionell geknüpfte Folgerung in Kraft bleiben, wenn man a und a_1 vertauscht. — Die Sache wird deutlicher, wenn man in Def. (6) den Namen a_1 vermeidet, denselben durch irgend einen andern, etwa durch b ersetzt. Es wird ausgemacht: b die Negation von a zu nennen, wenn $ab = 0$ und $a + b = 1$ ist. In diesem Falle ist aber auch $ba = 0$ und $b + a = 1$ nach Th. 12). Folglich ist

dann auch a die Negation von b zu nennen, wozu man sich eben durch die vorhergehende Abmachung verpflichtet hat, in Anbetracht, dass diese als eine allgemein zu befolgende hingestellt wurde, welche ebensogut für ein Paar b, a von Gebieten, wie für das Paar a, b verbindlich ist. Wird nun für b der Name a_1 eingeführt, so gilt für a auch der Name b_1 oder $(a_1)_1$ — vergl. übrigens Th. 32).

Ist also b *(resp.* a_1*) die Negation von* a, *so ist auch* a *die Negation von* b (resp. a_1).

Die Beziehung der Negation zwischen zwei Gebieten (a und a_1) *ist allemal eine gegenseitige.* Die Beziehung ist „*symmetrisch*“.

Man wird durch Th. 31 erinnert an die Eigenschaft des Minus-Zeichens, an den Satz der Arithmetik:

$$-(-a) = a,$$

und könnte sich im Hinblick auf diese Analogie versucht fühlen, die Bezeichnung a_1 durch $-a$ ersetzen zu wollen. Wir werden indess später sehen, dass nicht $0-(0-a)=a$ sondern $1-(1-a)=a$ das wahre arithmetische Analogon des Th. 31) bildet. Vergl. § 23.

32) Theorem.

Ist $a = b$, *so ist auch* $a_1 = b_1$, oder: *Gleiches, negirt, gibt Gleiches.*

Beweis. Aus den beiden Gleichungen des Th. 30): $aa_1 = 0$, $a + a_1 = 1$ folgt wegen $a = b$ nach Th. 16), d. h. indem man eben b für a substituirt:

$$ba_1 = 0, \qquad b + a_1 = 1.$$

Nach Th. 30) — für b in Anspruch genommen — ist aber auch:

$$bb_1 = 0, \qquad b + b_1 = 1.$$

Aus diesen vier Gleichungen folgt nach dem Schema des Hülfstheorems 29): $a_1 = b_1$, wie zu zeigen war.

Zusatz 1. Ist $a_1 = b_1$, so muss nach Th. 32) auch $(a_1)_1 = (b_1)_1$, mithin kraft Th. 31) auch $a = b$ sein. Die beiden Gleichungen $a = b$ und $a_1 = b_1$ bedingen sich also gegenseitig, sind äquivalent.

Zusatz 2. Hienach lässt der Zusatz 2 sub Th. 19), dass in gewissen Ausdrücken Gleiches für Gleiches gesetzt werden dürfe, sich nunmehr ausdehnen auf alle durch Addition, Multiplikation *und Negation* hergestellten Ausdrücke: *In jedem nur mittelst der identischen Operationen der „drei Spezies“ aus Gebietsymbolen aufgebauten Ausdrucke ist es erlaubt, irgend einen Term durch einen ihm identisch gleichen zu ersetzen.*

Von dieser Erlaubniss wird beim Rechnen umfassendster Gebrauch gemacht, meist ohne besondern Hinweis auf dieselbe.

Ist z. B. $a = c$ und $b = d$, so darf man für $(ab_1 + a_1b)e$ auch schreiben $(cd_1 + c_1d)e$. Etc. etc.

„Erlaubt“ nennt man diejenigen Umformungen eines Ausdrucks, welche ohne Einfluss auf den Wert (die Bedeutung) desselben sind, in der That also nur die Form des Ausdrucks (nur den Namen dessen, was er bedeutet) berühren. Diese erlaubten Umformungen nennt man vorzugsweise *„Transformationen“*. Es sind das diejenigen Veränderungen an dem Ausdrucke, oder freien Reproduktionen desselben, durch welche der Ausdruck in einen neuen verwandelt wird, übergeht, welcher dem gegebenen identisch gleich sein muss.

Von Verschiedenem eines für's andere zu setzen ist in dem angegebenen Sinne bei Ausdrücken im Allgemeinen nicht erlaubt, wie man leicht an den nächsten besten Beispielen (und schon bei den einfachsten Ausdrücken, wie $a \cdot b$, $a + b$, a_1) sich überzeugen kann.

Für einen Term auch einen von ihm *verschiedenen* zu substituiren ist natürlich aber angängig bei *allgemeinen* Sätzen oder Formeln. Kommt a als allgemeines Symbol in solchen vor, und ist unter a bereits ein bestimmtes Gebiet verstanden, so darf man doch b für a schreiben, auch wenn b ungleich a ist; man darf auch die vorkommenden Buchstabensymbole allgemeiner Art beliebig unter sich *vertauschen*, unbeschadet dessen, dass sie verschiedene Bedeutungen haben mögen (vergl. Anm. 2 zu Prinzip II). „Erlaubt“ sind hier diejenigen Veränderungen zu nennen, die unbeschadet der Richtigkeit der Formel vollzogen werden können.

Anmerkung zu Theorem 32).

Der ungemein häufig auszuführende Schluss von einer Gleichung $a = b$ auf die Gleichheit zwischen den Negationen ihrer beiden Seiten: $a_1 = b_1$, dieser Schluss — mithin die Anwendung des Th. 32) — darf nicht etwa als das „Negiren jener Gleichung“ bezeichnet werden; vielmehr ist zu sagen: aus $a = b$ folge durch *„beiderseitiges* Negiren“ die Gleichung $a_1 = b_1$.

Es würde nämlich die Negation oder Verneinung der Gleichung $a = b$ selbst (schlechtweg) die Behauptung liefern, dass a *nicht* gleich b sei, in Zeichensprache, dass $a \neq b$ (vergleiche den Aussagenkalkul) — eine Behauptung welche die Gleichung $a = b$ aufhebt, umstösst, also mit ihr nicht nur nicht äquivalent, sondern sogar unverträglich ist — desgleichen also auch keineswegs sich deckt mit der Behauptung, dass Nicht-a gleich sei Nicht-b.

Ich glaubte darum[2] für diese Anwendung des Th. 32) einen eigenen Namen in Gestalt von („Entgegensetzung“ oder) „Opposition“ seiner Zeit vorschlagen zu sollen. Doch erscheint das vorstehende als das näher liegende Auskunftsmittel, die Verwechslung zu vermeiden, und dürfte dasselbe wol den Vorzug verdienen. Zudem liesse auch der bei einer Subsumtion — vergl. unten Th. 37) — schon sanktionirte Name des „Schlusses durch *Kontraposition*“ sich hier auf die Gleichung mit übertragen.

33_+) Theorem. *Es ist allgemein:*

$$a + b = ab + ab_1 + a_1 b.$$

Beweis. Wir haben:

$$a+b = a\cdot 1 + 1\cdot b = a(b+b_1) + (a+a_1)b = (ab+ab_1) + (ab+a_1 b) = ab + ab_1 + a_1 b,$$

mit Rücksicht auf die Sätze $21_\times$), 30_+), $30_\times$) und $\mathrm{III}_\times$ (sogar schon $\mathrm{III}_\times{}^0$), endlich 14_+) — nicht zu gedenken der Theoreme 16), 12_+) und 13_+) Zusätze. Man darf nämlich den Faktor 1 hinzusetzen, für 1 nach Belieben $b + b_1$ oder $a + a_1$ substituiren (da diese Terme der 1 gleich sind), sodann ausmultipliziren, weil hier die Summanden disjunkte sind, endlich die Additionsklammern weglassen, und die Wiederholung des Summanden ab als tautologisch unterlassen.

Zusatz zu Th. 33_+). *Für beliebige a, b ist auch:*

$$a + b = a + a_1 b = ab_1 + b,$$

d. h. Eine Summe bleibt ungeändert, wenn man einen Summanden multiplizirt mit der Negation eines andern, und umgekehrt: *so oft in einem Glied einer Summe ein Faktor steht, der als die Negation eines andern Glieds derselben erscheint, darf man diesen Faktor unterdrücken.*

Beweis. Es ist ähnlich wie oben:

$$a + b = a\cdot 1 + b = a(b+b_1) + b = (ab+ab_1) + b = ab_1 + (ab+b) = ab_1 + b$$

mit Rücksicht, ferner, auf das Absorptionsgesetz $23_\times$). Und analog wenn b und a vertauscht werden. Dies ist der selbständige Beweis des für die Technik des Kalkuls ungemein wichtigen Zusatzes. Am schnellsten ergibt sich derselbe aus der Formel 33_+) durch Vereinigung des ersten Terms rechterhand mit dem zweiten oder dritten gemäss 27_+), 30_+) und $21_\times$).

Durch Anwendung vorstehender Sätze kann eine binomische Summe jederzeit in eine „reduzirte“ verwandelt werden. Es ist ratsam, sich dieselben einzuprägen. Ihre Veranschaulichung geben wir unter dem nächsten Satze.

34_+) Theorem. *Was auch a und b für Gebiete vorstellen mögen, so ist:*

$$1 = ab + ab_1 + a_1 b + a_1 b_1.$$

Beweis. Man hat in der bisherigen Weise:

$$1 = a + a_1 = a\cdot 1 + a_1\cdot 1 = a(b+b_1) + a_1(b+b_1) = ab + ab_1 + a_1 b + a_1 b_1$$

unter Berufung auf $\mathrm{III}_\times$ [oder auch nur $\mathrm{III}_\times{}^0$]. —

Sind a und b z. B. Kreisflächen, so entsprechen den Gliedern rechterhand in 34_+) die vier Teile, in welche von den Konturen dieser

Gebiete die ganze Ebene der Tafel im Allgemeinen zerschnitten wird — wie dies Fig. 17 veranschaulicht. Man sieht zugleich, dass das [in Fig. 9_+) schraffirte] Gebiet $a+b$ aus den drei ersten dieser Terme zusammengesetzt ist, und ebensoleicht, wie Th. 33_+), ist auch der Zusatz zu demselben durch die Anschauung zu bewahrheiten.

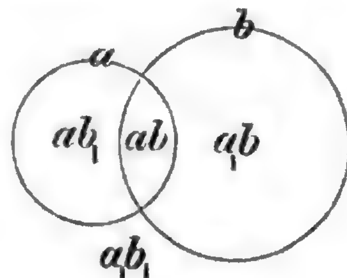


Fig. 17.

Zur Erläuterung sei erinnert, dass man der unter Postulat ((3)), Fig. 16 gegebenen Interpretation von a_1 und b_1 eingedenk sein muss. Hienach wird ab_1 — z. B. — dasjenige Gebiet vorstellen, welches der Innenfläche des Kreises a und der Aussenfläche des Kreises b gemeinsam ist, kurz gesagt: den Teil der Kreisfläche a, der ausserhalb b fällt. Und a_1b_1 muss das den beiden Aussenflächen der Kreise a und b gemeinsame Gebiet vorstellen, mithin die Punkte umfassen, die ausserhalb beider Kreise zugleich liegen, ein Gebiet, das man als Aussenfläche des (als ein liegender Achter erscheinenden) Gebietes $a+b$ bezeichnen darf.

Berührten sich die Kreise a und b, so würde das Gebiet ab in *einen* Punkt, den Berührungspunkt zusammenschrumpfen, und hätten ihre Konturen gar keinen Punkt gemein, so würde das Gebiet ab fortfallen, nicht existiren, 0 sein; dann würde ab_1 mit dem ganzen Kreis a und a_1b mit b zusammenfallen.

Zusatz. Ersetzt man in 34_+) die Summe der drei ersten Glieder rechterhand durch den einfacheren Ausdruck, welchem dieselbe nach Th. 33_+) gleich ist, so ergibt sich noch:

$$1 = a + b + a_1b_1.$$

Für die Zwecke des Unterrichts muss zum Bewusstsein gebracht werden, dass bei der korrekten Ausführung jener Substitution zweimal vom Assoziationsgesetze 13_+) der Addition, nebst Zusatz, Gebrauch zu machen war, und zwar in entgegengesetztem Sinne: einmal behufs *Einführung* einer Klammer, durch welche die Gleichung 34_+) in

$$1 = (ab + ab_1 + a_1b) + a_1b_1$$

umgeschrieben, die rechte Seite als zweigliedrige Summe dargestellt wird, deren erster Term nun erst durch das ihm gleiche $a+b$ ersetzbar ist, welches als ein zusammengesetzter Ausdruck zunächst wieder selbst auch eingeklammert werden muss (cf. Anhang 2) — sodann bei dem Substitutionsergebnisse: $1 = (a+b) + ab$ behufs *Unterdrückung* der letzten Klammer.

Dergleichen Zwischenoperationen übergehen wir zumeist mit Stillschweigen.

Nunmehr können wir zur *Begründung des vollen Distributionsgesetzes* schreiten. Dazu bedürfen wir sogar des Th. 34_+) *nicht*, und wurde dieses blos wegen seiner nahen Verwandtschaft mit 33_+) gleich hinter diesem angereiht.

Theorem [ohne Nummer]. Auch wenn bc nicht gleich 0 ist, somit *ganz allgemein, gilt die Subsumtion* $26_\times$) *und damit auch das volle Distributionsgesetz* $27_\times$).

Wir mögen sogleich das letztere beweisen.

Beweis. Einerseits ist:

$$\begin{aligned} ab + ac &= ab \cdot 1 + ac \cdot 1 = \\ &= ab(c + c_1) + ac(b + b_1) = \\ &= abc + abc_1 + acb + acb_1 = \\ &= abc + abc_1 + ab_1c \end{aligned}$$

nach $III_\times$ [sogar schon nach $III_\times^0$].

Andrerseits ist wegen 33_+):

$$a(b + c) = a(bc + bc_1 + b_1c).$$

Und da die Produkte je zweier von den rechts eingeklammerten Gliedern 0 geben müssen, indem hier jedesmal mindestens zwei Faktoren zusammenkommen, die als Negationen von einander sich gegenseitig vernichten, da m. a. W.:

$$bc \cdot bc_1 = 0, \quad bc \cdot b_1c = 0, \quad bc_1 \cdot b_1c = 0$$

ist, so dürfen wir nach dem Zusatz 2 zu Prinzip $III_\times$ nun rechterhand ausmultipliziren. Dies liefert:

$$a(b + c) = abc + abc_1 + ab_1c.$$

Durch Vergleichung mit dem obigen Ausdruck folgt also nach Th. 4):

$$a(b + c) = ab + ac,$$

q. e. d. Mit dem durch Prinzip $III_\times$, Def. (6) und Postulat ((3)) verstärkten Beweiskapitale ist hienach der Beweis des Distributionsgesetzes nunmehr gelungen.

Anmerkung. Eben um zu zeigen, dass auch das Produkt $a(bc + bc_1 + b_1c)$ durch Ausmultipliziren entwickelt werden darf, würde augenscheinlich der speziellere Satz $III_\times^0$ nicht ausgereicht haben und war es unumgänglich, den umfassenderen $III_\times$ als Prinzip hinzustellen.

Dies scheint mir allerdings mathematisch noch nicht vollkommen sichergestellt. Und ebenso muss ich es hier noch dahingestellt sein lassen, ob nicht schon *ohne* das Prinzip $III_\times$ — auf Grund lediglich des Zuzugs von Def. (6) und Postulat ((3)) mit Hülfe des (vielleicht *auch für Aussagen in Anspruch zu nehmenden*) Theorems 30) und 31) (d. i. den Sätzen des Widerspruchs, des ausgeschlossenen Mittels und der doppelten Verneinung) ein Beweis des Distributionsgesetzes möglich wäre. Den in Anhang 4 und 5 entwickelten logischen Kalkul mit Algorithmen kann man hiefür nicht als beweiskräftig gelten lassen, sofern sich in ihn der Begriff der Negation

nicht übertragen lässt (siehe ibidem Schlussnote) vielmehr in diesem Betreff dieser logische Kalkul noch weiter vom identischen zu divergiren, von ihm sich zu entfernen scheint.

Wir dürfen fortan auch die Formeln 26), 27) und $28_\times$) als *Theoreme* bezeichnen und ohne Einschränkung von denselben Gebrauch machen. Dasselbe gilt von dem dualen Gegenstück des letzteren, welches bislang noch nicht erwähnt worden ist, und lautet:

28_+) Theorem. *Es ist*

$$(a + c)(a + d)(b + c)(b + d) = ab + cd.$$

Beweis durch dreimalige Anwendung von 27_+), wodurch sich mittelst Zusammenziehung der beiden ersten und der beiden letzten Faktoren linkerhand ergibt: $(a + cd)(b + cd)$, und dies, ebenso zusammengezogen in die rechte Seite übergeht.

Die Theoreme 26) bis 28) finden nunmehr — ihrer vorgreifenden Chiffrirung ungeachtet — erst hier im System ihre Stelle.

Wir wollen deshalb die $27_\times$) und $28_\times$) auch einmal in ihrer allgemeinsten Fassung von binomischen Summen auf polynomische ausgedehnt aussprechen:

$27_\times$) Th. $(a^1 + a^2 + a^3 + \cdots + a^m)b = a^1b + a^2b + a^3b + \cdots + a^mb.$

$28_\times$) Th.
$$\begin{aligned}(a^1 + a^2 + a^3 + \cdots + a^m)(b^1 + b^2 + \cdots + b^n) =& \\ = a^1b^1 + a^2b^1 + a^3b^1 + \cdots + a^mb^1 &+ \\ + a^1b^2 + a^2b^2 + a^3b^2 + \cdots + a^mb^2 &+ \\ + \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \\ + a^1b^n + a^2b^n + a^3b^n + \cdots + a^mb^n&.\end{aligned}$$

Bei den diesen dual entsprechenden 27_+) und 28_+) sei dies dem Leser überlassen. Die Formulirung derselben dürfte hier kaum verlohnen, weil die Erfahrung des Rechners darthut, dass man schon mit den einschlägigen Theoremen auf der einen Seite des Mittelstrichs überall bequem auskommt — und diejenigen der linksseitigen Kolumne sind aus der Arithmetik geläufig.

Von vorstehender Multiplikationsregel für Polynome kann man sagen, dass sie auch das Distributionsgesetz 27) als besondern Fall in sich schliesse, indem man es als zulässig erachtet und sich vorstellen kann, dass das eine der beiden zu multiplizirenden Polynome von vornherein als ein Monom gedacht werde oder auf ein solches sich reduzire [vergl. die Anm. 1 zu Th. 21) und 22)]. Schrumpft z. B. das zweite Polynom in sein erstes Glied b^1 zusammen, so ergibt sich — indem man dieses erste b als das einzige nun in Betracht kom-

mende statt mit b^1 einfacher mit b schlechtweg bezeichnet — aus $28_\times$) direkt das Th. $27_\times$).

Es lässt sich also das Th. 28) als der allgemeinste Ausdruck des Distributionsgesetzes ansehen.

Zusatz 1 zu Th. 28).

Ist aus Gebietsymbolen, die wir „einfache" nennen wollen und etwa durch Buchstaben dargestellt annehmen, *ein Ausdruck aufgebaut* lediglich mittelst der Operationen der identischen Multiplikation und Addition, mithin dadurch, dass jene Symbole untereinander und auch mit sich selbst irgendwie verknüpft sind *durch die* genannten *zwei direkten Spezies, so lässt sich* allemal *der Ausdruck darstellen als ein Aggregat von Monomen*, als eine Summe, deren Glieder nur Produkte sind aus lauter einfachen Symbolen.

Beweis. Die vorkommenden Operationsglieder können nämlich nur entweder Summanden oder Faktoren sein, und sofern sie selbst noch als zusammengesetzt erscheinen, können sie nur Produkte oder aber Summen sein. In Bezug auf einen zusammengesetzten Ausdruckteil sind daher nur folgende vier Fälle denkbar:

1°) derselbe ist eine Summe und tritt als Summand auf
2°) „ „ „ „ „ „ „ Faktor „
3°) „ „ ein Produkt „ „ „ „ „
4°) „ „ „ „ „ „ „ Summand auf.

Der *zweite* Fall lässt sich überall, wo er vorkommt, durch Ausmultipliziren nach dem Distributionsgesetze *beseitigen* (zu gunsten einer Vermehrung des vierten Falles, indem dabei Produkte von Summen aufgelöst werden in Summen aus Produkten).

Die Fälle 1°) und 3°) *kommen unmittelbar in Wegfall,* indem man die den zusammengesetzten Ausdruckteil umschliessende *Klammer unterdrückt* — in Anbetracht, dass diese sich nach dem Assoziationsgesetze 13) nebst Zusatzdefinitionen in ebendiesen Fällen als überflüssig charakterisirt. Eine Summe aus Summen (genauer gesagt: mit einer Summe als einem Gliede, oder auch mit mehreren Summen und vielleicht noch andern Gliedern als Gliedern) lässt sich ja immer ansehen als eine einzige Summe aus den sämtlichen Gliedern, und ebenso ein Produkt aus Produkten und vielleicht noch andern Faktoren immer darstellen als einziges Produkt aus den Faktoren jener nebst diesen übrigen Faktoren.

Hienach bleibt nur noch der vierte Fall übrig. Das heisst, unser Ausdruck wird nur mehr sein können eine Summe, ein (*ein-* oder mehrgliedriges) Aggregat von Monomen, welche selbst nichts anderes sein

können als (*ein-* oder mehrfaktorige) Produkte aus einfachen Gebietsymbolen, irgendwie herausgegriffen aus der Gruppe der in den Ausdruck ursprünglich eingehenden literalen Gebiete. q. e. d.

Man sagt von einem in solcher Weise dargestellten Ausdruck: derselbe sei *in seine letzten Glieder* („ultimate aggregants") *zerfällt*, aufgelöst (oder entwickelt).

Bemerkenswert ist, dass er dann *keine Klammern mehr enthalten* wird. In der That nur beim Multipliziren von Summen durfte die Klammer (um diese herum) nicht ohne weiteres weggelassen werden, wogegen beim Addiren von Produkten dem herrschenden Gebrauch gemäss die Klammern jeweils gespart werden.

Es versteht sich, dass man bei der geschilderten Zerfällungsarbeit von den Gesetzen der Tautologie und Absorption, — Th. 14) und 23) — im Sinne der Vereinfachung des Resultates umfassendsten Gebrauch machen wird.

Geschieht letzteres nach Möglichkeit, also dass kein Term wiederholt angesetzt und jeder unterdrückt wird, der einen andern als Faktor enthält, so würde sich wol zeigen lassen, dass die Zerfällung eines Ausdruckes in seine letzten Aggreganten immer nur auf *eine* Weise möglich, dass sie eine vollkommen eindeutig bestimmte ist, sobald wenigstens die in den Ausdruck eingehenden „einfachen" Gebiete von einander unabhängig beliebige sind [solange also insbesondre unter diesen Gebieten auch keine vorkommen, welche die „Negation" von andern sind]. Indessen im Hinblick auf spätere viel wichtigere Ausdehnungen unsres Satzes (vergl. § 19) dürfte es kaum verlohnen, diesen immerhin schwierig erscheinenden Nachweis zu liefern.

Zur Illustration werde die Aufgabe gelöst den folgenden Ausdruck in seine letzten Aggreganten zu zerfällen:

$$x = \{abc + (abd + acd)\} +$$
$$+ \{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc) + (a+b+c)(a+b+d)(a+c+d)(b+c+d)\} \times$$
$$\cdot \{(a+b)(c+d) + (a+c)(b+d)\}(a+bc)(a+bd)(a+cd)(a+bcd).$$

Als Nebenrechnung entwickle man erst die beiden Glieder in der zweiten Zeile.

Das erste wird (durch Ausmultipliziren):

$$abcd + abc + abd + acd + bcd,$$

wovon auch noch der erste Term eingeht; das zweite wird:

$$(a+b+cd)(ab+c+d) = ab + ac + ad + bc + bd + cd + abcd,$$

wovon der letzte Term absorbirt wird.

Die stehen bleibenden sechs Terme absorbiren aber auch noch die sämtlichen des vorhergehenden Gliedes, und da die Entwickelung des Inhaltes der geschwungenen Klammer in der dritten Zeile gerade die nämlichen sechs Terme liefert, so erhalten wir:

$$x = abc + abd + acd +$$
$$+ (ab + ac + ad + bc + bd + cd)(a + bcd).$$

Multiplizirt man hier vollends aus, so gehen auch noch die ersten drei Terme von x in dem Ergebnisse ein, und entsteht:

$$x = ab + ac + ad + bcd$$

als das gesuchte Ergebniss.

Ganz genau *dual entsprechend* kann man auch jeden Ausdruck der gedachten Art (der mithin Ergebniss der Verknüpfung von lauter einfachen Symbolen mittelst identischer Multiplikationen und Additionen ist) *„zerfällen in seine letzten Faktoren"*, („ultimate factors" — von Peirce auch geradezu als *Primfaktoren* bezeichnet), d. h. in solche Faktoren, welche nur Summen aus irgendwelchen von den gegebenen einfachen Symbolen sind, mithin kein Produkt mehr zum Summanden enthalten.

Man scheide hier gemeinsame Faktoren, soweit solche ersichtlich sind, jeweils aus, und vereinige die dann noch übrig bleibenden Glieder successive nach dem dualen Gegenstück der Multiplikationsregel für Polynome, d. h. gemäss dem Th. 28_+), indem man jeweils jeden Faktor des einen Gliedes um jeden Faktor des andern vermehrt und die sich ergebenden Einzelsummen schliesslich miteinander multiplizirt (ohne Ausmultipliziren sie zu einem Produkte vereinigt, ihre Multiplikation „blos andeutend").

Auf diese Weise umgeformt wird z. B., wie leicht zu sehen, unser letzter Ausdruck:

$$x = (a + b)(a + c)(a + d)(b + c + d).$$

Ebenso würde ein Ausdruck $y = x + e$ sich nun darstellen als:

$$y = (a + b + e)(a + c + e)(a + d + e)(b + c + d + e).$$

Da jedoch die Anwendung des dualen Gegenstücks 28_+) der Multiplikationsregel für Polynome dem Mathematiker nicht geläufig ist, so werden wir später [unter Th. 36), Zusatz 3] ein anderes Mittel angeben, um ohne jenes denselben Zweck zu erreichen — ein Zweck übrigens, dessen Verwirklichung ohnehin nur selten als vorteilhaft oder wünschenswert erscheinen möchte. —

Zusatz 2 zu Th. 28) [und 30)].

Ist eine „reduzirte" Summe gleich 1, d. h. eine Summe, deren Glieder unter sich disjunkt sind, *so ist die Negation irgend eines Gliedes dieser Summe allemal die Summe ihrer übrigen Glieder* (ohne das genannte); *ebenso* ist — noch allgemeiner — *die Negation irgend eines Aggregates von Gliedern, hervorgehoben aus dieser Summe, leicht angebbar in Gestalt des Aggregates ihrer übrig bleibenden Glieder.*

Denn dieses letztere Aggregat erfüllt die für die Negation des erstern charakteristischen beiden Bedingungen des Theorems 30): dasselbe erstens zur 1 additiv zu ergänzen — dies laut Voraussetzung — und zweitens mit ihm disjunkt zu sein, das Produkt 0 zu liefern; das Produkt muss verschwinden, weil beim Ausmultipliziren desselben gemäss Th. 28_+) alle Partialprodukte nach Voraussetzung verschwinden werden, mithin auch deren Summe.

Ist z. B. $1 = a + b + c + d + e$, während a, b, c, d, e disjunkt sind, so muss sein:

$$a_1 = b + c + d + e, \quad c_1 = a + b + d + e, \quad (a + b + c + d)_1 = e,$$
$$(a + b)_1 = c + d + e, \quad (a + c + e)_1 = b + d, \quad \text{etc.}$$

In der Mannigfaltigkeit 1 der Wirbeltiere muss, was „nicht“ Fisch ist, Reptil oder Vogel oder Säugetier sein, und was *nicht* Reptil oder Vogel ist, muss Fisch oder Säugetier sein. Etc.

§ 14. **Der Dualismus.**

Mit den Prinzipien I, II und $\text{III}_\times$ und den bisherigen Definitionen hatten wir bereits die formalen Grundlagen für die Schlussfolgerungen im identischen Kalkul vollständig gewonnen. Diese Grundlagen entsprachen entweder „dualistisch“ sich selbst, oder sie traten paarweise auf als Gegenstücke zu einander. Nur bei Prinzip $\text{III}_\times$ hörte die Symmetrie zeitweilig auf, indem der diesem dualistisch entsprechende Satz III_+ nicht auch zum Prinzip erhoben wurde (vergl. Anm. 1 zu $\text{III}_\times$). Die Gültigkeit auch dieses Satzes ist nun aber nachgewiesen; sie ist mit dem allgemeineren Satze 26_+), in dem er enthalten, zugleich sichergestellt.

Gleichwie nun also die *Grundlagen*, so müssen auch die aus diesen ableitbaren *Folgerungen* durchaus dem Satze des *Dualismus* genügen, welcher lautet:

35) Theorem.

In jedem Satze und in jeder allgemeinen Formel des identischen Gebietekalkuls ist es gestattet, gleichzeitig die Zeichen der Unter- und Überordnung, die 0 *und die* 1*) *sowie das Mal- und das Pluszeichen* — selbstverständlich mit den zugehörigen Benennungen im etwaigen verbalen Texte, wie Subjekt und Prädikat, Produkt und Summe, Faktor und Summand — *durchweg zu vertauschen, und muss man hiedurch immer*

*) Der Negationsstrich muss dabei unverändert gelassen werden. Dasselbe gilt vom Gleichheitszeichen; doch wird die Eleganz erfordern, dass man die Gleichungen rückwärts lese.

wieder einen gültigen Satz, eine richtige Formel erhalten, die von den ursprünglichen in der Regel, doch nicht notwendig verschieden.

Anstatt die Zeichen $\mathrel{\underline{\in}}$ und $\mathrel{\underline{\ni}}$ der Einordnung und Überdeckung, oder das „Sub"- und das „Supersumtionszeichen" miteinander zu vertauschen, konnte man auch ein jedes derselben, z. B. das erste $\mathrel{\underline{\in}}$ festhalten, wofern man nur alsdann die beiden Seiten der Subsumtion, das Subjekt und Prädikat jeweils vertauschte. In der That: aus $a \mathrel{\underline{\in}} b$ entsteht durch Vertauschung des im Subsumtionszeichen enthaltenen Bogens $($ der Unterordnung mit dem $)$ der Überordnung ersichtlich: $a \mathrel{\underline{\ni}} b$, und durch Vertauschung von major und minor entsteht: $b \mathrel{\underline{\in}} a$, *was genau dasselbe sagt* — [aber freilich etwas ganz anderes als die ursprüngliche Subsumtion $a \mathrel{\underline{\in}} b$. Diese, wenn für sich allein hingestellt, gilt auch in der That nicht als allgemeine Formel, mithin beansprucht der Satz 35) auch nicht, auf sie anwendbar zu sein. Erst da, wo eine solche Subsumtion von andern Relationen abhängig gemacht ist, kann er mit auf sie anwendbar werden, desgleichen auch in solchen besondern Fällen, wie $a \mathrel{\underline{\in}} a$, wo eben die Subsumtion den Charakter einer Formel annimmt].

Prinzip I $a \mathrel{\underline{\in}} a$ gibt insbesondre $a \mathrel{\underline{\ni}} a$; dasselbe geht also auf genannte Weise in sich selbst über.

Aus Prinzip II, welches aussagt: „Wenn $a \mathrel{\underline{\in}} b$ und $b \mathrel{\underline{\in}} c$ so ist $a \mathrel{\underline{\in}} c$" erhalten wir auf die eine Art: „Wenn $a \mathrel{\underline{\ni}} b$ und $b \mathrel{\underline{\ni}} c$, so ist $a \mathrel{\underline{\ni}} c$", auf die andre: „Wenn $b \mathrel{\underline{\in}} a$ und $c \mathrel{\underline{\in}} b$, so ist $c \mathrel{\underline{\in}} a$"; beides aber ist richtig und deckt sich mit Prinzip II selber.

Man revidire schliesslich, dass durch das angegebene Verfahren die beiden Definitionen $(2_\times)$ und (2_+) ebenso $(3_\times)$ und (3_+) zu tauschen kommen, wogegen die Def. (1) der Gleichheit und die (6) der Negation nur in sich selbst übergeht.

Ersetzten wir die Gebietsymbole 1 und 0 etwa durch $1_{(}$ resp. $1_{)}$ und die Operationssymbole $\cdot$ und $+$ durch $\times_{(}$ resp. $\times_{)}$ [desgleichen die Chiffrirungssuffixa $_\times$ und $_+$ durch $($ und $)$], so könnten wir dem Prinzip des Dualismus den einfacheren Ausdruck geben: *In allen Theoremen des Kalkuls darf man die Zeichen $($ und $)$ durchweg vertauschen.*

Führt nämlich von den Grundlagen eine Denknotwendigkeit zu gewissen Folgerungen hin, so muss diese Notwendigkeit bestehen unabhängig von der Materie des Denkens und deren Bezeichnung. Also auch wenn man das mit $($ Ausgedrückte mit $)$ dargestellt hätte, müsste sie fortbestehen. Dann würden aber die Grundlagen dieselben geworden sein, und statt der vorigen hätte man wol grossenteils neue Folgerungen erhalten — die dualen Gegenstücke der letzteren — sonach müssen denn auch diese gelten.

Wir wollen die Berechtigung zu diesem Schlusse noch etwas übersichtlicher darlegen.

Es mögen mit $G_{\between}$ die mehrerwähnten formalen „Grundlagen“ des identischen Kalkuls bezeichnet werden, bestehend aus den bisherigen Definitionen (1), (2), (3), (6), und den hier als „Prinzipien“ bezeichneten Axiomen I, II — unter Zuzug des als ebenfalls gültig nachgewiesenen dualen Gegenstückes III_{+} (oder $\mathrm{III}_{\succ}$) zu $\mathrm{III}_{\times}$ (oder $\mathrm{III}_{\prec}$).

Wie wir gesehen, haben dann diese Grundlagen G die Eigenschaft, wiederum in sich selbst nur überzugehen, d. h. ungeändert zu bleiben, wenn man im obigen Sinne die Zeichen $\prec$ und $\succ$ durchweg vertauscht, und wurde dieser Umstand dadurch sichtbar gemacht, dass wir dem G das Suffixum $\between$ erteilten, welches die gleiche Eigenschaft in sich zu erkennen gibt.

Durch diese Grundlagen $G_{\between}$ ist nun erwiesenermassen eine Gruppe von Folgerungen denknotwendig mitbedingt, z. B. die direkt bewiesenen Theoreme in der Kolumne zur Linken des Mittelstriches enthaltend, welche $F_{\prec}$ genannt werden möge. Dieser notwendige Zusammenhang:

„Es gilt $G_{\between}$, *also* auch $F_{\prec}$“

muss a priori bestehen bleiben, wenn man die Zeichen $\prec$ und $\succ$ vertauscht. Dadurch gelangen wir aber zu dem Satze:

„Es gilt $G_{\between}$, *also* auch $F_{\succ}$“,

durch welchen die ganze Gruppe $F_{\succ}$ der den vorigen $F_{\prec}$ dual entsprechenden Sätze, darunter alle die in der Spalte rechts vom Mittelstrich befindlichen, mit einem Schlage bewiesen erscheint.

Hieraus erhellen auch die Vorteile des Dualismus und seiner Beachtung.

Die durchgängige Symmetrie erleichtert schon das Behalten der Sätze, wie denn auf zwei Säulen ein Bau fester ruht, als auf einer.

Man kann aber den Dualismus auch in der That benutzen als ein *wirksames* Prinzip um sich die Herleitung und Begründung von nahe der Hälfte aller künftigen Sätze zu ersparen. Neben der kleinen Minderzahl sich selbst dual entsprechender Sätze genügt es fortan, nur die in der *einen* Spalte stehenden selbständig abzuleiten, woraus die fehlenden in der andern Spalte fast mühelos abzuschreiben sind, und man sich auf deren Gültigkeit wird ohne weiteres verlassen können. Ja bei jedem Paar einander dual entsprechenden Sätze hat man die Wahl, ob man nur den linksseitigen oder nur den rechtseitigen wirklich beweisen will.

Beispielsweise müssen darum auch Geltung haben die sämtlichen

noch ausstehenden dualen Gegenstücke bisheriger Sätze, nämlich die noch nicht erwähnten Theoreme:

$33_\times$) Th. $$ab = (a + b)(a + b_1)(a_1 + b).$$

Zusatz dazu:

$$ab = (a + b_1)b = a(a_1 + b).$$

$34_\times$) Th. $$(a + b)(a + b_1)(a_1 + b)(a_1 + b_1) = 0.$$

Zusatz dazu:

$$ab(a_1 + b_1) = 0.$$

Beweise für diese Sätze kann man *zum Überfluss* auch, den vorgetragenen genau dual entsprechend, konstruiren. Desgleichen mögen — eine für den Anfänger empfehlenswerte Übung selbständig Beweise für sie aufgesucht werden.

Bei den „Zusätzen" genügt schon einfaches Ausmultipliziren mit Rücksicht auf $30_\times$) und 21_+). Bei den „Theoremen" empfiehlt sich Anwendung des Schemas 27_+), wonach sich z. B. die beiden ersten Klammerfaktoren zusammenziehen in $a + bb_1 = a + 0 = a$, etc.

Übrigens gleichwie in vorstehenden Beispielen werden wir auch sonst nirgends *gezwungen* sein, vom Th. 35) des Dualismus einen wesentlichen Gebrauch zu machen, indem wir uns ja die benötigten Sätze auch samt und sonders einzeln zu beweisen vermögen. Sofern es uns beliebt, mögen wir das Th. 35) auch lediglich die Rolle eines *empirischen* Prinzips hier spielen lassen, welches die eben bei jedem einzelnen Satze zu machende Wahrnehmung, dass auch sein duales Gegenstück gilt, nachträglich konstatirt, m. a. W. alle diese Wahrnehmungen zu einem allgemeinen Satze in erschöpfender Induktion zusammenfasst, resumirt.

In solchen Fällen, wo wir nur mehr des einen der beiden zu einander dualen Sätze für die Technik des Kalkuls bedürfen werden, begnügen wir uns hinfort, auf die Existenz des andern lediglich in der Chiffrirung — durch Anbringung eines Suffixums $_\times$ oder $_+$ bei des erstern Chiffre — hinzuweisen.

Den tiefern Grund für die Thatsache, dass wie durch den Gebietekalkul, so auch durch die Lehre von den Begriffen ein Dualismus sich hindurchzieht, kann man darin erblicken, dass — wie auf S. 130 erkannt — die Unterordnung von Begriffsumfängen einer Überordnung der zugehörigen Begriffsinhalte parallel geht, und insbesondre auch die Multiplikation der Umfänge gleichzeitig angesehen werden kann als eine Addition der Inhalte. Es ist deshalb nicht zu verwundern, dass jener identischen Multiplikation auch die Eigenschaften der identischen Addition genau zukommen, da sie im Grunde selbst eine solche ist.

§ 15. Kritische Vorbemerkungen zum nächsten Paragraphen: Inwiefern negative Urteile als negativ prädizirende anzusehen und disjunktiv prädizirende Urteile von den disjunktiven zu unterscheiden sind.

Wir treten nunmehr an ein Untersuchungsfeld heran, auf welchem grosse Vorsicht geboten ist, indem wir namhafteste Philosophen aller Zeiten — ich nenne zunächst nur Aristoteles und Kant — hier weit auseinandergehen sehen und auch ganz neuerdings von autoritativen Seiten unhaltbare Theorieen aufgestellt zu finden meinen, die ihre Urheber, wofern diese nur konsequent dabei zuwerke gingen, in die grössten Widersprüche mit sich selbst verwickeln müssten.

Schon um die hiernach entgegenstehenden Hindernisse hinwegzuräumen sehe ich mich veranlasst, der Fortsetzung des systematischen Teils unsrer Disziplin einige Betrachtungen von kritisch-polemischer Natur voranzuschicken.

Bei diesen Vorbetrachtungen will ich mich des Rechnens noch enthalten, die Überlegungen vielmehr gemeinverständlich blos in Worten führen. Der Kalkul wird schliesslich die Ergebnisse dieser Überlegungen bestätigen und alles in noch hellerem Lichte erscheinen lassen.

Der Gründe für die Schwierigkeiten einer Theorie der Negation und die durch sie bedingte Uneinigkeit unter den Fachgelehrten sind mehrere, und werde hier auf die hauptsächlichsten im voraus hingewiesen, obwol sie sich erst nach Bewältigung des Aussagenkalkuls völlig überblicken und dann auch alle Schwierigkeiten sich als überwunden erkennen lassen werden.

Ein Hauptgrund dürfte zu erblicken sein in gewissen Unbestimmtheiten der Wortsprache, welche oft schon in ihren einfachsten und fundamentalsten Satzbildungen die wünschenswerte Präzision vermissen lässt, indem sie — als eine notwendiger Zeichen, wie namentlich des Instituts der Klammern, entbehrende — verschiedene Auffassungen dieser Satzbildungen zuzulassen scheint und insbesondere eine Vermengung von Deutungen des *Klassen*kalkuls mit solchen des *Aussagen*kalkuls nicht selten nahe legt.

Die in Titel des § 16 genannten Sätze der Logik gehören wesentlich dem Aussagenkalkul an, wurzeln ganz in diesem und können in ihrer ursprünglichen Bedeutung erst dort völlig erledigt werden (Vergl. § 31).

Es kann sich im Klassenkalkul nur um Analoga von ebendiesen Sätzen handeln, denen wir aber, weil sie gleichlautenden Ausdrucks in der Formelsprache teilhaftig sind und später durch einen blossen Wechsel der Interpretation, durch eine einfache *Umdeutung* aus ihnen

hervor oder in sie übergehen werden, einstweilen schon den gleichen Namen beilegen mit dem unterscheidenden Zusatze: *„im Klassenkalkul“*.

Zwei zu den allergeläufigsten gehörende Redewendungen sind es besonders, die durch ihren Doppelsinn der Verwirrung Vorschub leisteten.

Die *eine**) lautet:

α) *„A ist nicht B“*.

Entgegen einer weitverbreiteten Meinung ist es im Allgemeinen *durchaus nicht gleichgültig* (für den Sinn dieser Aussage), *ob die Verneinungspartikel* „nicht“ (in noch näher zu erläuterndem Sinne) *zur Kopula* „ist“, *oder ob sie zum Prädikate „B“ geschlagen wird.*

Es handelt sich um die beiden Aussagen:

β) *„A »ist nicht« B“* und γ) *„A ist »nicht B«“*

welche als die Deutungsmöglichkeiten der Aussage α) zunächst sich darzubieten scheinen.

Da im Worttext die Klammern ganz andern Zwecken zu dienen pflegen, als wie im Kalkul, da sie hier schon anderweitig beschlagnahmt sind, nämlich wie bekannt jeweils verwendet werden, um Anmerkungen, Erläuterungen in den Haupttext einzufügen, so ersetze ich daselbst die Zeichen (,) des Kalkuls durch eigentümlich gestaltete Anführungszeichen (guillemets, quotation marks) » , « .

Man kann die fraglichen Deutungen β) und γ) beim Aussprechen schon durch den Tonfall unterscheiden: es wird der Satz β) etwa im Rhythmus des Choriambus (– ◡ ◡ –) zu sprechen sein, mit einer Pause hinter der ersten Länge, wogegen der Satz γ) mehr an den Versfuss des Ditrochäus (– ◡ – ◡) anklingt.

Nach der Meinung derjenigen Philosophen, welche, wie Kant, Lotze, Sigwart**) das „verneinende“ Urteil α) im Sinne von β) aufgefasst wissen, nämlich die Verneinungspartikel zur Kopula geschlagen haben wollen — wenn sie auch nicht gerade zu der deutlichkeitshalber von mir dafür gewählten Schreibung β) sich bequemen — soll dieses Urteil α) oder β) nur konstatiren, *dass die Aussage*

δ) *„A ist B“*

beziehungsweise

δ') Das Gebiet A ist im Gebiete B enthalten,

δ'') Die Klasse A ist enthalten in der Klasse B,

δ''') Alle A sind B

unrichtig, falsch sei. Umgekehrt käme darnach der Leugnung dieser

*) Die andre werden wir weiter unten erst unter η) namhaft machen.

**) Übrigens ohne dabei unter sich übereinzustimmen!

Aussagen δ) der sprachliche Ausdruck β) zu, beziehungsweise die Ausdrucksform:

β') Das Gebiet A ist nicht in dem Gebiete B enthalten,

β'') Die Klasse A ist nicht enthalten in der Klasse B,

β''') Alle A »sind nicht« B.

Die Frage, ob es wirklich angängig ist, die Verneinung der Aussagen δ) sprachlich in die Ausdrucksformen β) einzukleiden, werden wir nachher zum Austrag zu bringen haben. Um Einwänden zuvorzukommen will ich voraus bemerken, dass dies nicht allgemein, und strenge genommen wol überhaupt nicht, angängig ist und dass ich mich blos provisorisch zu dieser Ausdrucksweise bequeme um auf den Gedankengang derjenigen Philosophen eingehen zu können, welche darin den Typus der „verneinenden" Urteile zu erblicken wähnen.

Das Missliche solcher Darstellung wird der Leser sicherlich bei β''') bereits herausgefühlt haben.

Bei genauerem Zusehen wird es sich uns als *inkorrekt* erweisen, nämlich mit dem anerkanntesten Prinzip der Logik ersichtlich in Widerspruch bringen, bestünde man darauf, *die Verneinung der Aussagen* δ), δ''') *in die Form der Sätze* β), β''') *zu kleiden*, die Verneinungspartikel sonach auf die *Kopula* zu beziehen.

Als den korrekten Ausdruck solcher Verneinung werden wir schliesslich allgemein nur gelten lassen können:

ε) „*Es ist unrichtig zu behaupten, A sei B*"

ε''') Es ist nicht wahr, dass alle A B sind.

Im Hinblick darauf werde ich mich auch enthalten, das im Sinne von β) verstandene Urteil α) hier ein „verneinendes" Urteil zu nennen; ich werde vielmehr diese korrekt durch ε) darzustellende Aussage hier nur als eine „*Urteilsverneinung*" gelten lassen.

Gebrauchen wir demungeachtet vorderhand dafür die Ausdrucksweise β), so ist der bei den Chiffren δ) erklärte Sinn derselben nie ausser Augen zu lassen: es ist demgemäss unter allen Umständen festzuhalten, dass sie die Geltung der Aussagen δ) in Abrede zu stellen haben und weiter nichts. —

Was ferner den Sinn der Aussage γ) betrifft, welche als die andre Deutungsmöglichkeit von α) sich darbot, so hat, wenn A und B Gebiete unsrer Mannigfaltigkeit bedeuten, das »nicht B«, non-B oder B_1 im vorvorigen Paragraphen bereits seine Erklärung wiederum als ein Gebiet ebendieser Mannigfaltigkeit gefunden, und können wir in diesem Falle nicht im Zweifel darüber sein, was die Aussage oder Subsumtion γ) bedeutet. Sie wird dann, etwas ausführlicher formulirt, behaupten:

γ') Das Gebiet A ist enthalten in dem Gebiet Nicht-B, d. i. in demjenigen Gebiete, welches übrig bleibt, wenn man die sämtlichen Elemente von B, und nur diese, aus unsrer Mannigfaltigkeit fortlässt, dem Gebiete, welches ohne ein Element mit B gemein zu haben, das B zur ganzen Mannigfaltigkeit ergänzt.

Wie ein Punktgebiet aus der Ebene der Schultafel, so vermögen wir aber auch irgend ein gewünschtes System von Individuen aus einer Klasse, der sie angehören, im Geiste fortzulassen oder auszustreichen und die alsdann übrig bleibenden Individuen festzuhalten; diese vermögen wir so zusammenzufassen zu einer neuen Klasse.

Sofern dabei nur Bezug genommen wird auf eine bestimmte Mannigfaltigkeit der „gewöhnlichen" Art, deren Individuen etwa den Punkten einer Ebene eindeutig zugeordnet werden könnten und welche die bei einer Untersuchung in Betracht gezogenen Begriffsumfänge oder Klassen mit ihren Individuen sämtlich enthält, wird demnach auch die Bedeutung der „*Negation einer Klasse*" (und damit, nach dem Umfange betrachtet, auch des zugehörigen „Begriffes") einsinnig feststehn — und zwar für alle Klassen des erwähnten Untersuchungsfeldes, überhaupt für alle diejenigen, welche etwa aus Individuen jener Mannigfaltigkeit gebildet werden könnten.

Haben wir z. B. die Mannigfaltigkeit der farbigen Dinge im Auge, so ist klar, was wir meinen, wenn wir reden von »nicht weissen«, oder auch von »nicht-schwarzen« Dingen, und dieselben Ausdrücke erhalten abermals eine bestimmt feststehende, obzwar beträchtlich weitere, umfassendere Bedeutung, sobald wir sie etwa auf die Mannigfaltigkeit der sinnlich wahrnehmbaren Dinge beziehen; im letzteren Falle gehört ein Schall, Geruch, ein Druck oder Schlag etc. dazu, im ersteren nicht.

Einerlei, ob das erstere geschieht, oder das letztere, so werden beispielsweise die Aussagen gültig sein: „Einige Schafe sind nicht-weiss", und „Alle Schafe sind nicht-grün", oder, was dasselbe sagt: „Kein Schaf ist grün".

Diese Aussagen, welche nach der landläufigen Terminologie das „*partikular verneinende*" und das „*universell verneinende*" Urteil exemplifiziren, werden sogar noch richtig bleiben, wenn man auch die in Gedanken zugrunde gelegte Mannigfaltigkeit noch beliebig weiter ausdehnt; denn ebendadurch könnte auch nur eine Erweiterung der Prädikatklasse »nicht weiss« resp. »nicht-grün« (oder des auf die Mannigfaltigkeit beschränkten Umfangs des Prädikat„begriffes", sofern von einem solchen noch zu sprechen ist) bewirkt werden, und gehörte das

Subjekt schon zu der engeren, so wird es um so mehr auch zu der erweiterten Prädikatklasse gehören.

Sind A und B irgend welche Klassen von Individuen oder völlig bestimmten mittelst Eigennamens bezeichenbaren Objekten des Denkens — Klassen, die z. B. als die Umfänge von uns gegebenen Begriffen bestimmt sein mögen — so kann man immer eine Mannigfaltigkeit konstruiren, welche die Individuen aus beiden Klassen sämtlich enthält, und schon mit Bezug auf diese Mannigfaltigkeit (die Mn. $A + B$) werden dann die Aussagen: „Einige A sind nicht-B“ sowie „Alle A sind nicht-B“ einen völlig bestimmten Sinn haben, nämlich fähig sein, auszudrücken, dass die Klassen A und B teilweise resp. ganz einander ausschliessen (und zwar im ersteren Falle auch auf welche Weise).

Ganz dasselbe wird auch gelten für eine jede der genannten übergeordnete Mannigfaltigkeit. Und es scheint zunächst nichts im Wege zu stehen, dass wir die letztere sogar sich erstrecken lassen über das ganze Gebiet des überhaupt zu denken Möglichen, dass — wie wir dies ausdrücken wollen — wir unsern Betrachtungen zugrunde legen die „*absolute* Mannigfaltigkeit“ (des Denkmöglichen).

Es würde dadurch die als „Verneinung“ einer bestimmten Klasse B „schlechtweg“ zu bezeichnende Klasse Nicht-B die weiteste Bedeutung zugewiesen erhalten, deren sie überhaupt fähig sein kann, sie würde nämlich alle möglichen individuellen Objekte des Denkens zusammenschliessen mit Ausnahme der zur Klasse B gehörenden.

In so erweiterter Bedeutung pflegt nun die Wortsprache die durch Verbindung eines Terms B mit der Verneinungspartikel „nicht“ von ihr zusammengesetzten Ausdrücke „nicht-B“ allerdings gemeinhin nicht aufzufassen, namentlich dann nicht, wenn dieselben in andern Stellungen wie als Prädikat gebraucht werden. Vielmehr bezieht sie dieselben in der Regel stillschweigend nur auf irgend ein dem Begriffe B übergeordnetes genus proximum.

Sprechen wir z. B. von „Nichtkombattanten“, so wird das genus proximum (zu Kombattanten) hier etwa die Klasse der zur Armee gehörigen oder aber der an einem Feldzug teilnehmenden Personen sein. Und sicher, wenn wir das Wort als Subjekt eines Satzes, oder im Genitiv, in einem von andern Substantiven regirten Kasus gebrauchen, werden wir — wie Lotze treffend betont — die Pferde, Wagen und Steine am Wege nicht unter die Nicht-Kombattanten einrechnen.

Fällt dagegen das Wort als Prädikat, sagen wir z. B. „die Ärzte

sind Nichtkombattanten“, so wird es für die logische Tragweite des Satzes gleichgültig, ob wir das Wort in jener engeren oder in irgend einer weiteren Bedeutung fassen. Da schon die engere Bedeutung des Wortes „Nichtkombattant“ die Ärzte umschliesst, so wird die weitere es ebenfalls thun.

Strenge genommen sagt freilich im letzteren Falle das Urteil weniger aus, als im erstern; es lässt nämlich unausgedrückt, dass die (gedachten) Ärzte zu den (am Feldzug teilnehmenden) *Personen* gehören. Allein dieser Umstand bildete einen auch im erstern Falle nur *enthymematischen* Bestandteil des Urteils, indem letzteres ja des genus proximum nicht ausdrücklich Erwähnung that. Sofern man — worauf es hier allein ankommen wird — nur eben die Thatsache, dass kein Arzt ein Kombattant ist, als den vollen Sinn und Gehalt des Urteils gelten lässt, sagt bei der zweiten Auffassung das Urteil auch ebensoviel als bei der ersten.

Wir mögen hienach die Frage, ob bei dem prädikativen Gebrauche des (dem Umfange nach jedenfalls existirenden) Begriffes Nicht-B dieser letztere mehr oder weniger enge gefasst werden soll, die Frage, ob bei der Begrenzung dieser durch Negation aus einer gegebenen B abzuleitenden Klasse Nicht-B Bezug zu nehmen sei auf eine bestimmte, mental zu supplirende, der B nächst übergeordnete Gattung (in welchem Falle auch non-B als eine wohldefinirte Klasse erscheinen wird, deren Aufstellung und Verwendung unmöglich beanstandet werden kann), oder ob dabei vielmehr Bezug genommen werde auf die „absolute“ Mannigfaltigkeit (ein Verfahren, gegen welches von gewissen Seiten Protest erhoben worden ist) — diese Frage können wir zunächst ganz offen lassen, sie in das subjektive Belieben stellen. Wir mögen z. B. die in Betracht kommenden verneinenden Ausdrücke wie „nicht-schädlich“, „nicht vollkommen“ oder „unvollkommen“, „*nicht* in eine bestimmte Beziehung eingehend, etwas bestimmtes thuend oder leidend, etc.“ ganz in dem allergeläufigsten Sinne verstehen, und sind darnach auf dem Punkte angelangt, sagen zu dürfen, dass mit einer Aussage der Form

γ'') Die Klasse A ist enthalten in der Klasse Nicht-B

oder

γ''') Alle A sind »nicht B«

ein bestimmter und bekannter Sinn verbunden wird.

Das uns die Klammer vertretende Anführungszeichen » « konnte hier auch entbehrlich gemacht werden durch die Schreibung:

A ist (resp. alle A sind) nicht-B, non-B oder Nicht-B,

wodurch sich schon die Auffassung γ) des Urteils α) hinlänglich charakterisirt und von der Deutung β) unterscheidet. Beliebt ist für γ) auch die Ausdrucksweise: „*A ist ein Nicht-B*“.

Berechtigt ist nun die Bemerkung, dass ein solches Urteil γ) ganz wesentlich als ein *bejahendes* erscheint: es wird dadurch, wie sonst allerwärts, eine Subjektklasse unter die Prädikatklasse subsumirt — welche letztere hier nur, gewissermassen zufällig, den verneinenden Ausdruck Nicht-B besitzt. Dass solche Ausdrucksform aber als ein nebensächlicher Umstand hinzustellen ist, sich mehr nur psychologisch, als logisch, begründen und zumeist sich auch vermeiden lässt (sofern für nicht-B auch ein „positiver" Name zur Verfügung steht), dass ebenso, wo sie fehlte, die Ausdrucksform sich (mittelst doppelter Verneinung) willkürlich herstellen liesse, das haben wir schon unter ν_2) in B der Einleitung ausgeführt oder angedeutet (vergl. die dortigen Betrachtungen über parallele und nicht-schneidende sowie schneidende und nicht-parallele Geraden in einer Ebene).

Im Hinblick darauf will es nicht als rationell erscheinen, auf diesen Umstand eine wesentliche Unterscheidung zwischen bejahenden und verneinenden Urteilen zu gründen. Es scheint Beanstandung zu verdienen, dass man die Urteile α) mit der Deutung γ) überhaupt als „verneinende" bezeichne — wie ich dies im Einklang mit der seit Aristoteles in der scholastischen Logik (noch) *herrschenden* (erst neuerdings mehrseitig bekämpften) Terminologie in der That hier thun werde.

Die Wahrnehmung dieser Diskrepanz hat bekanntlich Kant veranlasst, neben den „bejahenden" und den *von ihm* „verneinende" genannten Urteilen β) noch eine dritte Art von Urteilen einzuführen, die er ziemlich unglücklich — vergl. Sigwart I, p. 122 — „unendliche" oder „limitirende" Urteile nennt (Die Seele ist nicht sterblich, soviel als: gehört in die unendliche Sphäre, die übrig bleibt, wenn ich das Sterbliche aussondere). Wie man sieht decken sich diese „limitativen" Urteile Kant's (deren Berechtigung und Vorkommen Sigwart — im Gegensatz zu Lotze — ausdrücklich anerkennt) mit den eben besprochenen Urteilen γ).

Ich würde vorstehenden Einwand als berechtigt anerkennen und die „verneinenden" Urteile der herrschenden Terminologie als unpassend benannte umtaufen, wenn es daneben noch wirklich verneinende Urteile — etwa die β) — gäbe. Indem wir aber, wie schon angedeutet, diese Ausdrucksform β) als nicht haltbar erkennen werden, wird offenbar, dass solches nicht der Fall ist, und aus diesem Grunde mögen wir uns auch der herrschenden Terminologie in Bezug auf ihre *„verneinenden"* Urteile ganz unbedenklich anschliessen.

Am angemessensten erscheint es, dergleichen Urteile γ) — mit Wundt — als *„negativ prädizirende"* zu bezeichnen.

Diese Benennung dürfte auf alle Fälle passend und unanfechtbar erscheinen, und auch von Denjenigen der Kant'schen vorgezogen werden,

die, wie Sigwart, auf einem, dem hier zu rechtfertigenden entgegengesetzten Standpunkte bestehen zu müssen glauben.

Wir haben jetzt den Sinn der Aussagen β) und γ) als der beiden Deutungsmöglichkeiten von α) selbständig festgestellt und vorweg die einschlägigen Benennungsfragen erledigt.

Nunmehr können wir dazu schreiten, zu zeigen, dass *die Bedeutung der beiden Urteile β), γ) in der That grundverschieden* ist. Im Anschluss daran wird sich dann auch herausstellen, welches von beiden die dem Urteil α) rechtmässig zukommende Deutung ist.

Ob in α) die Verneinungspartikel „nicht" in dem angeführten Sinne zur Kopula, oder ob sie zum Prädikat geschlagen wird, wird sich als *gleichgültig* uns nur dann erweisen, wenn das Urteil α) ein *singulares* ist, d. h. wenn das Subjekt A des Urteils *keine Klasse*, sondern ein *Individuum* vorstellt, wenn es mithin nicht durch einen Gemeinnamen als ein vieldeutiger Term, sondern als ein eindeutiger Term durch einen Eigennamen ausgedrückt sich darstellt.

Stellt A einen Punkt unsrer Mannigfaltigkeit vor, so decken sich die Aussagen β') und γ'). Wenn der Punkt einem Gebiete B nicht angehört, so gehört er notwendig dem Aussengebiete, der Negation des letztern oder dem Gebiete Nicht-B an, und umgekehrt. Der Punkt kann nicht gespalten werden; er kann nicht in zwei einander ausschliessende Gebiete zugleich hineinragen.

Ebenso, wenn A ein Individuum vorstellt.

Die Musik von Beethoven — ich meine diese selber, und zwar (um ein ganz individuelles Subjekt zu erhalten) bei einer bestimmten Gelegenheit von gewissen Künstlern exekutirt, nicht etwa aber die gedruckten Noten — »*ist* nicht« schwarz. Sie *ist* folglich »*nicht*-schwarz«.

Oder, um noch ein besseres Beispiel zu nehmen:

Das Kind frägt: „Darf ich dies thun?" Der Vater sagt: „Nein!" und er mag diese Antwort ausführlicher in den Satz kleiden: „Du darfst dies nicht thun."

Dies ist zunächst wol zu unterscheiden von: Du darfst es »nicht thun«, d. h. Du darfst es unterlassen! Man sieht: die Verneinungspartikel gehört nicht zu dem ihr unmittelbar folgenden Worte „thun", sondern zu dem Worte „darfst" und wäre logisch-konsequenter Weise, aber im Gegensatz zum Sprachgebrauche, eigentlich voranzustellen dem Prädikate „darfst dies thun" des entsprechenden bejahenden Urteils. Im Englischen wird sie schon etwas weiter vorangenommen: „You dare not do that", und am unzweideutigsten prägt sich ihre Bezugnahme auf das Verbum „dürfen", welches das nachfolgende regirt, im Französischen aus: „Tu ne dois pas faire cela".

Ob wir nun das Verbot „Du darfst dies nicht thun" wie vor-

stehend auffassen als die blosse Verneinung des Satzes „Du darfst dies thun“, welchen das Kind als einen Fragesatz aufgeworfen, oder ob wir dasselbe deuten in dem Sinne: „Du gehörst zur Klasse der Personen, welche nicht es thun dürfen“, dies ist in materieller Hinsicht ganz ohne Belang, kommt wesentlich auf dasselbe hinaus. Hier rächt es sich nicht, wenn man die Verneinungspartikel zur Kopula anstatt zum Prädikate schlägt.

Wollte aber darauf hin jemand behaupten, aus der Verneinung der Aussage: „Du darfst dies thun“ sei mit Denknotwendigkeit *gefolgt:* „Du darfst dies nicht thun“, oder umgekehrt, so wäre zu entgegnen, dass solcher Schluss von der Verneinung des „A ist B“ auf die Behauptung „A ist nicht B“ doch ein formell unrichtiger wäre. Im vorliegenden Falle, wo Prämisse und Konklusion materiell richtig, war der Schluss ein unvollständiger, ein *Enthymem.* Und zwar beruhte er wesentlich mit auf einer stillschweigend übergangenen Nebenprämisse, besagend, dass das Subjekt „Du“ resp. das „Ich“ des Fragesatzes ein *Individuum* sei. Nach der Art, wie wir den Begriff des Individuums fassen, drückt diese unerwähnt gebliebene Prämisse einerseits aus, dass unser Subjekt nicht eine Mehrheit von Bedeutungen habe (keine Gattung ist), und andrerseits auch dass es existire, nicht „nichts“ bedeute oder bedeutungslos wäre — sodass, in der die Null adjungirt habenden exakten Logik wenigstens, die ausgelassene Prämisse auch als ein Paar von Prämissen hingestellt werden könnte.

Dass in der That ohne solche Prämisse der Schluss hinfällig wäre, wird sogleich ersichtlich, wenn wir nachher das Subjekt Ich, Du des Frage- und Antwortsatzes durch Wir, Ihr ersetzen.

Ganz anders (nämlich) verhält sich aber die Sache, wenn das Urteil α) ein *generelles* ist, mag es partikular, mag es universal sein. Hier geben die Sätze β) und γ) verschiedenen Sinn, und wenn dem Sprachgebrauch unzweifelhaft entsprechend das Urteil α) interpretirt werden soll, so ist es durchaus nur im Sinne von γ) zu deuten. Konsequenterweise *muss* demnach *die Verneinungspartikel zum Prädikate geschlagen werden.*

Nehmen wir z. B. an, dass die ältern Geschwister etwas thun dürfen (vielleicht sogar sollen), was den jüngeren untersagt bleibt, so wird auf die Frage der Kinder oder des unter ihnen das Wort führenden: „Dürfen wir dies thun?“ das „Nein“ des Vaters in Kraft bleiben, denn ein „Ja“ oder „Ihr dürft dies thun“ würde es den jüngeren Geschwistern mit erlauben.

Die Antwort aber: „Ihr dürft dies nicht thun“ würde es (nach dem Prinzipe: „quidquid de omnibus valet, etc.) auch den älteren verbieten! Und sie würde gewiss auch als ein solches Verbot verstanden werden.

Hier also ist es einmal jedenfalls nicht angängig, die Verneinung

des Urteils δ) in der Form α) auszusprechen, m. a. W. den Satz α) in dem als Bedeutung von β) erklärten Sinne zu verstehen. Es fehlt ja der Sprache nicht an Ausdrucksformen zur Darstellung des zutreffenden Sachverhaltes; der Vater mag z. B. auf die gestellte Frage zur Antwort geben: „Ihr nicht, aber wohl (sondern nur) die beiden ältesten“, oder „Nur zum Teile dürft Ihr es thun, zum Teil nicht, und zwar etc.“ Als vollständig unmöglich muss es aber hingestellt werden, die richtige Antwort in Gestalt eines einzigen Satzes zu geben, dessen Subjekt „Ihr“ (logisch dasselbe wie das „Wir“ des Fragesatzes) wäre, und dessen Prädikat (in Bejahung oder Verneinung hingestellt) schlechtweg als „dürft dies thun“ sich darstellte!

Da genau genommen selbst das Pronomen personale „Ich“, auf eine bestimmte Person bezogen, noch ein Gattungsbegriff ist, insofern diese Person gemeint sein kann in verschiedenen Momenten ihres sich abwickelnden Lebens, so würden schon an die Frage: „*Kann ich* dies thun?“ — z. B. ein gewisses schwieriges Kunststück hinbringen, welches nur zeitweilig gelingt — sich Betrachtungen anknüpfen lassen, welche den letzten analog sind.

Das vorstehende Beispiel war gewiss aus dem Leben genommen; es hatte höchstens den Misstand, dass ein logisch identisches Subjekt A doch im Frage- und Antwortsatze als Ich, Wir resp. Du, Ihr verschiedenen Ausdrucks teilhaftig wurde. Fassen wir darum noch ein Beispiel in's Auge, in welchem das Subjekt seinen Ausdruck nicht wechselt.

Zugegeben, dass es weisse und auch schwarze Schafe gibt. Bedeutet dann A die ganze Klasse der „Schafe“ und B die Klasse „weiss“, so erkennt man augenblicklich dass die Aussage β) *in dem oben für sie festgesetzten Sinne* richtig ist, und die zweite γ) falsch. Erstere, nämlich:

β^0) „Die Schafe (schlechtweg, d. h. *alle* Schafe) »sind nicht« weiss“ müsste als ein richtiges Urteil anerkannt werden indem sie die Geltung der falschen Aussage

δ^0) „Alle Schafe sind weiss“

in Abrede stellte — so wenigstens gemäss der über die Auslegung einer jeden Aussage β) oben getroffenen Verabredung.

Die zweite Aussage dagegen

γ^0) „Die (Alle) Schafe sind nicht-weiss“

ist ein falsches Urteil, würde behaupten, dass auch die weissen Schafe, welche es doch gibt, welche sogar die Mehrzahl bilden, nicht-weiss seien.

Die beiden Urteile können daher unmöglich äquivalent sein.

Man bemerkt aber auch, wie *gezwungen* die dem Satze β^0) gegebene Auslegung erscheint. Unstreitig würde hiefür die Sprache den Ausdruck vorziehen: „Nicht alle Schafe sind weiss“ (d. h. die Klasse der Schafe ist *nicht ganz*, nur zum Teil, enthalten in der Klasse der weissen Dinge), womit sie allerdings darüber hinaus noch andeuten würde, dass es neben „nicht-weissen“ auch weisse Schafe gibt; am besten den: Einige Schafe sind

nicht-weiss. Soll wirklich weiter nichts, als was in dem Satze ausgesagt wird: „Es ist nicht wahr, dass alle Schafe weiss sind" korrekt zum Ausdruck gebracht werden, ohne dass man aufhört von allen Schafen zu reden, so steht uns vorerst nur diese allerdings etwas umständliche Ausdrucksweise selbst zur Verfügung (§ 33 und 35).

Ich möchte indess weitere zur Rechtfertigung unserer Behauptungen dienende Ausführungen an gegnerischerseits gemachte Einwürfe anknüpfen:

Kant's „limitative" Urteile γ) glaubten wir angemessener als „negativ-prädizirende" bezeichnen zu sollen, und auch fortfahren zu dürfen, im Einklang mit der „herrschenden" Aristotelisch-scholastischen Terminologie dieselben schlechtweg als „verneinende" Urteile gelten zu lassen — in Anbetracht dass wir die andere Urteilform β) (die für Kant-Lotze-Sigwart den Typus des verneinenden Urteils vorstellt) überhaupt nicht werden anerkennen können.

Gegen Kant's limitative, also unsre negativ prädizirenden Urteile polemisirt nun aber auf das heftigste Lotze. Ein Autor von des letzteren Bedeutung und Ansehen, falls er irrt, verdient gewiss widerlegt zu werden. Geben wir ihm darum zunächst selbst das Wort. In [1] p. 61 sagt derselbe:

„Eine bestimmte Beziehung zwischen S und P, welcher Art sie immer sein mag, denken wir uns durch ein Urtheil: S ist P, als einen noch fraglichen Gedanken ausgedrückt; diese Beziehung bildet den Gedankeninhalt, über den zwei einander entgegengesetzte Nebenurtheile gefällt werden; das eine affirmative gibt ihm das Prädicat der Gültigkeit oder der Wirklichkeit, das andere negative verweigert sie ihm."

Es erhellt hieraus, dass Lotze das „verneinende" Urteil im Sinne unsrer Aussage β) aufgefasst wissen will. Für diese Auffassung plädirt er überhaupt auf der ganzen Seite (p. 61) und weiterhin.

Er fährt z. B. fort (und hierin kann ich ihm beipflichten):

„... aber zwei wesentlich verschiedene Arten des Urtheils begründet dieser Unterschied nicht. Gültigkeit oder Ungültigkeit sind vielmehr in Bezug auf die Frage, die uns hier beschäftigt, als sachliche Prädicate zu bezeichnen, die von dem ganzen Urtheilsinhalte als ihrem Subjecte gelten."

Aber nun weiter unten:

„... das limitative oder unendliche Urtheil, das durch eine positive Copula dem Subject ein negatives Prädicat beilegen soll und durch die Formel: S ist ein Nicht-P, ausgedrückt zu werden pflegt. Viel Scharfsinn ist auch in neuerer Zeit zur Ehrenrettung dieser Urtheilsform aufgeboten worden, in der ich dennoch nur *ein widersinniges Erzeugniss des Schulwitzes**) finden kann."

Ich werfe zunächst die Zwischenfrage ein: Steht nicht unmittelbar vorher das „sachliche Prädikat der *Un*gültigkeit" schon im Widerspruch mit der soeben und noch weiterhin verfochtenen Anschauung? Ist nicht

---

*) Ich gestatte mir, in diesen Citaten einzelnes durch kursiven Druck eigenmächtig hervorzuheben.

eine Aussage, wie: „Dies Urteil ist ein ungültiges" gerade von der bekämpften Form: „S ist ein nicht-P"?

Fern liegt mir indess, etwa einen kleinen lapsus consequentiae aufgreifen zu wollen, um einen Vorwurf daraus zu schmieden. Hören wir weiter (auf p. 62):

„Und so gibt es nirgends für das natürliche Denken eine zwingende Veranlassung, limitative Urtheile zu bilden; *jede Folgerung, die aus dem Satze: S ist ein Nicht-P, möglich wäre, bleibt auch möglich aus dem andern: S ist nicht P.* Es ist nicht der Mühe werth, hierüber weitläufiger zu werden; offenbare Grillen müssen in der Wissenschaft nicht einmal durch zu sorgfältige Bekämpfung fortgepflanzt werden."

Dies — insbesondre was kursiv gedruckt — *ist ein fundamentaler Irrtum!* Wir haben bereits gesehen, dass wenn S zum Beispiel „Alle A" bedeutet, diese hier für äquivalent erklärten Sätze — im Grunde unser γ) und β) — durchaus nicht gleichbedeutend sind; sie können daher auch nicht dieselbe logische Tragweite besitzen. In der That wird später wahrzunehmen sein: aus dem letztern Urteil β) — sei es für sich, sei's in Verbindung mit andern Prämissen — *folgt* viel *weniger* als aus dem erstern γ).

Leicht war es eine derartige allgemeine Behauptung aufzustellen, wenn man sich dabei beruhigte und es unterliess, dieselbe in ihre Konsequenzen zu verfolgen.

Letzteres haben wir schon gethan nach der Seite der universalen Aussagen. Thun wir's auch noch nach der Seite der partikularen, um uns zu vergewissern, wie weit Lotze mit sich selbst in Übereinstimmung bleibt.

Sein Subjekt S möge also nun bedeuten: „Einige A".

Wenn Lotze nach den von ihm selbst aufgestellten Grundsätzen zuwerke geht, so muss er unter dem Satze *„Einige A sind nicht B"*, oder wie dies noch deutlicher geschrieben werden könnte, unter: „Einige A »sind nicht« B" verstehen: die verneinend ausfallende Antwort auf die Frage, ob einige A wol B seien? Verneinung des Urteils: „Einige A sind B" liefert aber nach dem gesunden Menschenverstand, nach den Regeln der Schullogik und wie dies später auch die Rechnung bestätigt, das Urteil: *„Kein A ist B"*.

Niemandem wird es einfallen, unter dieser letzteren Aussage genau das nämliche zu verstehen, wie unter der vorigen, die beiden für äquivalent zu erklären; niemand wird z. B. den Satz: „Einige Schafe sind nicht weiss" verstehen als „Kein Schaf ist weiss" und niemand wird die Verneinung der Behauptung, dass einige Schafe gelb seien, durch den Satz ausdrücken: „Einige Schafe sind nicht gelb".

Auch Lotze thut dies nicht. Er versteht unter Sätzen, wie: einige A sind nicht B, alle A sind nicht B, ganz dasselbe, wie alle übrigen Menschen, und steht nur in dem Wahne, die verneinenden Aussagen gleichwol durchaus unserm Schema β) gemäss zu deuten.

Lotze tritt überhaupt als entschiedener Gegner einer *Logik des* (Begriffs-)*Umfanges* auf. [1] p. 58 sagt er:

„Natürlich haben auch diese Umfangsverhältnisse ihren logischen Werth; aber wo man diesen bedürfen wird, ist er *nicht so schwierig zu ermitteln,* um sich seiner nicht nebenher augenblicklich zu bemächtigen; *einen Haupt-*

gesichtspunkt für die Betrachtung der Urtheile aus jenen Verhältnissen zu machen, halte ich für ebenso irrig als langweilig.“

Wenn Lotze damit Recht hätte, so würde unser Bemühen, eine exakte Logik des Umfanges hier zu begründen, ein eitel vergebliches sein.

Nun zeigen aber die Fehler, in welche Lotze verfällt (und zwar schon in so einfachen jedweder Komplikation ermangelnden Fällen, wie bei dem besprochenen verneinenden Urteile), dass es *doch nicht so leicht* ist, sich der fraglichen Umfangsverhältnisse nebenher zu bemächtigen, und damit richtet sich seine (ohnehin, wie die vorhergehenden, eminent subjektive) letzte Schlussbemerkung von selbst. Des näheren vergleiche man hiezu noch δ_3) in C unsrer Einleitung.

Wir haben gesehen, dass sooft das Urteil α) oder δ) ein *generelles* ist, es wesentlich einen *andern* Sinn liefert, als der ist, welchen der Sprachgebrauch mit der Aussage α) verbindet, will man die Verneinungspartikel gemäss β) auf die *Kopula* beziehen.

Nun aber zu zeigen, dass dies genau genommen sogar einen *Unsinn* liefert, dazu will ich jetzt schreiten.

Es handelt sich um das Urteil:

ε) Die Behauptung „A ist B“ ist unrichtig, von dem ich nachweisen will, dass es *nicht* (wie provisorisch bisher) mit β) „A »*ist nicht*« B“ — noch weniger auch mit α) — wiedergegeben werden darf.

Das Urteil ε) ist von Hause aus und bleibt in Ewigkeit (in Boole's Benennungsweise) ein *sekundäres*, ein Urteil über ein Urteil; nur mittelbar zunächst sagt es auch über A und B selbst etwas aus.

Welche Schlüsse aus dem Urteil ε) in Bezug auf A und B zu ziehen sind, wie m. a. W. dieses Urteil aufzulösen ist in primäre Aussagen, die von diesen Dingen A, B selbst (und von deren Negationen) unmittelbar handeln, werden wir später (Ende § 35) erschöpfend darlegen. Dort wird zu sehen sein, dass dieses Urteil allgemein nur in eine Alternative von primären Urteilen zerfällbar ist.

Die wirkliche Verneinung, Leugnung einer Aussage hat zum Subjekt (wie Lotze richtig bemerkte) ebendiese Aussage, und zum Prädikate „ungültig, falsch, nicht-wahr“. *Subjekt* jenes Urteils ε) ist die Behauptung δ) „A ist B“.

Diese selbst*), und nicht, wie nach Sigwart, die Kopula „ist“ derselben, ist dasjenige, was bestritten, in Abrede gestellt werden soll, ist der Gegenstand, auf den die Ableugnung sich bezieht, ist zugleich das „*Objekt* der Verneinung“.

Es scheint von vornherein eine Verdrehung der wahren Sachlage zu sein, wenn man für dieses Urteil ε) ein anderes unterzuschieben

*) In der suppositio realis genommen, nämlich in Hinsicht dessen, was sie bedeutet, nicht aber (in suppositio nominalis) als blosser Schall oder Wortgefüge genommen — vergl. ξ_1) in B der Einleitung und § 31.

sucht — in Gestalt von β) — *mit dem Subjekte A*! Die Berechtigung hiezu müsste doch erst nachgewiesen werden.

Wie wir aber bereits die Unmöglichkeit eingesehen haben, wenigstens falls A eine(n) Gattung(sbegriff) vorstellt, dies in korrekter Weise durchzuführen, so lässt sich nun auch obendrein erkennen, dass die Aussage β) dann einen Widerspruch in sich schliesst.

Mit dem Urteil β) wird beabsichtigt, von dem Subjekte (das ist unstreitig:) A etwas auszusagen, zu prädiziren. Die hinter diesem Subjekt stehenden Worte:

ζ) „»ist nicht« B“

geben an, was vom Subjekte A ausgesagt werden soll, sie erscheinen — wenn man nicht gerade sagen will: als das „Prädikat“ des Satzes — so doch gewiss: als die „Prädikation“ in demselben.

Unbeschadet des distributiven Charakters des Prädikates kann die Kopula in dasselbe eingerechnet werden. Schon aus dem Grunde, weil eine Kopula sehr häufig fehlt, erst in Gedanken zugefügt werden müsste (z. B. auch sobald ein anderes Verbum, als das Hülfszeitwort „sein“ im Satze auftritt), wird nicht selten dasjenige, was eigentlich die „Verbindung der Kopula mit dem Prädikate“ zu nennen wäre, schlechtweg als „Prädikat“ bezeichnet. Wer schärfer unterscheiden will, mag für diese Verbindung den Ausdruck *„Prädikation“* gebrauchen.

Mit dieser Prädikation ζ) geraten wir nun aber in Widerspruch mit unserm Prinzip II, in Konflikt mit dem Satze: quidquid de omnibus valet, valet etiam de nonnullis et de singulis — den auch die Gegner unsrer Ausführungen als einen die ganze Logik beherrschenden Grundsatz ausdrücklich anerkennen.

Es müsste diese Prädikation ζ) sobald das Urteil β) anerkannt wird, nun auch den sämtlichen Arten und Individuen der Gattung A zukommen, was im Allgemeinen (wie die Beispiele zeigen) nicht der Fall ist.

Vom gegnerischen Standpunkt musste als richtig der Satz zugegeben werden: β'') Alle (Die) Schafe »sind nicht« weiss. Diese Prädikation „»sind nicht« weiss“ müsste nach dem dictum de omni auch den weissen unter den Schafen (als einzelnen) zukommen, was widersinnig. Von der Gattung der Schafe müsste sie ebenso auf deren Arten, auf jede Schafrasse sich übertragen, während es doch sehr wohl eine solche Rasse geben kann, die nur weisse Schafe enthält.

Ragt der Kreis A nur teilweise in den Kreis B herein, so hätte man ebenso anzuerkennen: Alle Punkte des Kreises A »sind nicht« im Kreise B enthalten. Dasselbe aber erschiene damit auch von den in B hineinfallenden Punkten des A behauptet.

Sagen wir aber: der Kreis A fällt nicht in den Kreis B hinein, so scheinen wiederum beide Deutungen β) und γ) gleichermassen zulässig zu

sein. Das Subjekt ist nunmehr ein Individuum, welches die in ihm enthaltenen Punktindividuen *kollektiv* — nicht *generell* — zusammenfasst, und hier könnte man den erhobenen Einwand nicht mehr vorbringen, denn einen Grundsatz der Logik, wonach, was von dem *Ganzen* behauptet wird, unbedingt auch von dessen *Teilen* einzeln gelten müsste, einen solchen Grundsatz gibt es nicht.

Die obige Argumentation wird hinfällig, wenn ein Schliessen von allen oder einigen auf einzelne nicht angeht, weil überhaupt nur *ein* Individuum vorliegt.

Logisch ist dies der Fall nur beim singulären Urteil, dem Sprachgefühl nach mitunter schon, wenn das Subjekt A im *Singular* steht.

[So kann man namentlich die Sätze β') und β'') passiren lassen, auch wenn darin das »ist nicht« in Anführungszeichen gesetzt würde, um so mehr aber ohne diese Verunstaltung, und zwar weil ihr Subjekt charakterisirt erscheint als ein Individuum — allerdings nicht aus unsrer ursprünglichen, sondern in der aus ihr „abgeleiteten" Mannigfaltigkeit, der Mn. der Punktgebiete, der Klassen. Jedenfalls ist — im Gegensatz, wie gezeigt, zu β''') — bezüglich jener beiden Sätze zu erklären, dass sie den sprachlich richtigen Ausdruck für die Verneinung der entsprechenden Sätze δ'), δ'') vorstellten.]

Durch die Singularform wird in der Regel psychologisch eine Individualisirung des Subjektes angeregt. Man mag sich deshalb versucht fühlen, auch Lotze für sein Beispiel wenigstens zuzustimmen, wenn er das Urteil: „Der Geist ist nicht Materie" aufgefasst wissen will als die verneinende Antwort auf die Frage, ob der Geist Materie sei?

Das Urteil tritt zwar in der Form eines „unbestimmten" Urteils auf, beansprucht aber unzweifelhaft ein „universales" in logischer Hinsicht zu sein.

Unrecht muss man Lotze sofort auch für das Beispiel geben, wenn man — anstatt „Der Geist" schlechtweg — einmal sagt: „Alle Geister" oder auch nur: „Jeder Geist". [Letzteres, obwol in Singularform, bringt durch das adjektivische Pronomen „Jeder" sofort die generelle Natur des Urteils, den Charakter des Subjekts als eine Gattung zum Bewusstsein, und begründet dadurch eine Ausnahme zu der eben nebenher statuirten psychologischen Regel.] Es könnten ja — rein logisch betrachtet — auch einige Geister Materie sein und andere nicht. Da wäre denn die Frage, ob allgemein der Geist Materie ist, zu verneinen, und dennoch das Urteil: „Der Geist ist nicht Materie", mit der gleichen Allgemeinheit hingestellt, ein ungültiges!

Nun unterscheiden sich aber die beiden Aussagen: „Der Geist ist nicht Materie" (so, wie diese verstanden werden sollte) und „Jeder Geist ist nicht Materie" (oder: Kein Geist ist Materie) logisch überhaupt nicht. Sie unterscheiden sich nur *psychologisch*, insofern die Mehrdeutigkeit des Subjekts bei der erstern dem Bewusstsein entschwunden ist.

Man erkennt hier überhaupt die psychologische oder subjektive Bedingung dafür, dass man Kant's Benennungsweise, Lotze's und Sig-

wart's Theorie der verneinenden Urteile zustimmen könne: sie besteht darin, dass man *vollständig ausser Acht lasse oder vergesse*, dass das Subjekt der zu verneinenden Urteile eine Mehrheit von Bedeutungen umfassen kann oder umfasst.

Von rechtswegen hätte diese Theorie zum wenigsten auf die singulären Urteile ausdrücklich beschränkt werden müssen.

Da bei den generellen Urteilen nun nichts übrig bleibt, als zu der Deutung γ) für ihre Verneinung die Zuflucht zu nehmen, und wir bei den singulären Urteilen zwischen den Deutungen β) und γ) die Wahl hatten, so werden wir im Interesse der Einheitlichkeit des Verfahrens, um eine *allgemeine Theorie* zu ermöglichen, *auch bei den letzteren der Deutung γ) den Vorzug zu geben haben.*

Für die Algebra der Logik liesse sich noch ein weiterer Grund geltend machen, *ganz und gar*, auch bei den singulären Urteilen, nicht nur die Auslegung, die wir mittelst β) dem Urteil α) gaben, sondern diese Ausdrucksweise β) selbst: „*A* »ist nicht« *B*" zu verwerfen.

Dieser stellt sich dar als eine Folge oder Wirkung der hier (im Gegensatz zur Sprache des gemeinen Lebens) vollzogenen Zuziehung der Null.

Die Null — haben wir gesehen — ist in jeder Klasse mitenthalten; sie ist Subjekt zu *jedem* Prädikate. *Hier* muss gelten: Das Nichts ist ein *B* (in *B* enthalten), und zugleich auch: Das Nichts ist ein Nicht-*B* (in Nicht-*B* mitenthalten) — was nebenbei gesagt durchaus keinen Widerspruch bildet, obwol die Klassen *B* und Nicht-*B* einander ausschliessen, indem sie gerade eben Nichts gemein haben.

Zugleich mit der Klasse *A*, zu der das Nichts mitgehört, zu der es quasi sich mit herandrängt, von der es nicht ausgeschlossen werden kann, würde nun im Urteil β) die Prädikation ζ) „»ist nicht« ein *B*" auch dem Nichts zugesprochen erscheinen. Wir würden so auf die Anerkennung des Satzes geführt: „Das Nichts »ist nicht« ein *B*", welcher seinerseits zu verstehen war als die *Inabredestellung* des Urteils: „Das Nichts ist ein *B*". Das letztere unbedingt *anzuerkennen* waren wir aber durch die Konsequenz verpflichtet — daher ein Widerspruch!

Für die Sprache des gemeinen Lebens wäre, wie schon angedeutet, diese Überlegung nicht maassgebend, weil diese in ihren Urteilsbildungen, wie anderwärts ausgeführt, das Nichts gemeinhin vorweg ausschliesst (präkludirt). *In der exakten Logik aber dürfen* (resp. müssen) *wir jedes Urteil der Form β) für falsch erklären.* Die Verneinungspartikel mit Sigwart auf die *Kopula* zu beziehen ist dann hier überhaupt nicht angängig.

So wenigstens, wenn der Grundsatz „quidquid de omnibus valet, valet etiam de singulis" für alle Prädikationen, welche die Wortsprache auszudrücken vermag, wirklich für „quidquid valet", für alles, was gültig ausgesagt werden kann, soll aufrecht erhalten werden. Denn unter diesen Einzelnen („singuli") figurirt hier auch das Nichts, wenngleich wir dasselbe sonst freilich nicht als ein „Individuum (im engeren Sinne)" der Subjektklasse gelten lassen werden.

Ich gebe zu, dass dieser vorstehenden Argumentation kein grosses

Gewicht beizulegen ist. Ob man sich ihr anschliessen will, bleibt in gewissem Grade Geschmackssache. Man kann auch den Standpunkt einnehmen (wie wir ohnehin, bei unsrer Fassung des Prinzipes II, es thun), dass man die Gültigkeit des Grundsatzes „quidquid valet etc." einschränkt auf solche Prädikationen, welche als wirkliche (und demnach selbstverständlich bejahend auftretende) *Subsumtion* unter eine (wenn auch vielleicht als Negation einer andern sich darstellende) Prädikatklasse erscheinen.

Ich meine jedoch, dass es nicht angezeigt ist, ganz unnötigerweise und sozusagen gewaltsam, in Gestalt der (wie mich dünkt absonderlichen) Satzform: *A* »ist nicht« *B*, solche Prädikationen in die Wortsprache einzuführen, welche, indem sie einer Klasse *A* gültig zugesprochen werden, gleichwol nicht allem Dem zukommen können, was unter dieser Klasse *A* mitenthalten ist.

Unsre Ergebnisse sind also folgende.

Die herrschende Terminologie ist wesentlich im Rechte. Ihre *„verneinenden" Urteile sind negativ prädizirende. Die Verneinungspartikel* im verneinenden Urteil *gehört zum Prädikate*, und in seiner Polemik gegen Kant ist Lotze im Unrechte.

Mit Kant aber diese Urteile als „limitative" abweichend zu benennen ist überflüssig. Denn die nach Kant-Lotze-Sigwart's Theorie als »verneinende« hingestellten Urteile *können* allgemein als diese jedenfalls nicht gelten und sie *brauchen* — was sich empfiehlt — als besondere Urteilsformen der *Wortsprache* (und in der Logik als primäre Urteile) überhaupt nicht anerkannt zu werden.

Dieselben sind verneinende, d. h. nun also negativ prädizirende Urteile *über ein Urteil*, welches ihr Subjekt und zugleich das Objekt der Verneinung ist. Allgemein ist es nicht möglich, dieselben darzustellen in Gestalt eines Urteils, welches das Subjekt dieses Subjektes zum Subjekte hätte. Die exakte Logik wird vielmehr diese sekundären Urteile, diese *„Urteilsverneinungen"* auflösen in eine Alternative von primären Urteilen.

Noch bleibt der Einwurf Lotze's zu widerlegen, wenn unsrer Prädikatklasse *B* ein *Begriff* zugeordnet ist, der (als seinen Inhalt) bestimmte Merkmale in sich zusammenfasst, dass es zumeist nicht möglich sei, mit der Negation der Klasse, mit (Kant's und) unserm „Nicht-*B*", dem „widersinnigen Erzeugniss des Schulwitzes" einen *Begriff* zu verbinden.

Darauf ist zu bemerken, *erstens*, dass wenn dem so ist oder wäre, es nichts zu bedeuten hätte. Das thut nichts!

Der Sinn, den wir Aussagen, wie:

Alle *A* sind nicht *B*, Einige *A* sind nicht *B*, wirklich beizulegen haben, ist, wie wir gesehen haben, ein solcher, dass die „Prädikation", nicht-*B* zu sein, sich ganz in gleicher Weise von den omnes auf die nonnulli und die singuli (von allen auf einige und die einzelnen, ja sogar auf das Nichts mit) überträgt, wie eine Prädikation, *B* zu sein.

Weil sonach jene Prädikation „nicht-B“ zu sein, den *distributiven* Charakter mit jedem wirklichem Prädikate gemein hat, weil sie die fundamentale Eigenschaft besitzt, auf eine Mehrheit generell angewendet allemal dem Prinzip II gemäss sich auf die Glieder derselben zu verteilen, so müssten wir schon aus rein äusserlichen Zweckmässigkeitsrücksichten — um eine gemeinschaftliche Behandlung solcher Prädikation mit den wirklichen Prädikaten (mit Prädikat*begriffen*) zu ermöglichen — dazu schreiten, den Begriff des Prädikats zu erweitern. Wir müssten uns dadurch bestimmen lassen, jenes „nicht-B“ — sei es auch als ein fiktives, „uneigentliches“ Prädikat, d. h. im Grunde blosse Redensart — doch als „Prädikat im weitern Sinne“ mit zuzulassen; jene wären also unter die „Prädikate“ mitaufzunehmen, und zwar, wenn auch weiter gar nichts darunter zu denken wäre.

Letzteres ist aber noch obendrein nicht der Fall. Denn *zweitens* ist nicht der geringste Anlass oder gar zwingende Grund vorhanden, den Begriff des Merkmals so enge zu fassen, wie es bei Lotze's Argumentation anscheinend geschieht. [Vergl. γ_3) unsrer Einleitung.]

Wir erinnern an die grosse Allgemeinheit mit welcher der Begriff des Merkmals hier stets aufgefasst werden sollte und auch sonst immer aufgefasst wird. *Merkmal* eines Dinges oder isolirbaren Objekts des Denkens war alles zu nennen, *was von dem Dinge* (oder in Bezug auf dasselbe) *wahrheitsgemäss ausgesagt werden kann.*

Solches konnte sogar bestehen in einer Beziehung des Dinges zu uns selbst als der mittelbaren Folge einer z. B. willkürlich von uns hergestellten Beziehung unsrer selbst zu diesem. Wenn ich — beispielsweise — in einen Laden trete um gewisse Dinge zu kaufen, so muss es — während meiner Verhandlungen mit dem Kaufmann, der Besichtigung der Waren ev. dem Feilschen um den Preis — als ein Merkmal gewisser von den Waren gelten, dass ich sie kaufen will, im Gegensatz zu den übrigen, die ich nicht kaufen will. Habe ich jene gekauft, so ist es wiederum ein Merkmal derselben, dass sie in meinen Besitz oder Eigentum übergegangen. Der Kaufmann wird, um dieses Merkmal festzuhalten, sie beiseite legen, meine Adresse auf das Paket schreiben, etc., wofern er nicht, falls die Gegenstände schwer beweglich sind, sie gar mit Kreidestrich versieht, das „Merkmal“ sichtbar zu machen. Das gleiche würde der Kaufmann vielmehr bei den nicht-gekauften Waren thun, falls ich etwa beinah den ganzen Laden ausgekauft hätte. Die gekauften Waren sind diejenigen, die *nicht* dem Kaufmann verbleiben; die *nicht* gekauften diejenigen, die ich ihm lassen will; das eine ist sogut ein Merkmal wie das andre, und kann auch, wie man sieht, nach Belieben positiv oder negativ ausgedrückt werden.

Wer je versuchen sollte, etwa die Maxime: „Sooft du im Zweifel bist, ob du etwas thun sollst oder nicht, so unterlass' es!“ im praktischen Leben zu befolgen, wird bald gewahr werden, wie oft ihn dieser Rat im Stiche lässt, indem, was unter einem Gesichtspunkt als ein Thun erscheint, sich unter einem andern als ein Unterlassen darstellt, sowie umgekehrt. So z. B. bei der Frage: Soll ich Herrn N grüssen?, oder soll ich ihn „schneiden“?

Auch „Abwesenheit“, „Nichtvorhandensein“, „Fehlen“ oder „Mangel“ eines bestimmten Merkmals oder einer Merkmalgruppe ist wiederum als

ein Merkmal und damit auch als ein Begriff anzuerkennen, wie denn auch die Sprache dafür die soeben angeführten abstrakten Begriffswörter und überhaupt — vor allem in Gestalt der mit der Vorsilbe „un-" zusammengesetzten Beiwörter und Hauptwörter — eine Unmasse von Benennungen hat.

Es ist ein Merkmal des Schalles, Tons oder Klanges z. B., dass er der Farbe (im eigentlichen, nicht im übertragenen Sinne) *entbehrt*, dass er überhaupt *nicht* auf den Gesichtssinn wirkt. Wir erblicken darin eine Verschiedenheit, einen Gegensatz, Kontrast desselben z. B. mit dem Bilde des Spektrums. Soll auch „Kontrast" nicht als ein Merkmal gelten?

Warum, frage ich — um noch ein Beispiel zu nehmen — warum soll es nicht ein Merkmal für die Katze der Insel Man („Manxcat") genannt werden, dass sie *keinen* Schwanz besitzt? Mir scheint es für die Katzen dieser Rasse noch ein wichtigeres Merkmal zu sein, dass sie keinen, als für die übrigen Katzen, dass sie einen Schwanz jeweils besitzen.

Wer sich diesem zuzustimmen weigerte, müsste vor allem ein unfehlbares, *vom sprachlichen Ausdruck unabhängiges* Kennzeichen aufstellen, wonach über die „positive" Natur eines Merkmals zu entscheiden wäre, z. B. sich ergeben würde, ob *parallel* oder *schneidend*, ob gesund oder krank, nützlich oder schädlich, frei oder gebunden, vorwärts oder rückwärts, gleich oder verschieden, etc. das positive (Beziehungs-)Merkmal.

Sofern wir die Klasse „Mensch" als eine wohldefinirte anzusehen vermögen, glauben wir mit dem Begriffe „Mensch" ein Mittel zu besitzen, Alles, was (ein) Mensch ist, zu unterscheiden von allem Erdenklichen, was es nicht ist. Diese Unterscheidung ist eine gegenseitige. Im ferneren Besitze des fundamentalen Begriffs der *Verneinung*, „begreifen" wir damit auch, was es heisst, wenn sich die für den „Menschen" charakteristische Merkmalgruppe an einem Objekt des Denkens *nicht*, oder nicht vollständig, vorfinden sollte. Wir haben damit von selbst auch den „Begriff": „Nicht-Mensch", und haben es gar nicht nötig, nach weiteren gemeinsamen Merkmalen „von Dreieck, Wehmut und Schwefelsäure etc." noch besonders zu suchen, indem das Nichtzutreffen jener bestimmten Merkmalgruppe als Merkmal völlig genügt, um den Begriff „Nicht-Mensch" zu charakterisiren und (kraft des in Gestalt dieses Merkmals in uns wirksamen Prinzips) die Klasse „Nicht-mensch" zu einer genau ebenso wohldefinirten Klasse zu machen, als die Klasse „Mensch" es war. Vergl. γ_3) der Einleitung.

Auch wer die Existenz eines Inhaltes zu dem angeblichen Begriffe Nichtmensch leugnet, indem er bei einer engeren, doktrinären, Auffassung des „Begriffes" verharrt, wird aber wenigstens zugeben müssen, dass ein *„Umfang"* zu diesem streitigen Begriffe in Gestalt der *Klasse* wirklich vorhanden ist (S. 99), dass der Begriff mindestens „dem Umfange nach" existirt — und dies genügt für eine Logik des Umfanges!

Allerdings muss die Mannigfaltigkeit unsrer Denkobjekte, damit in ihr der Negationsbegriff aufstellbar ist, gewisse Anforderungen*)

*) Diese Anforderungen vermöchte aber eine neben dem Menschen auch die Dreiecke, Wehmut und Schwefelsäure nebst noch vielem andern enthaltende Mannigfaltigkeit — für unser obiges Beispiel — in der That zu erfüllen.

erfüllen, an die indess noch niemand gedacht zu haben scheint, welche zu formuliren jedenfalls die Philosophen gänzlich unterlassen haben (an die auch Lotze's Ausstellungen nicht entfernt streifen). Bei der Fortsetzung der Theorie werden wir diese Anforderungen zu statuiren haben.

Die *zweite* der eingangs erwähnten Redensarten lautet:

η) „A ist B oder C".

Auch hier macht es einen grossen Unterschied, ob wir die Partikel „*oder*" mit auf die Kopula beziehen, oder ob wir sie blos auf die beiden Ausdrücke beziehen, die sie, anscheinend im Prädikate, unmittelbar verknüpft, m. a. W. ob wir als Glieder der Alternative ansehen wollen: die durch distributive Verwendung der Kopula entstehenden beiden Prädikationen „ist B" und „ist C", oder aber blos: die Klassenterme „B" und „C".

Im erstern Falle haben wir in Gestalt von:

ϑ) { „A ist entweder B, oder C" — genauer:
„*(Entweder) A ist B, oder* (es) *A ist C*"

ein wirklich „*disjunktives*" Urteil vor uns (falls nämlich die Glieder der Disjunktion einander ausschliessen). Dieses Urteil stellt eine Aussage (A ist B) als abhängig hin von einer andern (A ist C), genauer gesagt: es macht die beiden Aussagen von einander abhängig. Entweder es gilt die eine, oder es gilt die andere, oder also vielleicht auch beide zugleich — so wenigstens bei der für uns hier maassgebenden Auffassung.*)

Als ein sekundäres Urteil vermögen wir dieses in unsrer bisherigen Formelsprache noch keineswegs auszudrücken; vielmehr muss das dem Aussagenkalkul vorbehalten bleiben.

Da in η) die Worte „ist" und „oder" durch das eine, B, der beiden Prädikate B und C getrennt erscheinen, so könnten sie auch nicht durch eine Klammer auf der Zeile zusammengeschlossen werden, und bleibt zur deutlichen Charakterisirung der hier geforderten Auslegung, wenn man nicht eigene Ein- und Auslösungszeichen einführen will, nichts übrig, als eben so, wie es in der zweiten Fassung von ϑ) geschah, die Kopula „ist" hinter der Konjunktion „oder" zu wiederholen.

Im zweiten Falle haben wir in Gestalt von:

ι) „*A ist »B oder C«*"

einfach ein kategorisches Urteil vor uns, kein disjunktives. Während

*) Diese Auffassung ist allerdings eine weitere als die altherkömmliche, die zu dem Namen der *disjunktiven* Urteile den Grund aus der Voraussetzung entnahm, dass die Klassen B und C *disjunkte* seien.

vorhin B und C zwei gesonderte Prädikate waren, hat das vorliegende Urteil nur *ein* Prädikat: »B oder C«, welches aber aus zwei Klassen B und C mittelst der Konjunktion „oder" zusammengesetzt erscheint, somit einen (von Jevons so genannten) *„pluralen* Term" vorstellt. Man könnte auch in Gestalt eines sog. „divisiven" Urteils sagen: Die A sind teils B, teils C.

Diesmal genügte die Klammer, oder das sie vertretende Anführungszeichen, zur deutlichen Charakterisirung der für die Aussage η) hier geforderten Auffassung. Sofern es nun lediglich darauf ankommt, einer Verwechselung der beiden Auffassungen ϑ) und ι) des Urteils η) vorzubeugen, so lässt sich dieser Zweck erreichen, indem wir etwa die Vorschrift beobachteten, im zweiten Falle allemal die Anführungszeichen » « zu setzen, im ersten sie fortzulassen. Alles in allem genommen würde also in dieser Frage mit dem Institut der Klammern doch auszukommen sein.

Im Gegensatz zu den (eigentlich) „disjunktiven" ϑ) sind Urteile von der Form ι) nur als *„disjunktiv prädizirende"* zu bezeichnen.

Beide Urteile ϑ) und ι) geben denselben Sinn, decken sich oder sind logisch äquivalent, das eine folgt jedesmal mit aus dem andern (und umgekehrt) falls sie sich als *singuläre* Urteile darstellen, sobald nämlich das Subjekt A derselben ein Individuum bezeichnet. (Und dieser Umstand bildet dann eine Prämisse, welche auch unerlässlich ist, damit man die erwähnte Folgerung ziehen dürfe.)

Stellen dagegen unsre Urteile sich als *generelle* dar, genauer: bedeutet ihr Subjekt A eine Klasse oder Gattung, so geben sie verschiedenen Sinn, und zwar sagt das disjunktive Urteil ϑ) entschieden *mehr* aus als das disjunktiv prädizirende ι), indem es unfehlbar auch die Gültigkeit des letzteren nach sich zieht, wogegen das disjunktiv prädizirende Urteil ι) alsdann *nicht* aufgebrochen werden darf in ein disjunktives ϑ).

Ist in der That ein *Punkt* A enthalten im Gebiete »B oder C« (d. i. in dem aus den Kreisen B und C zusammengesetzten Gebiete $B + C$, dem Inbegriff, der Gesamtheit jener Gebiete), so ist notwendig er entweder enthalten im Gebiete B, oder aber im Gebiete C, oder vielleicht auch (falls diese einander nicht ausschlossen) in beiden Gebieten zugleich, d. h. es gilt dann: Entweder ist A in B enthalten oder es ist A in C enthalten. Desgleichen selbstverständlich auch umgekehrt: Gilt letzteres, so ist der Punkt A gewiss auch im Gebiete »B oder C« enthalten.

Der Punkt konnte ja nicht teilweise dem einen, teilweise dem andern Gebiet angehören, da er eben unteilbar ist.

Anders, wenn dem Gebiet A eine Ausdehnung zukommt.

Ist es nach ϑ) richtig, dass ein solches A entweder ganz in B hineinfällt, oder dass es ganz in C hineinfällt, so wird es damit auch in »B oder C« hineinfallen, d. h. es gilt alsdann auch wieder ι).

Dagegen ist der umgekehrte Schluss jetzt nicht mehr zulässig. Wenn ι) gilt, so kann dies auch so geschehen, dass A zu einem Teile in den Kreis B zum andern in C hineinfällt; es gilt dann das disjunktiv prädizirende Urteil ι): A ist in »B oder C« enthalten, und gleichwol gilt das disjunktive Urteil ϑ) *nicht*, indem weder A in B noch A in C (schlechtweg, d. h. ganz) enthalten sein wird.

Und so verhält es sich nun auch, falls A eine Klasse, ein Gattungsbegriff sein sollte.

Zugegeben etwa, dass es blos weisse und schwarze Schafe gebe. Alsdann ist das disjunktive Urteil:

ϑ) Entweder sind alle Schafe weiss, oder sie sind schwarz, offenbar unrichtig; das Gegenteil vielmehr:

Weder sind alle Schafe weiss, noch sind sie alle schwarz, ist richtig.

Das disjunktiv prädizirende Urteil dagegen ist richtig, und zwar gibt ihm die Sprache (ohne Anwendung von besondern Anführungszeichen) den Ausdruck:

ι) Alle Schafe sind (entweder) weiss(e) oder schwarz(e).

Dass unser Urteil, wie in diesem Beispiele, ein universales, sowie dass die Glieder B und C der Alternative einander ausschliessen, erscheint dabei als nebensächlich. Das gleiche gilt, falls es partikular, sowie falls B und C ein Gebiet gemein haben.

Im Hinblick darauf z. B., dass westafrikanische Schafe der Wolle entbehren und unter diesen sich auch schwarze finden mögen, können wir sagen:

ι) Einige Schafe sind schwarz oder ohne Wollhaare, und niemand wird diesen Satz als das disjunktive Urteil verstehen:

ϑ) Entweder einige Schafe sind schwarz, oder einige Schafe (dieselben) entbehren der Wollhaare.

Und auch, wenn das generelle Urteil sich im Subjekt des Ausdrucks „Jedes A", „Manches A" bedienen, sowie wenn es in der sprachlichen Ausdrucksform des „unbestimmten" Urteils sich darstellen sollte, gilt ein gleiches.

Sagen wir:

(Die) Milch ist entweder gefälscht oder unverfälscht (echt), so ist das Urteil wesentlich ein universales, es will von „jeder" oder „aller" Milch gelten.

Dasselbe Urteil aber würde wieder nur im Sinne von ι) als disjunktiv prädizirendes zu verstehen sein und unzweifelhaft auch verstanden werden.

Das entsprechende disjunktive Urteil

ϑ) Entweder ist alle Milch gefälscht, oder alle Milch ist echt,

wäre abermals sowol als Deutung jenes Urteils, wie auch an sich zu verwerfen.

Die bisherige Logik scheint mir nun zwischen den beiden Arten von Urteilen, den disjunktiven (die sie den kategorischen gegenüberstellt) und den disjunktiv prädizirenden (welche unter die kategorischen fallen) nicht hinlänglich unterschieden zu haben.

Die von ihr so genannten disjunktiven Urteile sind, wie aus dem vorstehenden erhellt, *in der Regel* disjunktiv prädizirende. Jedenfalls werden wir es zunächst (bis zum Aussagenkalkul) nur mit den letzteren

zu thun haben. Blos, wo sie singulär sind, erscheinen beide Auffassungen gleichermassen zulässig.

Im Hinblick auf den Umstand, dass bei diesen Urteilen die Glieder der Disjunktion schon vielfach in der Sprache des gemeinen Lebens, desgleichen bei den in unsrer Theorie mit zuzulassenden Urteilen einander nicht notwendig *auszuschliessen* brauchen, dürfte es als angemessener erscheinen, das Wort „disjunktiv" durchweg durch ein anderes, etwa durch *„alternativ"* zu ersetzen.

Anmerkung. Im Hinblick auf das unter η) Gesagte könnte man auf die Vermutung kommen, als ob ähnlich auch das Urteil:

$\varkappa$) $$A \text{ oder } B \text{ ist } C,$$

in welchem das Bindewort „oder" anscheinend im Subjekt des Satzes auftritt, zweierlei Deutungsmöglichkeiten darböte.

Bei korrekter Handhabung der Sprache ist dies *nicht* der Fall. Das Urteil ist unter allen Umständen ein sekundäres, in Wirklichkeit disjunktives, welches die zwei Urteile „A ist C" und „B ist C" derart von einander abhängig hinstellt, dass mindestens das eine derselben gelten muss: Entweder A ist C, oder aber B ist C, oder auch (bei der für uns maassgebenden Auffassung des „oder") beide, A und B, sind C. Zu seiner Darstellung in der Formelsprache wird auch dieses Urteil des Aussagenkalkuls bedürfen.

Dagegen würde ein Urteil

λ) $$»A \text{ oder } B« \text{ ist } C$$

auszudrücken haben, dass das Gebiet $A + B$, der Inbegriff der Klassen A und B in C enthalten ist, demnach sowol A als B selber sich unter C subsumirt. Bereits unter ι) des § 8 haben wir darauf aufmerksam gemacht, dass aber das Pluszeichen des identischen Kalkuls im Subjekte mit „und" zu übersetzen ist, und hätte darnach in der Wortsprache der Sachverhalt, anstatt durch λ) nur durch das Urteil

μ) $$A \text{ und } B \text{ ist } C$$

ausgedrückt werden dürfen, wo Verwechselungen alsdann ausgeschlossen erscheinen.

Die in diesem Paragraphen besprochenen Urteilsformen lassen erkennen, dass es — wie schon Jevons betont — oft einen Unterschied macht, ob man von einer Klasse spricht, oder ob von den in ihr enthaltenen *Individuen*. Will man von Klassen reden — wie wir es bis zur Erledigung der wissenschaftlichen Definition des Individuums durchweg vorhaben — so müssen disjunktiv (resp. alternativ) prädizirende Urteile von den disjunktiven (resp. alternativen) und negativ prädizirende Urteile von den Urteilsverneinungen sorgfältig unterschieden werden. —

Achte Vorlesung.

§ 16. Deutung der Negation für Klassen. Satz des Widerspruchs, des ausgeschlossenen Mittels und der doppelten Verneinung im Klassenkalkul. Dichotomie. Gewöhnliche Mannigfaltigkeit.

Die Übertragung der bisherigen Begriffe und Sätze von den Gebieten einer Mannigfaltigkeit 1 von Punkten auf die Klassen einer Mannigfaltigkeit von Individuen unterliegt keiner innern Schwierigkeit, wenn nur ebendiese Mannigfaltigkeit wieder die beiden Grundeigenschaften besitzt: erstens als ein Ganzes 1 denkbar zu sein, d. h. nur miteinander *verträgliche* Elemente als Individuen zu enthalten („*konsistente*" Mn. — vergl. § 7) und zweitens eine „*reine*" Mn. zu sein, somit unter ihren Individuen nicht auch Klassen von solchen Individuen (nebst vielleicht noch anderem) zu enthalten, und demzufolge die Adjungirung einer einheitlichen Null zuzulassen [vergl. § 9, ψ, χ)].

Diese beiden Anforderungen aber, *vereinbar* und *rein* zu sein, werden sich für die Existenz, für die Möglichkeit der Bildung, eines Negationsbegriffes nicht nur als *hinreichende*, sondern auch als unerlässliche, *notwendige* Bedingungen demnächst erweisen.

Aus der Mannigfaltigkeit des Denkmöglichen überhaupt denken wir uns eine Mn. der verlangten Art als eine wohldefinirte Klasse hervorgehoben und bezeichnen dieselbe fortan kurz als eine „*gewöhnliche* Mannigfaltigkeit".

Die Elemente oder Individuen derselben *müssen*, wie gesagt, *einander gegenseitig ausschliessen*, in dem Sinne, dass zwar wohl ein Individuum zugleich *Teil**) oder *Eigenschaft*, *Thätigkeit*, *Merkmal* eines andern, desgleichen sogar eine *Beziehung* zwischen andern, aber nicht eine *Bedeutung* desselben sein darf, das andre nicht etwa eine das erste mitumfassende Klasse sei. Und ferner müssen diese Individuen vereinbar, d. i. gleichzeitig denkmögliche sein, *es dürfen keine zwei ein-*

*) Vergleiche eine unten S. 351 folgende exemplifizirende Betrachtung.

ander ausschliessen in dem Sinne, dass sie beide zusammen zu denken einen Widerspruch involviren würde.*)

Unter diesen Umständen, wissen wir bereits, ist es zulässig, eine Klasse 0 zu fingiren, welche allen aus der Mn. hervorhebbaren Klassen a gegenüber jene von der Def. $(2_\times)$ geforderte Eigenschaft besitzt, dass nämlich $0 \neq\!\!\!\in a$ sei, und diese Klasse ist die leere, welche die Rolle des „Nichts“ *für* diese, *in* dieser Mn. spielt.

Und ferner gibt es dann auch eine Klasse 1, welche diesen Klassen gegenüber die Forderung der Def. (2_+) erfüllt, dass $a \neq\!\!\!\in 1$ stets ist, und dies ist die Mn. selbst als die umfassendste der in ihr enthaltenen Klassen.

Alsdann auch ist es möglich, die Individuen irgend einer gegebenen Klasse a aus der Mn. fortzulassen, und die übrig bleibenden Individuen derselben wiederum zu einer Klasse zusammenzufassen (für welche 0 zu nehmen ist, wenn keine übrig bleiben sollten).

Wir haben damit die ausreichenden Grundlagen zur Bildung eines Negationsbegriffes: die Negation $\bar{a}$ oder a_1 von a wird die bei dem geschilderten Prozess resultirende Klasse sein.

Wir nennen diese Klasse *nicht-a*, *non-a*, die *Negation*, auch das *kontradiktorische Gegenteil* der Klasse *a in Bezug auf die zugrunde liegend gedachte Mannigfaltigkeit*, welche letztere indess in der Regel durch den Gegenstand der Untersuchung oder die Natur der anzustellenden Über-

---

*) Dergleichen wäre wol nur dann zu gewärtigen, wenn als Elemente der Mn. (auch) in Urteilen niedergelegte Überzeugungen figuriren, wenn als deren Individuen „*Glaubenssätze*“ (im weiteren Sinne des Wortes) auftreten. Dann Obiges ausdrücklich zu verlangen, scheint eigentlich überflüssig, weil von Vernünftigen Unvereinbares ohnehin nicht zusammen gedacht wird, und für Verrückte keine Logik geschrieben wird. Von Vernünftigen — ja! — sofern sie nicht auf dem Holzwege sind, nicht irren. Versteckte Widersprüche können aber auch solchen entgehen.

Ohnehin dürfte auch die Grenze zwischen beiden Kategorieen von Personen gar nicht so scharf zu ziehen sein; vielmehr hat die Ansicht sehr viel für sich, dass jeder Mensch an partiellem Wahnsinn leide, dass er seinen „Tollpunkt“ besitzt (eventuell auch deren mehrere, welche, nebenbei gesagt, meist schon daran erkennbar, dass er „böse“ wird, sobald ein solcher von Andern berührt wird) — oder, um mit meinem Kollegen Knop einen terminus technicus der Geologie zu verwerten, mit dem sie das Vorkommniss bezeichnet, wo eine Schicht plötzlich in ganz anderem Niveau sich fortsetzt, als auf welchem sie aufgehört hat zu streichen: dass es auch in des Menschen Hirne „Verwerfungsspalten“ gibt. —

Endlich war doch in Anhang 4 und 5 zu sehen, dass man auch unvereinbare, inkonsistente Mannigfaltigkeiten sehr wohl zum Gegenstand des Studiums machen, als Untersuchungsfeld sich erwählen kann. —

legungen von vornherein bestimmt ist, als ein für allemal gegeben erscheint, woneben es, andernfalles, meist als belanglos sich erweist, ob sie mehr oder minder enge begrenzt wird — woraus sich erklärt, weshalb sie nicht weiter erwähnt zu werden pflegt.

Wir übertragen auch diese Benennungen auf die den Klassen a und a_1 (oder $\bar{a}$) möglicherweise zugeordneten *Begriffe*.

Als Beispiele haben wir bereits im vorigen Paragraphen die Negationen „nicht-schwarz“ und Nichtkombattant“ besprochen. Der letztere Begriff umfasst z. B. die Pionire, Trainsoldaten, Regimentshandwerker, Lazaretgehülfen, Ärzte, Auditoren und Geistlichen die am Feldzug teilnehmen oder zur Armee gehören, und lassen die Beispiele erkennen, dass in der That der Negationsbegriff auf eine bestimmt abgegrenzte Mn. gemeinhin bezogen wird.

In der Unbestimmtheit jener beim Negiren eines Begriffes zugrunde zu legenden Mannigfaltigkeit, welche als eine demselben (nicht immer gerade „nächst-“) übergeordnete Gattung ausfindig zu machen die Sprache gewöhnlich dem Sprachgefühl des Einzelnen überlässt, liegt nun allerdings eine Schwierigkeit, mit welcher die Theorie sich abzufinden hat. In praktischer Hinsicht ist diese Schwierigkeit minder erheblich, da man bei der angewandten Logik, in den Wissenschaften, doch allemal nur zu thun hat mit Objekten einer bestimmten Gattung, mit den Dingen, welche eben dem Felde der Untersuchung angehören. Fühlbarer macht sie sich auf dem Gebiete der reinen Logik, die sich ja nach Möglichkeit erstrecken sollte über alles Erdenkliche.

Behufs Erzielung einer möglichst unumschränkten Anwendbarkeit unsres Kalkuls wird es sich empfehlen, die beim Negiren zugrunde zu legende Mannigfaltigkeit thunlichst *weit* zu fassen. Auf die Art, wie dies sich erreichen lässt, gehen wir nachher (am Schluss des Paragraphen) ein.

Einstweilen sei nur auf folgendes hingewiesen. Ausser beim Prädiziren kommt die Verneinungspartikel „nicht“ am häufigsten in Verbindung mit Adjektiven (oder deren Substantivirung) vor, und wird hier nicht selten durch die mit dem griechischen Alpha privativum entsprechende Vorsilbe „un-“ vertreten. Z. B. „möglich“, „unmöglich“ = nicht-möglich, „Unmöglichkeit“.

Durch die letztere pflegt aber noch bestimmter als bei Anwendung der Partikel „nicht“, auf ein bestimmtes genus proximum des dem negirten Adjektiv entsprechenden Begriffes hingewiesen zu werden, sodass man die beiden Ausdrucksformen nicht unbedingt für gleichbedeutend erklären darf. Z. B. von „durchsichtig“ oder „undurchsichtig“ zu sprechen, werden wir nur Anlass haben, wo von körperlichen Dingen die Rede ist. Bei der Bildung des Negationsbegriffs der „Undurchsichtigkeit“ wird deshalb auf die Mannigfaltigkeit der Körperwelt (resp. ihrer Merkmale) Bezug

genommen, reflektirt. Die Frage, ob Geister durchsichtig seien (Drobisch) wird allgemein zu verneinen sein; aus dem genannten Grunde dürfen sie aber doch nicht „undurchsichtig“ genannt werden. Logisch korrekt bleibt die Antwort: „Geister sind nicht-durchsichtig“, wo dann mit der Negation Bezug genommen ist auf eine hinreichend umfassende Mannigfaltigkeit, welche neben dem Sichtbaren, der Körperwelt auch mindestens die Geister, und (nach Belieben) anderes mehr, umfasst.

Mit Denknotwendigkeit gelten nun die Gleichungen:

$$30_\times)\ a a_1 = 0, \qquad 30_+)\ a + a_1 = 1, \qquad 31)\ \bar{\bar{a}} = a,$$

sowie

$$\bar{0} = 1 \quad \text{und} \quad \bar{1} = 0.$$

Zunächst die beiden letzteren geben uns (für Klassen gedeutet) die Sätze: *Nicht-nichts ist etwas* — eine Klasse, die, wie wir gesehen haben, Alles überhaupt (innerhalb der Mn.) Denkbare umfasst. Und *Nicht-etwas ist nichts.*

So unumschränkt diese Sätze auch zu gelten scheinen (zufolge unsrer Gewöhnung, mit unsern Überlegungen uns immer nur innerhalb einer „gewöhnlichen“ Mn. zu bewegen), dürfen wir doch schon bei ihnen nicht ausser Acht lassen, dass für eine völlig offene Mn., für die „absolute“ Mannigfaltigkeit des überhaupt zu denken Möglichen, dieselben keine Geltung haben werden, indem für sie — wie in § 9, ψ) gezeigt — ein einheitliches, ein „absolutes Nichts“ undenkbar ist. Schon durch seine blosse Benennung und Einführung, durch seine Adjungirung zu *einem* Teile der absoluten Mn. wurde das Nichts zu einem Individuum gestempelt, „individualisirt“ für andere Teilmannigfaltigkeiten derselben. Das Nichts in Bezug auf eine gewöhnliche Mn. z. B. war allemal ein Individuum in Bezug auf die aus dieser „abgeleitete“ Mn.: das Nichts der Grössenlehre war ein Individuum in der Klasse der Zahlen (die arithmetische 0), die Null des identischen Kalkuls ein Individuum in der Klasse der Gebiete oder in der Mn. der Klassen. Sie wurde selbst ja zu einem Gebiete, zu einer Klasse. Überhaupt ist „Nichts“ immer ein Individuum in der Klasse der Eigennamen sowie der Namen schlechtweg, der Worte und der Symbole, eventuell der Vorstellungen, Gedankendinge oder Erfindungen des Menschen. Jedermann wird die Behauptung zugeben: *Nichts* ist etwas, wovon man reden, „*etwas*“, worüber man verschiedener Meinung sein und streiten kann. Es existirt also schon der obige Gegensatz zwischen „nichts“ und „etwas“ in der absoluten Mn. *nicht.*

[Es könnte eingewendet werden, dass wir hier von „Nichts“ immer nur in der suppositio nominalis gesprochen vergl. ξ_1) der Einleitung, S. 44 — von „*dem* Nichts“, als dem Worte, ev. der Vorstellung des Nichts, aber nicht von der Sache, nicht von ebendiesen in der suppositio realis oder im Hinblick auf seine Bedeutung genommen, nicht wirklich von nichts. Allein im letztern Sinn kann davon überhaupt nicht gesprochen werden, man müsste denn schweigen.]

Die Gleichung $30_\times)$ $a a_1 = 0$ sagt nun aus: *Es gibt nichts, was zugleich* (und im selben Sinne) *a und nicht-a ist.*

Z. B. Nichts ist schwarz und zugleich auch nicht schwarz. Ein Subjekt auch, dem die Prädikate „schwarz“ und „nicht-schwarz“ gleichzeitig zukommen sollten, muss „nichts“ sein.

Die Gleichung erscheint als der konziseste Ausdruck für den „*Satz des Widerspruchs*“, das *principium contradictionis* der alten Logik — zunächst hier mit der Beschränkung auf Klassen und Begriffsumfänge.

Aristoteles in seiner Metaphysik formulirt den Satz so (vergl. Sigwart[1] p. 145): *Es ist unmöglich, dass dasselbe demselben in derselben Beziehung zugleich zukomme und nicht zukomme* . . . und sagt weiter: Dies ist der allergewisseste Grundsatz . . ., denn es ist unmöglich, dass irgend jemand annehme, dasselbe sei und sei nicht . . . Jedermann, der einen Beweis führt, führt ihn deshalb auf diesen Satz als letzten zurück; denn er ist von Natur das Prinzip auch für alle andern Axiome.

Demselben Satze werden wir im Aussagenkalkul wieder begegnen gleichwie auch den übrigen.

Die Gleichung $30_+)$ $a + a_1 = 1$ sagt aus:

Alles ist »a oder nicht-a«.

In die Formelsprache zurückübersetzt würde dieser Ausspruch allerdings nur besagen: $1 \Subset a + a_1$, allein nach Th. $5_+)$ muss diese Subsumtion äquivalent sein der Gleichung $30_+)$. Jedenfalls: *Was a ist, und was nicht-a ist, ergänzt sich zu der Gesamtheit alles* (in unsrer Mannigfaltigkeit) *Denkbaren*, macht zusammen diese ganze Mn. aus.

Ein Drittes oder *Mittelding zwischen a und nicht-a*, „schwarz“ und „nicht-schwarz“, *gibt es* darum in ihr *nicht*. Und so erscheint der Satz als Ausdruck des „*principium exclusi tertii* (oder *medii*) *inter duo contradictoria*“, als der *Grundsatz des ausgeschlossenen Dritten* oder *Mittels* zwischen zwei kontradiktorisch entgegengesetzten Begriffen oder als das „tertium non datur“ der alten Logik — für den Klassenkalkul gedeutet.

Die übliche Fassung: *Omne A est aut B, aut non-B* (Jedes A ist entweder B, oder nicht-B) muss aber vor missverständlicher Deutung, vor einer zu weit gehenden Interpretation bewahrt werden.

Übersetzt man das „omne A“ mit „jedes Individuum einer Klasse A“, so ist der Satz richtig, nämlich, wie oben § 16 auseinandergesetzt, sowol zu verstehen als das disjunktiv prädizirende Urteil: A ist »B oder nicht-B« — unzweifelhaft gilt in der That: $A \Subset B + B_1$, da eben $B + B_1 = 1$ und $A \Subset 1$ sein muss — als auch als disjunktives Urteil für's einzelne Individuum.

Deutete man aber das „omne A“ als: „jedes Objekt A des Denkens“, so überschritte man den dem Satze faktisch zukommenden Gültigkeitsbereich, und namentlich würde man über die demselben rechtmässig zukommende Deutung hinaus gehen, wenn man das „omne A“ übersetzen wollte mit „jede Klasse A“. Hierdurch nämlich würde das Urteil gleichbedeutend mit der (disjunktiven) Behauptung, dass entweder $A \Subset B$ oder $A \Subset B_1$

sein müsse, was ja falsch zu nennen ist, sooft A aus Teilen von B und B_1 sich zusammensetzt.

So mag z. B. wahr sein: Alle Schafe sind, oder jedes Schaf ist entweder schwarz oder nicht schwarz (resp. weiss), wogegen doch gleichwol *nicht* gelten wird: Jede Schafrasse ist entweder schwarz oder nicht schwarz (weiss), indem eine solche Rasse auch schwarze neben weissen Schafen enthalten mag.

Mit andern Worten: der von „jedem A" behauptete Satz gilt nur in der ursprünglichen und nicht in der (aus ihr) „abgeleiteten" Mannigfaltigkeit.

Die Theoreme 30) müssen besonders bei der *wissenschaftlichen Klassifikation, Einteilung* (divisio) berücksichtigt werden.

Von einer solchen ist als oberste Anforderung die zu erfüllen, dass die Einteilungsglieder oder (Unter)Arten der zu klassifizirenden Gattung wirklich zusammen diese Gattung ausmachen: kein Individuum der Gattung darf ausgelassen werden; die Klassifikation muss eine *vollständige* sein; die Einteilung darf keine *Lücke* (gap, *hiatus* in dividendo) aufweisen.

Natürlich müssen die Einteilungsglieder auch wirklich Arten der genannten Gattung (müssen derselben sämtlich eingeordnet) sein; die Arten dürfen nicht über die Gattung hinausgreifen.

Diese Anforderung bildet aber keine solche, vor deren Vernachlässigung besonders zu warnen ist, weil die Einteilungsglieder ohnehin nur als determinirende Faktoren der Gattung in Betracht zu kommen pflegen. Teilten wir z. B. die Schafe ein in weisse und schwarze, so meinten wir natürlich nicht: in weisse *Dinge* und schwarze Dinge, sondern in weisse *Schafe* und schwarze.

Darnach pflegt sich die Anforderung, dass die identische Summe der Einteilungsglieder der Gattung eingeordnet sei, gemäss Th. $6_\times$) und Def. (3_+) ganz von selbst zu erfüllen; die Vollständigkeit aber erfordert, dass nun auch die umgekehrte Einordnung stattfinde, damit eben gemäss Def. (1) identische Gleichheit zwischen der Gattung und der Summe ihrer Arten vorliege.

Als eine zweite fundamentale Anforderung pflegt die hingestellt zu werden, dass die Einteilungsglieder disjunkt seien, einander gegenseitig ausschlössen, je zu zweien 0 zum Produkt geben.

Die Vernachlässigung dieser Anforderung würde nämlich zu tautologischen Wiederholungen von bereits Aufgezähltem führen, welche als nicht wünschenswert, an sich zwecklos hinzustellen. Fehlerhaft könnte aber solches Verfahren nicht wol genannt werden, auch würde ein Verstoss gegen diese zweite Anforderung keine bedenklichen Wirkungen haben — vielmehr kann, wie wir in § 18, $\alpha\,..\,\delta$) zeigen, die Missachtung derselben durch Rücksichten auf die Kürze und Bequemlichkeit des Ausdrucks, bei Aufzählungen (die eine Gattung oder

Kategorie klassifizirend erschöpfen sollen) nicht selten sogar geboten erscheinen.

Eine dritte und letzte Anforderung, die rigoros gestellt zu werden pflegt, ist die: dass ein „Einteilungsgrund“ vorhanden sei (vergl. Einleitung S. 85). Diese Anforderung mag durch psychologische, didaktische, oder auch methodologische Rücksichten diktirt erscheinen; in rein logischer Hinsicht ist sie wol irrelevant zu nennen. Logisch vollkommen ist eine Einteilung — im Sinne der Logik des *Umfanges* wenigstens — sobald sie nur die beiden ersten Anforderungen ja zur Not schon, sobald sie die erste derselben erfüllt.

Eine, alle drei Anforderungen erfüllende, und überhaupt die *logisch vollkommenste* Einteilungsweise wird erhalten, indem man das Th. 30_+) zum Schema der Einteilung nimmt, nämlich aus der Gattung nur zwei Arten, aus jeder Art ebenso nur zwei Unterarten, und so weiter, macht, und zwar in folgender Weise. Sobald (durch ein *Merkmal* bestimmt, was indess vom Standpunkt der Logik des Umfanges noch unwesentlich zu nennen) eine Art a der Gattung als solche sich darbietet, muss die Negation von dieser: a_1, soweit sie nur unter die Gattung fällt, als die andere Art hingestellt werden. Und ebenso weiter in Hinsicht der Arten und ihrer Unterarten, falls jene noch fort und fort eingeteilt werden sollten.

Das solches Einteilungsverfahren ein erschöpfendes sein muss, ist nach Th. 30_+) evident, wenn man dieses für die jeweils einzuteilende Gattung als augenblicklicher Mannigfaltigkeit 1 in Anspruch nimmt. Ebenso erfüllt das Verfahren kraft Th. $30_\times$) auch die zweite Anforderung (und bildet allemal das erwähnte Merkmal den durch die dritte geforderten Einteilungsgrund).

Anwendbar ist das Verfahren auf jede Gattung einer „gewöhnlichen“ Mannigfaltigkeit 1. Hält man letztere fest, und nennt a die zu klassifizirende Gattung, b eine erste Art derselben, so wird $b \Subset a$, somit nach Th. $20_\times$) $b = ab$ sein. Man hat demnach die Einteilung:

$$a = ab + ab_1$$

Ist dann c eine Unterart von ab, d eine solche von ab_1, so hat man ebenso weiter:

$$ab = abc + abc_1, \qquad ab_1 = ab_1d + ab_1d_1$$

sonach

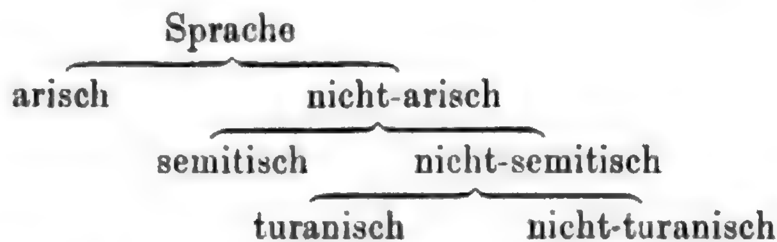
$$a = abc + abc_1 + ab_1d + ab_1d_1,$$

wo augenscheinlich das Produkt irgend zweier Glieder rechts verschwinden muss, als ein zwei solche Faktoren vereinigendes, die Negationen von einander sind. Etc.

Eine derartige Einteilung heisst *zweiteilig* oder *dichotomisch* (im weitern Sinne). Die Gattung verzweigt sich dabei in Arten und Unterarten so wie mancher Baum sich in Äste und Zweige gabelt. Es ist aber nicht erforderlich, dass jede Unterart gleichmässig weiter eingeteilt werde und jedenfalls wird man bei gewissen Spezies als letzten Einteilungsgliedern stehen bleiben.

Gewöhnlich setzt man sogleich eines von diesen endgültigen Einteilungsgliedern jeweils als erste Art resp. Unterart an, dessen Negation dann also die übrigen unter die betreffende Gattung resp. Art fallenden Einteilungsglieder in sich vereinigen wird. Hier braucht nur diese letztere, mithin immer nur das eine der beiden Einteilungsglieder noch weiter eingeteilt zu werden — *Dichotomie* im engeren Sinne. Auch diese ist zuverlässig eine erschöpfende (exhaustive) Einteilungsweise.

Werden z. B. mit Max Müller[1] die menschlichen Sprachen unter dem Gesichtspunkt ihrer genealogischen Verwandtschaft oder nachweislichen Abstammung von einer gemeinschaftlichen Muttersprache eingeteilt in die arischen (oder indogermanischen), die semitischen und die turanischen, so erhalten wir dichotomisch zuwerkegehend die Einteilung:



und ist nun ersichtlich, dass wenn etwa bei der oben erwähnten Einteilung eine Sprache übersehen worden sein sollte, die sich in keine der drei Abteilungen einfügt, oder wenn vielleicht bei einem wilden Volksstamme eine solche Sprache noch neu entdeckt werden sollte, diese notwendig zu unsrer *letzten* Gruppe gehören wird — d. i. zur Gruppe der weder arisch- noch semitisch- noch turanischen Sprachen.

Vergl. hiezu Jevons[6] p. 98 . . 111, insbesondre auch bezüglich des „Baum des Porphyrius" (Malchos).

Solange dergleichen nicht bekannt, mögen wir diese vierte Unterabteilung allerdings gleich 0 annehmen.

Ähnlich aber, wie in diesem Beispiele, bewahrt uns auf den weniger sicheren Gebieten des Wissens allein das dichotomische Verfahren vor dem Begehen einer Auslassung beim Einteilen. Um hiergegen die erforderliche Garantie zu gewinnen, genügt es indess, wie man sieht, sich nur die *letzte* Unterklasse allemal zum Bewusstsein

zu bringen, welche von den bereits aufgezählten übrig gelassen wird, und mit Sorgfalt zu erwägen, ob sie wirklich eine leere.

Unterbleibt dies, während sie doch mitangeführt wurde, so macht der Klassifizirende den Eindruck nur Selbstverständliches zu sagen. Hierauf beruht z. B. der Humor der folgenden in Studentenkreisen beliebten Hexameter von unbekanntem Autor:

Si bene rem memini sunt causae quinque bibendi:
Hospitis adventus, praesens sitis atque futura,
Vinum, festa dies et quaelibet alia causa.

— Weiss ich die Sache noch recht, so gibt's fünf Gründe des Trinkens:
Erstlich die Ankunft des Gast's, dann Durst nebst künftigem Dürsten,
Wein auch, und festlicher Tag, *und jegliche andere Ursach.* —

Die Gleichung 31) $(a_1)_1 = a$ stellt das „Prinzip der *doppelten Verneinung*", das „*dupplex negatio affirmat*" vor. Sie zerfällt nach Def. (1) in die beiden Subsumtionen:

$$a \Subset (a_1)_1, \text{ d. h. } a \textit{ ist nicht nicht-}a,$$

und

$$(a_1)_1 \Subset a, \textit{ was nicht nicht-}a \textit{ ist, muss } a \textit{ sein.}$$

So unbestimmt sind ihrem Sinne nach die in Worten ausgedrückten Sätze, sogar Grundsätze, der herkömmlichen Logik, dass man darüber verschiedener Meinung sein kann, welchen derselben eigentlich unsre Formeln jeweils darstellen! Es stellt z. B. Boole, dem wir uns angeschlossen, [4] pag. 49 die Gleichung $30_\times$) als den Ausdruck des principium contradictionis hin, wogegen Peirce[5] pag. 28 im Anschluss an Leibniz und Kant, die Subsumtion $a \Subset (a_1)_1$ als solchen ansieht — die umgekehrte als das principium exclusi medii hinstellend.

Man vergleiche über diese Streitfrage die gründliche Auseinandersetzung von Sigwart[1] § 23, welcher auf Aristoteles zurückgehend darthut, dass unsre obige Auffassung die berechtigte.

Übrigens hängen die drei Sätze in der That auf das innigste zusammen. Alle drei gelten sie indess nur für eine „gewöhnliche" Mannigfaltigkeit, weil nur für eine solche der Begriff Nicht-a aufgestellt werden konnte, und konstatiren sie, indem sie als schlechtweg gültige hingestellt zu werden pflegen, gewissermassen gleichmässig, dass wir uns mit unserm Denken immer nur in einer solchen bewegen.

Wer mit Sigwart die Verneinungspartikel auf die Kopula bezieht, kann die Sätze 31) auch wieder nur für Individuen von a gelten lassen, aber nicht für Klassen a. Eine Schafrasse z. B. von der es falsch ist, zu behaupten, sie sei nicht-weiss, indem sie neben schwarzen auch weisse Schafe enthält, darf darum doch nicht weiss genannt werden, weil dieses Prädikat damit auch ihren schwarzen Schafen zugesprochen würde.

Dass nun die an unsre Mannigfaltigkeit zu stellenden beiden Anforderungen „konsistent" und „rein" zu sein, nicht nur, wie erkannt, *hinreichend*, sondern auch *notwendig* (unerlässlich) sind, damit die

Theorie der Negation Anwendung finden könne und allgemein, für jede der Mn. angehörige Klasse, der Begriff ihrer Negation aufstellbar werde, ist zudem leicht zu sehen.

Wäre die Mn. nicht konsistent, so wäre durch ihre Setzung bereits ein Widerspruch *gegeben*, und könnte auf dieser Basis unmöglich die Forderung widerspruchsfreien logischen Denkens erfüllt werden.

Wäre aber die Mn. keine reine, so müsste mindestens *einmal als Individuum* derselben eine Klasse A figuriren, die neben anderm auch ein ausserdem schon vorkommendes *Individuum* b derselben Mn. unter sich begreift. Die Negation dieser Klasse A dürfte nach $30_{\times}$) kein Individuum derselben, also auch b nicht, enthalten, und müsste dennoch alle übrigen Individuen der Mn., ausser genanntem A, umfassen, unter diesen auch das frei vorkommende b — es wäre mithin Widersprechendes gefordert. Ebenso hätte die Negation des b (als isolirten Individuums der Mn.) alle übrigen Individuen derselben, sonach auch A, als Individuen zu umfassen, damit als Inbegriff von b und fraglichem Nicht-b die ganze Mn. herauskomme (die ja das Individuum A enthalten soll), und zudem dürfte dieses Nicht-b das b nicht enthalten, welches zugleich mit dem in ihr enthaltenen A doch in ihr steckt. Auch hier wäre also der Ausschluss des b zugleich mit dessen Einschluss (das eine explicite, das andre implicite mittelst A) gefordert — was unvereinbar.

Während es so sich nicht angängig erwies, unter Ausschluss eines Individuums doch ganz eine Gattung zuzulassen, die es unter sich begreift, oder umgekehrt, bei Ausschluss dieser ganzen Gattung das Individuum zuzulassen, während es logisch unmöglich erschien, der *Gattung* und den *Bedeutungen* ihres Namens Widersprechendes zuzumuten, bleibt solches sehr wohl möglich in Bezug auf ein *Ganzes* und dessen *Teile*, wie es das folgende Beispiel erläutern mag.

Gesetzt in einer Frage der Besteuerung von Grund- und Hausbesitzern gelten als *Steuerobjekte* nicht blos die Häuser, sondern auch die Fenster und die Kamine derselben — um nicht zu sagen, auch die Ziegel auf den Dächern. Dann sind diese letztern ja sämtlich Teile der erstern. Man wird sie aber alle als gänzlich von einander unabhängige Objekte ansehen und behandeln können, und z. B. aus bestimmten vielleicht gesetzlich normirten Gründen jemanden von der Besteuerung seines Gebäudes frei sprechen können, ohne ihm (damit) doch diejenige von dessen Kaminen zu erlassen, u. s. w. In dieser Mn. würde die Negation eines Hauses doch dessen sämtliche Kamine und Fenster als Individuen enthalten müssen, die Negation der gesamten letztern aber das Haus (als Ganzes) doch einbegreifen. Es entstünde keinerlei Widerspruch, denn was vom Ganzen gilt (quidquid valet etc.) braucht darum bei den Teilen nicht auch schon zuzutreffen. Das Haus und sein Kamin bleiben hier doch von einander unabhängige Objekte des Denkens.

Konsistent wird nun eine Mn. schon sein, sobald sie keine Urteile als Individuen umfasst, denn dann kann auch zwischen letzteren kein Widerspruch bestehen. Rein wird sie sicher sein, sobald keine Klassen als ihre Individuen figuriren.

Eine Mn. aller erfindlichen, (im engern Sinne) individuellen Objekte des Denkens ohne die (in der suppositio realis genommenen) Urteile wird nun überall da, wo nicht von Urteilen, sondern von Dingen schlechtweg die Rede ist, von hinreichender Erstreckung sein, um beim Negiren aller in Betracht kommenden Begriffe oder Klassen einheitlich zugrunde gelegt werden zu können, und mag solche etwa die *„Mannigfaltigkeit der erdenklichen individuellen Dinge"* genannt werden. Nach Bedarf kann man diese auch noch auf die Sphäre der *„wirklichen"* Dinge einschränken.

§ 17. **Fernere Sätze für Gebiete und Klassen. Kontraposition, etc.**

36) Theoreme. *Allgemein ist:*

$36_\times$) $(ab)_1 = a_1 + b_1$	36_+) $(a+b)_1 = a_1 b_1$
Die Negation eines Produktes ist die Summe der Negationen der Faktoren.	*Die Negation einer Summe ist das Produkt der Negationen der Glieder.*

Umgekehrt auch:

Eine Summe von Negationen ist die Negation des Produktes ihrer Neganden.	*Ein Produkt von Negationen ist die Negation der Summe*

Beweis. Da es nur *eine* Negation zu einem Gebiete geben kann, so ist behuf Beweises gewissermassen nur die Probe zu machen, d. h. nachzusehen, ob die angebliche Negation

$a_1 + b_1$ von ab	$a_1 b_1$ von $a + b$

die für dieselbe charakteristischen beiden Beziehungen des Th. 30) mit diesem Gebiete zusammen erfüllt, d. h. ob wirklich

$ab(a_1 + b_1) = 0, \quad ab + a_1 + b_1 = 1$	$(a+b)a_1 b_1 = 0, \quad a + b + a_1 b_1 = 1$

ist. Dies folgt nun in der That aus den Zusätzen zu Th. $34_\times$) und 34_+), wenn man dieselben auch noch für die Gebiete a_1, b_1 statt a, b mit Rücksicht auf Th. 31) in Anspruch nimmt.

Im Grunde kam hiebei wieder das Hülfstheorem 29) in Anwendung. Man hat — z. B. links vom Mittelstrich — nach 30) einerseits:

$$ab \cdot (ab)_1 = 0, \qquad ab + (ab)_1 = 1$$

und, wie eben gezeigt, andrerseits:

$$ab \cdot (a_1 + b_1) = 0, \qquad ab + (a_1 + b_1) = 1,$$

folglich nach jenem: $(ab)_1 = a_1 + b_1$.

Exempel für Klassen. Wer nicht adelig *und* Grundbesitzer zu-

gleich ist, ist entweder nicht adelig, *oder* nicht Grundbesitzer [oder auch beides zugleich nicht, cf. § 8, ϑ)].

Was nicht „ausländisch *oder* billig“ ist, muss nicht ausländisch (ev. inländisch) *und* zugleich nicht billig (ev. teuer) sein.

Hier ist wieder an eine Eigenheit der Wortsprache zu erinnern. Die Subsumtion $c \Subset a_1 b_1$ heisst:

„Jedes c ist nicht a und (zugleich) nicht b“,

wofür man auch den Ausdruck wählen kann: „*Jedes c ist weder a noch b*“ — sogenanntes „verneinendes konjunktives“ Urteil. Man kann sich auch noch anders ausdrücken und beispielsweise sagen: „(Jeder Fisch) Ein Fisch ist kein Vogel *und* kein Säugetier“.

Schlägt man aber in solchem Falle den verneinenden Artikel zum Subjekte (anstatt, wie soeben, zum Prädikate), so muss das Mal-Zeichen im Prädikate, statt wie vorhin mit „*und*“, nun mit „*oder*“ übersetzt werden: „Kein Fisch ist ein Vogel *oder* ein Säugetier“ — vergl. § 8, λ, μ), S. 232. Wogegen der Satz: „Kein Fisch ist (ein) Vogel *und* (ein) Säugetier“ nur bedeuten würde: $c \Subset (ab)_1$, das heisst: $c \Subset a_1 + b_1$. —

Dem gegenüber würde das sog. „verneinende kopulative“ Urteil: „*Weder die a noch die b sind c*“ (= Sowol die a als auch die b sind nicht c) in Formeln einfach durch: $a + b \Subset c_1$ darzustellen sein. Und analog für mehr als zwei Terme.

Für Gebiete werden (im Hinblick auf Fig. 16) die Theoreme 36) veranschaulicht durch Fig. 17.

Zusatz 1. Die Ausdehnung der Theoreme 36) auf beliebig viele Terme (Operationsglieder, Faktoren oder Summanden) ist naheliegend. So ist auch:

$$(abc)_1 = a_1 + b_1 + c_1 \quad\Big|\quad (a + b + c)_1 = a_1 b_1 c_1,$$

denn:

$$(abc)_1 = \{(ab)\cdot c\}_1 = (ab)_1 + c_1 = (a_1 + b_1) + c_1 = a_1 + b_1 + c_1, \text{ etc.}$$

Anmerkung zu Th. 36). Wendet man die Formeln 36) auf a_1 und b_1 statt a und b an, so ergibt sich nach 31):

$$(a_1 b_1)_1 = a + b \quad\Big|\quad (a_1 + b_1)_1 = ab.$$

Diese Formeln zeigen (wie Peirce bemerkt), *dass mit Hülfe der dritten Spezies, der Negation,* von den beiden ersten Spezies — d. i. *von den direkten Rechnungsarten* des identischen Kalkuls: Multiplikation und Addition — *irgend eine,* gleichviel welche, *entbehrlich* gemacht werden könnte.

Wollte man mit Negation und Multiplikation allein auskommen, so brauchte man nur überall, wo eine Summe $a + b$ auftritt, für diese $\overline{\bar{a}\bar{b}}$ zu schreiben. Mit Addition und Negation würde man ausreichen, indem man für jedes Produkt ab konsequent sagte $\overline{\bar{a} + \bar{b}}$ — falls wir hier einmal den wagerechten Negationsstrich benutzen. [Ebenso liesse

nach früherem für 0 sich $\bar{1}$, oder aber für 1 sich $\bar{0}$ durchweg schreiben, d. h. man könnte auch noch des einen der beiden Symbole 0 und 1 entraten.]

Analog lässt sich mittelst der Partikel „nicht" von den beiden Konjunktionen „und" und „oder" irgend eine logisch durch die andere darstellen:

Für „*a oder b*" könnte gesagt werden: „was nicht »Nicht-*a und* Nicht-*b*« ist".

Für „was *a und b* ist" liesse sich sagen: „was nicht »Nicht-*a oder* Nicht-*b*« ist".

Dass es aber *unzweckmässig* wäre, solches durchzuführen, sei es im Kalkul, sei's in der Wortsprache, bedarf kaum einer nähern Darlegung.

Es liegt die Möglichkeit vor, dass sich die Sätze 36) vielleicht in der Gestalt:

Was nicht *a und b* ist, muss nicht *a* oder nicht *b* sein,

Was nicht *a oder b* ist, muss zugleich nicht *a* und nicht *b* sein,

in Worte gefasst schon irgendwo in ältern Logikbüchern vorfinden.

Wo nicht, so müssen sie De Morgan zugeschrieben werden, welcher [wie Herr Venn[1] p. 389, Fussnote ausfindig gemacht hat] in [6] p. 208, indessen ohne Beweis, bemerkt, es hätten $a + b$ und ab bezüglich $a_1 b_1$ und $a_1 + b_1$ zum Gegenteile. Selbständig ist auf diese beiden hübschen Sätze auch Herr Robert Grassmann[2] gekommen, und dürfte dieser sie zum ersten mal (und zwar auf die vorgetragene Weise) *bewiesen* haben.

Die in seiner Fussnote zu [5] p. 32 von Herrn Peirce — jedenfalls im guten Glauben — ausgesprochene, Herrn R. Grassmann eigentlich verdächtigende Vermutung (auf Grund unsicherer Reminiscenzen von Jevons' Schrift [1]) kann ich (nachdem es mir unlängst endlich gelungen ist, dieses Buch durch antiquarischen Erwerb desselben zu Gesicht zu bekommen) durchaus nicht begründet finden.

Die Anwendung der Theoreme 36) im Sinne von links nach rechts, also die Verwandlung eines Ausdruckes $(ab)_1$ resp. $(a + b)_1$ in den ihm gleichwertigen $a_1 + b_1$ resp. $a_1 b_1$ nennt man das *„Ausführen"* (Entwickeln*)) *der Negation*, welche im Gegensatz hiezu bei den ursprünglichen Ausdrücken $(ab)_1$ und $(a + b)_1$ *„nur angedeutet"* erscheint. Eine, wie hier mit Negationsstrich versehene Klammer $(\ )_1$ mag eine *„Negationsklammer"* genannt werden. Das Ausführen der Negation läuft auf das „Auflösen" dieser Klammer hinaus.

Zusatz 2 zu Th. 36).

Durch kombinirte Anwendung der beiden Theoreme 36) und des Th. 31) kann man nunmehr von jedem nur durch Multiplikation und

*) Aus einem in § 19 ersichtlichen Grunde wird dieser letztere Ausdruck indess besser vermieden.

Addition aus lauter einfachen Symbolen und deren Negationen aufgebauten übrigens noch so komplizirten Ausdrucke die Negation sofort und mit leichter Mühe ausgeführt herstellen, und zwar indem man jedes Gebiet mit seiner Negation und ausserdem noch die Zeichen „mal" und „plus" vertauscht.

Man schreibe also aus dem gegebenen Ausdruck ab: a mit a_1, a_1 in Gestalt von a, $\cdot$ als $+$ und $+$ als $\cdot$, wobei nur noch zu beachten ist, dass manche Klammern, welche im ursprünglichen Ausdruck blos gesetzt zu denken waren aber unterdrückt sein durften, im negirten Ausdruck ausdrücklich angeschrieben und beibehalten werden müssen wogegen andere, diejenigen, die dort unentbehrlich waren, hier als überflüssig in Wegfall kommen. Man hat nämlich gemäss Anhang 2 zu berücksichtigen, dass ursprünglich jeder zusammengesetzte Ausdruck, wenn mit andern Termen verknüpft oder zu verknüpfen, in Klammer stehen muss, dass aber endgültig (teils zufolge gewisser Eigenschaften, Gesetze unsrer direkten Operationen, teils auf Grund eigener auf Klammerersparniss es absehender Konventionen) nur um Summen herum, welche als Faktor auftreten, die Klammer nicht weggelassen werden darf.

War hienach der ursprüngliche Ausdruck schon frei von überflüssigen Klammern, so wird beim Negiren desselben eine Klammer allemal dann einzuführen, im negirten Ausdruck neu anzubringen sein, wenn man an das Negiren eines Produktes kommt, welches als ein Summand im ursprünglichen Ausdruck steht — indem eben dadurch sich eine Summe ergeben wird die als Faktor zu setzen. Dagegen kommt jede (andre, jede nicht gerade ein Produkt als Glied umschliessende) Klammer des ursprünglichen Ausdrucks beim Negiren in Wegfall.

Zur Erläuterung und Übung seien zunächst für einige Ausdrücke die Negationen hergesetzt, deren erste sechs schon De Morgan [3] pag. 42 gegeben hat:

Ausdruck:	$a + bc$,	Negation desselben:	$a_1(b_1 + c_1)$
„	$x = (a + b)c$,	„	$x_1 = a_1 b_1 + c_1$
„	$(a + b)(c + d)$,	„	$a_1 b_1 + c_1 d_1$
„	$a + b(c + d)$,	„	$a_1(b_1 + c_1 d_1)$
„	$a + b + a_1 c$ (oder $a + b + c$),	„	$a_1 b_1 c_1$
„	$(a + bc)(d + ef)$,	„	$a_1(b_1 + c_1) + d_1(e_1 + f_1)$
„	$a_1 b + c_1$,	„	$(a + b_1)c$
„	$ab + a_1 b_1$,	„	$(a_1 + b_1)(a + b) = ab_1 + a_1 b$

Ausdruck:	$a_1(b_1 + c + d_1)$,	Negation desselben:	$a + bc_1d$
„	$a_1bc + ab_1c_1$,	„	$(a + b_1 + c_1)(a_1 + b + c)$
„	$a(b_1 + c_1) + b_1c_1$,	„	$(a_1 + bc)(b + c) = a_1(b + c) + bc$
„	$a_1(b + c + d) + bcd$,	„	$a(b_1 + c_1 + d_1) + b_1c_1d_1$.

Noch weitere Aufgaben in § 18, χ).

In jedem aus einfachen Gebietsymbolen *durch die Operationen der drei Spezies* Multiplikation, Addition und Negation *aufgebauten Ausdrucke kann man jetzt alle vorgeschriebenen* (angedeuteten) *Negationen ausführen*, wodurch der Ausdruck übergeht in einen solchen, *der nur noch durch* die beiden direkten Spezies, *Multiplikation und Addition. aufgebaut erscheint aus den einfachen Symbolen und deren Negationen.*

Man braucht zu diesem Zwecke nur mit den innersten „Neganden“ zusammengesetzter Natur, welche von der oben beschriebenen Art sein werden, zu beginnen, die innersten mit Negationsstrich behafteten Klammern zuerst, und dann nach aussen fortschreitend nach und nach auch die äussern Klammern dieser Art, aufzulösen, bis keine Negationsklammer mehr vorhanden ist.

Wird auch auf diese Weise rasch die Möglichkeit der Ausführung erkannt, so ist das geschilderte Verfahren doch nicht das praktischste. Es kann sich nämlich dabei ereignen, dass man irgend einen zusammengesetzten Ausdruckteil wiederholt „umzunegiren“, in seine Negation umzuschreiben bekommt, was, sooft es zweimal geschah, nach Th. 31) unnötige Arbeit war. Besser also wird man mit dem Auflösen der Negationsklammern in der Richtung *von aussen nach innen* fortschreiten, und sobald man mit dem Negiren der in einer solchen stehenden Terme wiederum auf eine Negationsklammer stösst, solche (mitsamt dem auf sie bezüglichen Vorsatze des Negirens) einfach fallen lassen, ignoriren.

Darnach ist z. B.

$$[\{(a + b)_1 c + d_1 e\} f]_1 = \{(a_1 b_1 c + d_1 e) f\}_1 = (a + b + c_1)(d + e_1) + f_1$$

auf die erstere Art *mit*, auf die letztere *ohne* die angegebene Zwischenrechnung (der doppelt negirte Ausdruckteil war $a + b$) sofort hinzusetzen.

Weitere Exempel:

$$[\{(ab)_1 + (cd)_1\}(e + f)_1]_1 = abcd + e + f,$$

$$[a + b\{c + d(e + fg)_1\}_1]_1 = a_1\{b_1 + c + de_1(f_1 + g_1)\},$$

$$\left([(ax + bx_1)_1 \{(mx)_1 (nx_1)_1\}_1 c]_1 + x\right)_1 =$$

$$= (a + x_1)(b_1 + x)(mx + nx_1)cx_1 = b_1ncx_1.$$

Zusatz 3 zu Th. 36).

Das am Schluss des § 13 erwähnte Problem der *Zerfällung eines Ausdrucks in seine letzten Faktoren* kann nunmehr dadurch gelöst wer-

den, dass man die Negation des Ausdrucks herstellt, dieselbe (durch Ausmultipliziren) *in ihre letzten Aggreganten* zerfällt und dann abermals die Negation davon gemäss Th. 36) bildet. Z. B. für

$$y = ab + ac + ad + bcd + e$$

ergibt sich:

$$y_1 = (a_1 + b_1)(a_1 + c_1)(a_1 + d_1)(b_1 + c_1 + d_1)e_1 = a_1b_1e_1 + a_1c_1e_1 + a_1d_1e_1 + b_1c_1d_1e_1,$$

sonach:

$$y = (a + b + e)(a + c + e)(a + d + e)(b + c + d + e)$$

in Übereinstimmung mit dem früheren Ergebnisse.

37) Theorem.

Wenn $a \mathrel{=\!\!\!\in} b$, *so ist* $b_1 \mathrel{=\!\!\!\in} a_1$ (und umgekehrt).

Man darf also auch *die beiden Seiten einer Subsumtion negiren, wenn man nur zugleich das Subsumtionszeichen umkehrt.* Oder: *Untergeordnetes* (oder Gleiches), *negirt, gibt Übergeordnetes* (oder Gleiches). Eingeordnetes, negirt, gibt Umgeordnetes.

Es lassen sich zwei Beweise vollkommen dualistisch führen.

Beweis. Wenn $a \mathrel{=\!\!\!\in} b$ ist, so ist

$a = ab$ nach Th. $20_\times$) | $a + b = b$ nach Th. 20_+)

also nach Th. 32) auch

$a_1 = (ab)_1$, das ist $a_1 = a_1 + b_1$ | $(a + b)_1 = b_1$, das ist $a_1b_1 = b_1$

nach Th. 36), und diese Gleichung ist, wiederum nach Th. 20) äquivalent der Subsumtion: $b_1 \mathrel{=\!\!\!\in} a_1$, q. e. d.

Wendet man den Satz 37) auf die Subsumtion $b_1 \mathrel{=\!\!\!\in} a_1$ als die ursprünglich vorauszusetzende an, so folgt aus dieser auch $(a_1)_1 \mathrel{=\!\!\!\in} (b_1)_1$, das ist nach Th. 31) $a \mathrel{=\!\!\!\in} b$.

Die beiden im Satze vorkommenden Subsumtionen bedingen sich also gegenseitig, sagen wesentlich dasselbe aus oder sind äquivalent.

Exempel. Da Gold Metall ist, so ist, was nicht Metall ist, auch nicht Gold. Desgl. umgekehrt: Gilt etwa der Satz: „Was nicht Proteinsubstanz ist (nicht aus dem Ei stammt) ist auch nicht lebendig“, so folgt: „Alles Lebendige ist Proteinsubstanz (stammt aus dem Ei)“.

Ist eine Klasse als Subjekt enthalten in einer Prädikatklasse, so muss (als Klasse aufgefasst) *die Negation des Prädikats enthalten sein in der Negation des Subjektes* — und zwar ganz einerlei, in Bezug auf welche Mannigfaltigkeit man die Negationen bildet, wofern dieselbe nur eine gewöhnliche ist, den Negationsbegriff zulässt.

Für Gebiete kann man den Satz durch die Anschauung verifiziren

an der Fig. 1 S. 155: die Aussenfläche des Kreises b ist ganz in der des Kreises a enthalten.

Der Schluss von der Subsumtion $a \Subset b$ auf die Subsumtion $b_1 \Subset a_1$ (oder umgekehrt) gehört zu den sog. „unmittelbaren Folgerungen“, indem derselbe schon zustande kommt, wenn auch nur *eine* Prämisse gegeben ist. Derselbe wird in der Logik als die „*Konversion durch Kontraposition*“ des durch die gegebene Subsumtion ausgedrückten Urteils bezeichnet.

Zusatz. *Ist* $a \Subset b$ *und zugleich* $a_1 \Subset b_1$, *so wird* $a = b$ *sein, und umgekehrt.*

Beweis nach Def. (1), indem aus der letzten Subsumtion nach Th. 37) und 31) hinzufolgt: $b \Subset a$.

Exempel. Die beiden Sätze: „Was Kochsalz ist, ist auch Chlornatrium“, und „was nicht Kochsalz ist, ist nicht Chlornatrium“ — drücken zusammen aus, dass Kochsalz und Chlornatrium einerlei sind.

38) Theoreme.

Die Subsumtion $a \Subset b$ *sagt genau dasselbe aus, wie eine jede der beiden Gleichungen:*

ad $38_\times$) $ab_1 = 0$. | ad 38_+) $a_1 + b = 1$.

Beweis. Aus $a \Subset b$ folgt nach Th.

$15_\times$) durch beiderseitiges Multipliziren mit b_1, dass $ab_1 \Subset bb_1$, somit nach Th. $30_\times$), dass $ab_1 \Subset 0$, was nach Th. $5_\times$) auf $ab_1 = 0$ hinauskommt. — Ist umgekehrt

$$ab_1 = 0,$$

so hat man nach Th. 30_+):

$$a = a \cdot 1 = a(b + b_1)$$
$$= ab + ab_1 = ab + 0$$

15_+) durch beiderseitiges Addiren von a_1, dass $a_1 + a \Subset a_1 + b$, somit nach Th. 30_+), dass $1 \Subset a_1 + b$, was nach Th. 5_+) auf $1 = a_1 + b$

$$a_1 + b = 1,$$

so folgt nach Th. $16_\times$) etc.:

$$a = a \cdot 1 = a(a_1 + b)$$
$$= aa_1 + ab = 0 + ab$$

oder $a = ab$. Aus diesem Resultate folgt aber nach Th. $20_\times$), dass $a \Subset b$, wie zu beweisen war.

Aus dem Umstand, dass der letzte Teil des hier gegebenen Beweises rechterhand dem links durchaus nicht dual entspricht, erkennt man die Möglichkeit noch andrer Varianten der beiden Beweise, welche aufzusuchen dem Leser als eine gute Übung empfohlen sei.

Exempel für Klassen. Da alles Gold Metall ist, so gibt es nichts, was zugleich Gold und nicht Metall wäre. Und jede Substanz — ja

alles Denkbare innerhalb einer die Klasse Metall umfassenden gewöhnlichen Mannigfaltigkeit — ist (entweder) Metall oder [auch] nicht Gold.

Nach den Theoremen 38) lässt jede Subsumtion sich als eine Gleichung schreiben, deren eine Seite 0, *oder, wenn man will, auch* 1 *ist.*

Zusatz zu Th. 38). Nach diesem Satze in Verbindung mit Th. 31) muss auch die Gleichung

$$ab = 0 \quad | \quad a + b = 1$$

bezüglich äquivalent sein einer der beiden Subsumtionen:

$$a \subseteq b_1, \quad b \subseteq a_1 \quad | \quad a_1 \subseteq b, \quad b_1 \subseteq a.$$

Die Gleichung $ab = 0$ erscheint so, als der symmetrische Ausdruck — symmetrisch allerdings nur im Hinblick auf das Kommutationsgesetz $12_\times$) der identischen Multiplikation — für eine *symmetrische* Beziehung, für welche die Wortsprache nur die unsymmetrischen Ausdrucksformen hat:

„Kein a ist b", oder „Kein b ist a",

resp.

„Alle a sind nicht b", „Alle b sind nicht a",

(die demnach auch unter sich äquivalent sein werden) — woferne man hier nicht etwa seine Zuflucht nehmen will zu der Umschreibung mittels verneinenden Existenzialurteils:

„Es gibt nichts, was a und b zugleich ist".

39) Theoreme.

Jede Gleichung $a = b$ *lässt sich* (auf der einen Seite, z. B.) *rechterhand auf*

$39_\times$) 0 | 39_+) 1

bringen. Dieselbe ist nämlich äquivalent der Gleichung:

$$ab_1 + a_1b = 0 \quad | \quad ab + a_1b_1 = 1,$$

oder auch in einer praktisch minder wichtigen Form geschrieben:

$$(a + b)(a_1 + b_1) = 0 \quad | \quad (a + b_1)(a_1 + b) = 1,$$

welche, wie leicht zu sehen, durch Ausmultipliziren gemäss Th. $28_\times$), $30_\times$) und 21_+) auf die vorige zurückkommt.

Beweis. Nach Def. (1) zerfällt die Gleichung $a = b$ in die beiden gleichzeitig anzuerkennenden Subsumtionen:

$$a \subseteq b \quad \text{und} \quad b \subseteq a.$$

Nach dem Th. 38) lassen dieselben sich umschreiben in die Gleichungen

$$ab_1 = 0, \quad a_1b = 0 \quad | \quad a_1 + b = 1, \quad b_1 + a = 1$$

und folgt aus diesen durch überschiebendes Addiren resp. Multipliziren die zu beweisende Gleichung in der einen ihrer angegebenen beiden Formen.

Umgekehrt, wenn die Gleichung gilt:

$$ab_1 + a_1b = 0, \quad \Big| \quad ab + a_1b_1 = 1, \text{ sive } (a + b_1)(a_1 + b) = 1,$$

so muss nach Th. 24) sein:

$$ab_1 = 0 \quad \text{und} \quad a_1b = 0, \quad \Big| \quad a_1 + b = 1 \quad \text{und} \quad a + b_1 = 1,$$

was nach Th. 38) hinauskommt auf die beiden Subsumtionen $a \mathrel{=\!\!\!\in} b$ und $b \mathrel{=\!\!\!\in} a$, somit nach Def. (1) auf die Gleichung $a = b$, wie zu zeigen war.

Indess konnte man hier auch schon mit der ersten Hälfte des Beweises auskommen, mit Rücksicht darauf, dass nach den citirten Sätzen das Paar der Subsumtionen sowie der für sie genommenen Gleichungen jeweils *äquivalent* sein musste der zum Ausgangspunkt genommenen Gleichung.

Exempel. Da Kochsalz einerlei mit Chlornatrium ist, so gibt es nichts, was Kochsalz und nicht Chlornatrium oder Chlornatrium und nicht Kochsalz wäre. Auch nichts, was Kochsalz oder Chlornatrium und zugleich nicht Kochsalz oder nicht Chlornatrium wäre.

Alles ist entweder Kochsalz und zugleich Chlornatrium oder nicht Kochsalz und dann auch nicht Chlornatrium. Desgleichen Kochsalz oder nicht Chlornatrium und zugleich Chlornatrium oder nicht Kochsalz.

Aufgabe. Man bringe die Gleichungen

$$ab = ac, \qquad a + b = a + c$$

rechts auf 0.

Auflösung: Mittelst der Zwischenrechnung — cf. Th. 36):

$$ab(a_1 + c_1) + ac(a_1 + b_1) = 0, \qquad (a + b)a_1c_1 + a_1b_1(a + c) = 0$$

erhält man leicht die Resultate:

$$a(bc_1 + b_1c) = 0 \quad \text{resp.} \quad a_1(bc_1 + b_1c) = 0.$$

Bei den Anwendungen wird man aber, besonders wenn a, b oder c komplizirte Ausdrücke vorstellen, die Zwischenrechnung sparen und sich sogleich an das Schema dieser Endergebnisse halten. — Ebenso würden die rechts auf 1 gebrachten Gleichungen lauten:

$$a_1 + bc + b_1c_1 = 1 \quad \text{resp.} \quad a + bc + b_1c_1 = 1.$$

Das Th. 39) ist von grosser Wichtigkeit für die Technik unsres Kalkuls, und zwar das $39_\times$) in höherem Maasse als sein duales Gegenstück aus dem teilweise schon erwähnten Grunde, weil man lieber mit Aggregaten (Summen) von monomischen Produkten als mit Produkten von Polynomen (die in Klammern gesetzt bleiben müssten) rechnet, desgleichen vorzieht, das auch der Arithmetik angehörige Distributionsgesetz $27_\times$), statt seines Gegenparts 27_+), anzuwenden — wozu endlich

jetzt als ein weiterer Grund der Umstand hinzutritt, dass es schon jedermann geläufig ist, mit rechterhand auf 0 (nicht aber auf 1) gebrachten Gleichungen zu operiren. [Es könnte überdies als ebendahin wirkend angeführt werden, dass auch in der Wortsprache Ausdrücke wie $(a+b)(c+d)$ meist unbequemer unzweideutig darzustellen sind, als die ihnen dual entsprechenden $ab+cd$.]

Nach Th. 24) Zusatz konnte jedes System von gleichzeitig geltenden Gleichungen mit der rechten Seite 0 in eine einzige solche Gleichung zusammengezogen und durch diese ausreichend vertreten werden. Nach den Th. 38) und 39) kann aber jede *Subsumtion* sowol als jede *Gleichung überhaupt* dargestellt werden als eine Gleichung mit der rechten Seite 0.*) Thut man dies bei allen etwa gegebenen Subsumtionen und Gleichungen, und wendet hernach den genannten Zusatz an, so lässt sich offenbar das Ziel verwirklichen, welches der folgende Satz ausspricht:

Zusatz zu Th. 39). *Jedes System von simultanen* (koexistirenden, als gleichzeitig geltend hingestellten) *Subsumtionen und Gleichungen lässt sich in eine einzige Gleichung mit der rechten Seite* 0 (oder, wenn man will 1) *zusammenziehen und durch diese vollkommen vertreten.*

Wir werden dieselbe die *„vereinigte Gleichung* des Systemes“ nennen.

Dies legt uns folgende Bemerkung nahe. In der verbalen Logik wird gewöhnlich unterschieden zwischen *„Folgerungen“*, als welche sich an eine einzige Prämisse knüpfen, und *„Schlüssen“*, als welche mehrere Prämissen haben. Diese Unterscheidung erscheint auf Grund des vorstehenden Zusatzes in der exakten Logik — für den Kalkul — als belanglos, da wir hier immer ein System von Prämissen in eine einzige Prämisse werden zusammenziehen können. Auch „Schlüsse“ dürfen hier als „Folgerungen“ hingestellt werden.

Und mit der Lösung von Problemen, die sich allgemein beziehen auf eine einzige Gleichung — z. B. mit deren Auflösung nach einer Unbekannten — wird das nämliche dann auch von selbst geleistet sein für irgend ein System von Gleichungen!

Übungsaufgabe. Man bilde die vereinigte Gleichung der folgenden acht Subsumtionen und Gleichungen:

$$a \mathrel{\underline{\in}} b, \quad c \mathrel{\underline{\in}} d_1, \quad e_1 \mathrel{\underline{\in}} f, \quad g_1 \mathrel{\underline{\in}} h_1, \quad k = l, \quad m = n_1, \quad p_1 = q, \quad r_1 = s_1.$$

Auflösung. Die vereinigte Gleichung ist:

$$ab_1 + cd + e_1 f_1 + g_1 h + kl_1 + k_1 l + mn + m_1 n_1 + p_1 q_1 + pq + r_1 s + rs_1 = 0.$$

---

*) Und statt 0 konnte auch 1 gesagt werden.

Ebenso ist von den drei Subsumtionen:

$$a \leqslant b, \quad a \leqslant c_1, \quad c \leqslant b$$

die vereinigte Gleichung:

$$ab_1 + ac + b_1c = 0. \quad \text{Etc.}$$

Die linke Seite einer rechts auf 0 gebrachten Gleichung nennt man, wie in der Mathematik auch „das *Polynom* dieser Gleichung". So ist $ab_1 + ac + b_1c$ das Polynom der zuletzt erwähnten.

Mehr beiläufig wollen wir jetzt ein paar Theoreme anreihen, die sich zwar nicht selbst auf Negationen beziehen, aber erst jetzt bewiesen werden können, nachdem wir (auf Grund des Prinzips $\text{III}_\times$) unter Hinzuziehung des Negationsbegriffs die Berechtigung erworben haben, von dem vollen Distributionsgesetze Gebrauch zu machen.

40) Theorem. *Wenn zugleich*

$$ac \leqslant bc \quad \textit{und} \quad a + c \leqslant b + c$$

ist, so muss sein:

$$a \leqslant b$$

Beweis. Ähnlich wie bei Th. 29) haben wir:

$$a = a(a + c) \leqslant a(b + c) = ab + ac \leqslant ab + bc = b(a + c) \leqslant b(b + c) = b$$

nach Th. $23_\times$), der zweiten Voraussetzung nebst $15_\times$), sodann $27_\times$), der ersten Voraussetzung nebst 15_+), wieder $27_\times$), dann der zweiten Voraussetzung nebst $15_\times$) und endlich $23_\times$). Oder dual entsprechend.

Also nach Th. 2) und 3): $a \leqslant b$, q. e. d.

Zusatz 1. Kombinirt man die durch das Theorem 40) gegebene Aussage mit derjenigen, welche sich durch Vertauschung von a und b aus ihr ergibt so erhält man das *Theorem:*

Wenn $ac = bc$ *und zugleich* $a + c = b + c$ *ist, so muss* $a = b$ *sein,*

— welches als eine Verallgemeinerung des Hülfstheorems 29) erscheint und auch selbständig genau wie letzteres bewiesen werden kann.

Anmerkung. Dass sowol beim Th. 40) als bei dessen Zusatz eine der beiden Prämissen allein nicht genügt, um die Konklusion zu rechtfertigen, haben wir bereits unter Th. 15) und 16) hervorgehoben und durch Beispiele über Klassen sowie durch Figuren belegt. Wir sind jetzt auch im stande, es analytisch zu beweisen.

Bei Th. 40) gibt die Annahme $a = (b + c_1)u$, wo u ein willkürliches Gebiet vorstellt, jedesmal ein solches Gebiet a, für welches die erste Prämisse $ac \leqslant bc$ erfüllt ist, indem ja $ac = bc \cdot u \leqslant bc$ nach Th. $6_\times$) wird — und, nebenbei gesagt, auf die allgemeinste Weise; hier wird nun $ab_1 = b_1c_1u$ im Allgemeinen nicht $= 0$, also nicht $a \leqslant b$ sein.

Ähnlich für $b = ac_1 + u$ ist $a + c \Subset b + c$ nämlich $a + c + u$, und wieder

$$ab_1 = a \cdot (a_1 + c)u_1 = acu_1$$

nicht notwendig 0, wie es nach Th. $38_\times$) sein müsste, falls $a \Subset b$ folgte.

Desgleichen, was den Zusatz betrifft, ist $ac = (a + uc_1)c$ ohne dass $a = a + uc_1$ sein müsste, endlich ist $a + c = (a + uc) + c$, ohne dass doch im Allgemeinen, und für jedes beliebige Gebiet u sein müsste $a = a + uc$.

Das Theorem sowol als sein Zusatz gilt auch umgekehrt, und zwar für jedes beliebige Gebiet c. Nämlich wenn z. B. $a \Subset b$ ist, so muss nach Th. 15) auch $ac \Subset bc$ sowie $a + c \Subset b + c$ für jedes c sein.

Exempel zu dem Satze. Sind die Mongolen und die Russen stets Russen oder Asiaten, zugleich alle mongolischen Russen auch asiatische Russen, so müssen die Mongolen sämtlich Asiaten sein. [Seit der chinesischen Einwanderung in fremde Weltteile sind freilich die Prämissen nicht mehr ganz zutreffend, sie waren es jedoch zeitweise.]

Zusatz 2 zu Th. 40) Theorem von Peirce.

Wenn für irgend ein c zugleich

$$ac \Subset b \quad \text{und} \quad a \Subset b + c$$

ist, so folgt:

$$a \Subset b,$$

desgleichen umgekehrt, für jedes c.

Beweis 1, nach Th. 40), weil unter den Voraussetzungen des Satzes nach Th. 15) auch $acc \Subset bc$ und $a + c \Subset b + c + c$, also $ac \Subset bc$ und $a + c \Subset b + c$ folgt.

Beweis $2_\times$. Aus der zweiten Prämisse folgt durch beiderseitiges Multipliziren mit a gemäss $15_\times$):

$$aa \Subset a(b + c) \quad \text{also nach } 14_\times) \text{ und } 27_\times): \quad a \Subset ab + ac.$$

Aber es ist $ab + ac \Subset ab + b$, wie sich durch beiderseitiges Addiren von ab zur ersten Prämisse gemäss 15_+) ergibt. Hienach folgt a fortiori: $a \Subset ab + b$ oder wegen des Absorptionsgesetzes 23_+): $a \Subset b$, wie zu zeigen war.

Hiezu genau dual entsprechend lässt sich noch ein dritter „Beweis 2_+" führen, was dem Leser zur Übung empfohlen sei.

Die Umkehrung versteht sich nach Th. 6) und II von selbst: Ist $a \Subset b$, so wegen $ac \Subset a$ auch $ac \Subset b$ für jedes c. Etc.

Der Satz wäre eigentlich als ein selbständiges Theorem aufzuführen gewesen; er sieht noch einfacher aus als das Th. 40) demzuliebe wir ihn behufs Vergleichung hier eingereiht haben. Sonderliche Wichtigkeit für die Theorie möchte er gleichwol nicht besitzen und betrachte ich ihn mehr nur als Kuriosum. Die Exempel zu demselben klingen alle recht sonderbar. Z. B. Da Gold, welches käuflich, Metall ist, und alles Gold käuflich oder Metall sein wird, so muss Gold Metall sein. Umgekehrt folgt aus

letzterm einerseits, dass auch geschmiedetes Gold Metall ist, und Gold sein wird Metall oder auch geschmiedet.

Von fundamentaler Wichtigkeit sind dagegen folgende Sätze:

$41_\times$) Theorem (Peirce[5] p. 39)

Wenn

$$ab ⋹ c$$

ist, so ist

$$a ⋹ b_1 + c.$$

41_+) Theorem. (Peirce)

Wenn

$$a ⋹ b + c$$

ist, so ist

$$ab_1 ⋹ c.$$

D. h. *Es darf*

ein Faktor des Subjekts | *ein Summand des Prädikats*

jeweils von diesem abgelöst und mit Negationsstrich versehen (in seine Negation verwandelt, negirt) *als*

Summand zum Prädikat | *Faktor zum Subjekt*

geschlagen werden — wonach denn aus der zweiten Subsumtion mit Rücksicht auf Th. 31) auch wieder die erste folgt. Der eine Satz nämlich kann, indem man b mit b_1 vertauscht, auch als die *Umkehrung* des andern dargestellt werden, ermächtigt zum Rückschlusse von dessen Behauptung auf seine Voraussetzung.

Behufs Beweises schliesse man aus der Voraussetzung durch beiderseitiges

Addiren von b_1:

$$ab + b_1 ⋹ b_1 + c.$$

Nach Theorem 33_+) Zusatz gibt dies:

$$a + b_1 ⋹ b_1 + c$$

und da nach Th. 6_+) auch

$$a ⋹ a + b_1$$

Multipliziren mit b_1:

$$ab_1 ⋹ b_1(b + c),$$

oder, wenn rechts ausmultiplizirt wird mit Rücksicht auf $30_\times$):

$$ab_1 ⋹ b_1 c.$$

Da aber nach Th. $6_\times$)

$$b_1 c ⋹ c$$

ist, so folgt die Behauptung nach Prinzip II.

Vergleiche hiezu das Theorem ν) von Peirce im nächsten Paragraphen. Noch einfacher kann man sich gemäss Th. $38_\times$) und ev. 36) überzeugen, dass sowohl die behauptete als die vorausgesetzte Subsumtion hinausläuft auf die Gleichung:

$$abc_1 = 0. \qquad | \qquad ab_1c_1 = 0.$$

Exempel:

Die Säugetiere welche Flossen haben, sind Wale; ergo: die Säugetiere sind Wale oder haben keine Flossen.

Mohammedaner sind Schiiten oder Sunniten; ergo: Mohammedaner, welche nicht Schiiten sind, müssen Sunniten sein.

Neunte Vorlesung.

§ 18. **Verschiedenartige Anwendungen: Rechtfertigungen, Studien und Übungsaufgaben.**

α) Auf Grund der Theoreme 33_+) und Zusatz sind wir nun in der Lage, die zuerst von Jevons (dann unabhängig auch von Peirce, R. Grassmann und mir, Mc Coll und ev. noch Anderen) erfasste und in diesem Buche zu Grunde gelegte *identische Addition* vollends zu *rechtfertigen* gegenüber den von sehr beachtenswerter Seite gegen sie erhobenen Einwänden. Die Betrachtungen dürften auch an sich instruktiv sein, dazu als eine gute Übung erscheinen.

Es wurde bereits erwähnt, dass Boole[4] in, ihm unbewusst, zu engem Anschluss an das Vorbild der arithmetischen Addition die gleichnamige Operation in der Logik nur verwendet wissen will um Klassen zu verknüpfen, die keine Individuen gemein haben — und dass, nach der inzwischen vollzogenen Läuterung der Disziplin von arithmetischen Beimengungen, von neueren Autoren ihm hierin nur Herr Venn noch beipflichtet, indem er [1] pag. 381 .. 389 die Forderung verficht, die Addition auf gebietfremde Summanden, individuenfremde oder disjunkte Klassen zu beschränken.

Herr Venn verwirft es, die Summe $a + b$ für den Fall wo ab nicht $= 0$ ist, überhaupt zu erklären, da es ihm hier anstössig erscheint, dass der den beiden Gliedern gemeinsame Teil ab, welcher in die Summe $a + b$ doch nur *ein* mal eingehen soll, daselbst doch *zwei* mal (als Teil von a sowol, wie als Teil von b) implicite erwähnt wird.

Es ist unbestreitbar, dass man diesen Standpunkt einnehmen *kann*, denn auf Grund der oben citirten Sätze ist man berechtigt, und hindert in der That nichts, überall da, wo eine unsrer im Jevons'schen Sinne auftretenden Summen $a + b$ auftritt, dafür *unsymmetrisch und etwas umständlicher* sei es $a + a_1 b$, sei es $ab_1 + b$ zu schreiben, oder endlich auch *symmetrisch aber noch umständlicher:* $ab + ab_1 + a_1 b$.

Wer dieses vorzieht, wird also in der That es durchführbar finden, ausschliesslich mit „reduzirten“ Summen zu operiren und bei Herrn

Venn's Ansicht zu verharren. Es frägt sich nur, *wie* man damit durchkäme, ob etwa besser und bequemer?

Nicht der einzige, aber doch ein Hauptzweck unsres Kalkuls sind jedenfalls die *Anwendungen* desselben. Bei diesen müssen wir Data von Textaufgaben übertragen in die Zeichensprache des Kalkuls, in Relationen oder Formeln, und haben deren rechnerisch gefundene Lösungen alsdann wieder in die Wortsprache zurückzuübersetzen.

Die Brauchbarkeit des Kalkuls wird dabei im allgemeinen als eine um so grössere erscheinen, je inniger derselbe sich an die Wortsprache anschmiegt; wenigstens soll er von den Gepflogenheiten der letzteren nicht ohne Not, nicht ohne triftige, durch greifbaren Vorteil sich rechtfertigende Gründe*) abweichen.

Ich werde nun durch ein paar Beispiele den Nachweis liefern, dass die Wortsprache unsre *identische Addition* nicht nur zulässt, sondern allerorten ganz ungenirt und *wesentlich* von derselben Gebrauch macht — in der Wissenschaft natürlich nicht weniger wie im gemeinen Leben (doch genügt es schon, aus letzterm nur die Beispiele herauszugreifen**)). Es erscheint schon deshalb nicht ratsam, jene Addition aus unsrer Disziplin der Algebra der Logik auszuschliessen. Überdies werden wir aber sehen, dass die Wortsprache auch *wohl daran thut*, dieselbe zu verwenden.

β) Exempel. Die geographische Gesellschaft einer Universitätsstadt veranstaltete im Saale der Museumsgesellschaft einen öffentlichen Vortrag, und schrieb in dessen Ankündigung im Tageblatt aus, dass *Studenten sowie Museumsmitglieder* freien Eintritt hätten.

Es gab aber viele Studenten, die zugleich Mitglieder der Museumsgesellschaft waren.

Sagen wir für „Studenten" a, für „Museumsmitglieder" b, so war also die Klasse der durch freien Eintritt bevorzugten Personen in der Ankündigung als „Studenten und Museumsmitglieder", mithin als $a + b$ bezeichnet.

Es ist augenscheinlich, dass die Klasse $a \cdot b$ der den beiden Kategorieen gemeinschaftlich angehörenden Individuen auf diese Weise zweimal aufgezählt wurde, und hätte im Sinne des Herrn Venn kor-

*) Rücksicht auf das Gebot der Konsequenz und Streben nach Allgemeinheit, Sparsamkeit, gehören zu den vornehmsten solchen.

**) Auf Beispiele aus verschiedenen Wissenschaften verzichten wir, da solche, um gemeinverständlich zu werden, in der Regel längere Vorbetrachtungen erheischen.

rekter das Inserat besagen müssen, dass „für die Studenten und *diejenigen* Mitglieder der Museumsgesellschaft, *welche keine Studenten sind*“ der Eintritt frei sei — entsprechend $a + a_1 b$.

Die Ankündigung wurde wohlweislich *nicht* so stilisirt, schon weil sie dann um die Inseratkosten für die gespaltene Petit-Zeile, welche die hier kursiv gedruckten Worte erfordert haben würden, teurer zu stehen gekommen wäre!

γ) Anderes Exempel. Ein Armeebefehl gibt bekannt, dass während des Waffenstillstandes aus einer von den deutschen Truppen umzingelten Festung folgende Kategorieen von Personen herauszulassen seien:

a — Personen weiblichen Geschlechts
b — Kinder
c — greise und altersschwache Personen
d — Verwundete
e — Kranke und
f — Angehörige deutscher Nation.

Hiermit ist die Klasse der herauszulassenden Personen schlechtweg gekennzeichnet als die identische Summe:

A) $$a + b + c + d + e + f.$$

Dies ist in der That der kürzeste Ausdruck für diese Klasse, welcher möglich erscheint, obgleich, oder vielmehr gerade weil man sich dabei nicht scheut, es nicht ängstlich umgeht, verschiedene Klassen von Personen implicite, d. h. in verhüllter Gestalt, unter anderm Namen, *wiederholt aufzuzählen*. Z. B. die deutschen Kinder sind unter b mit aufgezählt als Kinder und unter f nochmals als Deutsche, etc.

Will man niemals andere Klassen zusammenfassen als solche, die einander ausschliessen, so ist man genötigt — falls wir etwa die obige Reihenfolge beibehalten wollen — den folgenden Ausdruck in Worten darzustellen:

B) $$a + ba_1 + ca_1b_1 + da_1b_1c_1 + ea_1b_1c_1d_1 + fa_1b_1c_1d_1e_1.$$

Um zu *beweisen*, dass dieser in der That dem vorigen identisch gleich ist, scheide man erst den Faktor a_1 bei den fünf letzten Gliedern aus, wodurch entsteht:

$$a + a_1(b + cb_1 + db_1c_1 + eb_1c_1d_1 + fb_1c_1d_1e_1)$$

und ersichtlich wird, dass nach Th. 33_+) Zusatz dieser ausgeschiedene Faktor a_1 unterdrückt werden darf. Thut man dies und scheidet bei den vier letzten Gliedern der entstehenden Summe sogleich den Faktor b_1 aus:

$$a + b + b_1(c + dc_1 + ec_1d_1 + fc_1d_1e_1)$$

so darf auch dieser unterdrückt werden, und so fort.

Ebenso wie wir eben B) in A) transformirten, kann man auch umgekehrt den Ausdruck A) in den B) überführen, indem man — die Glieder des A) von rechts nach links durchgehend — successive von der Erlaubniss Gebrauch macht, ein jedes Glied mit der Negation des ihm vorangehenden zu multipliziren.

Das gäbe nun die folgende Aufzählung: Frauen oder Mädchen, dazu die Kinder männlichen Geschlechts (Knaben), sodann die greisen Personen, welche männlichen Geschlechts „und keine Kinder" sind (Greise), sodann die Verwundeten, welche nicht weiblichen Geschlechts, auch keine Kinder und keine Greise sind, weiter die Kranken, welche nicht weiblichen Geschlechts, keine Kinder, keine Greise und unverwundet sind, endlich die Deutschen, welche nicht weiblichen Geschlechts, keine Kinder, keine Greise, unverwundet und gesund sind.

Nun lässt sich der Ausdruck ja allerdings noch in etwas vereinfachen. Indem nämlich hier $bc = 0$ ist, d. h. es keine Kinder gibt, die Greise sind, muss:

$$cb_1 = b_1c + 0 = b_1c + bc = (b + b_1)c = 1 \cdot c = c$$

sein; es lässt sich also der Faktor b_1 bei c unterdrücken, oder ist der Zusatz „welche keine Kinder sind" bei den „Greisen" — wie man ja wol augenblicklich gesehen hat — überflüssig.

Welcher Befehlshabende würde gleichwohl sich einer solchen Pedanterie schuldig machen, wie sie auch der so vereinfachten letzten Aussage noch anhaftet?! —

Man bemerke noch die Unsymmetrie des letzten Ausdruckes (B), die Abhängigkeit seines Baues von der gewählten Reihenfolge der Glieder. Nähme man die Glieder von A) in der umgekehrten Folge, z. B., so hätte man, um nichts schon Aufgezähltes zu wiederholen, nunmehr zu sagen:

C) $$f + ef_1 + de_1f_1 + cd_1e_1f_1 + bc_1d_1e_1f_1 + ab_1c_1d_1e_1f_1.$$

Und wollte man neben Erfüllung der Boole-Venn'schen Anforderung gar noch die Symmetrie des Ausdrucks bezüglich aller sechs Terme von A) wahren — so, wie es Th. 33_+) bezüglich der zwei ersten ermöglicht — so wären nicht weniger als dreiundsechzig Glieder anzusetzen, deren jedes aus sechs Faktoren a oder a_1, b oder b_1, etc. bis f oder f_1 bestünde, wie aus späteren Untersuchungen erhellen wird.

δ) Die vorstehenden Beispiele liefern Belege für eine sehr bemerkenswerte Thatsache:

Etwas schon einmal Gesagtes zu *wiederholen* scheint auf den ersten Blick eine Verschwendung zu sein an Zeit und Worten.

Die Beispiele thun aber dar, dass es sehr viel umständlicher wird, den Wiederholungen konsequent aus dem Wege zu gehen, als sie sich gelegentlich zu gestatten; sie zeigen, *dass nur durch solche scheinbare*

Verschwendung die grösste Sparsamkeit an zur Beschreibung einer Klasse benötigten *Worten oder Zeichen sich erzielen lässt*, und bewahrheiten so auf dem Gebiete des Haushalts mit Worten, auf dem Felde der „Terminologie“, einen Satz, dem auch auf andern wirtschaftlichen Gebieten (so namentlich bei den Beratungen des Staatshaushalts seitens der Volksvertreter) eine allgemeinere Berücksichtigung zu wünschen wäre: dass die anscheinend allerengste Sparsamkeit oft auf die ärgste Verschwendung notwendig hinausläuft.

Als Vorteile, welche durch den Gebrauch der (Jevons'schen) einschliessenden oder tautologisirenden Addition (gegenüber der ausschliessenden Boole-Venn's) zu erzielen sind, somit denselben rechtfertigen, lassen sich namhaft machen:

1°) Der direkte *Anschluss an die Wortsprache* und demgemäss leichteste Übertragbarkeit aus Worten in Formeln, und umgekehrt.

2°) *Verwirklichung des denkbar kürzesten* (Wort- sowie Formel-) *Ausdrucks* für die aus gegebenen sich zusammensetzenden Klassen — und in Verbindung damit gleichwol

3°) *Wahrung der Symmetrie* der Ausdrücke (in Hinsicht auf die als Elemente der Zusammensetzung gegebenen Klassen).

4°) *Bedingungslose Ausführbarkeit der Addition;* der Allgemeinheit dieser Operation kommt es zu statten, wenn bei der Herstellung von Summen aus Klassen der Fall einer Gleichheit solcher nicht ausgeschlossen wird. Demzufolge auch

5°) *Grössere Freiheit* der Rechnungsoperationen und Transformationsmethoden, m. a. W. reichere Mannigfaltigkeit der zur Verfügung stehenden Formen von Ausdrücken oder Darstellungen von Klassen, somit auch der Lösungsmittel bei Aufgaben.

6°) *Geltung des Dualismus,* zufolge dessen die ganze Disziplin sich übersichtlich und symmetrisch gestaltete, sodass es möglich wurde, aus nahe der einen Hälfte der Sätze fast die ganze andre Hälfte abzuschreiben — eine Harmonie, die aber schwinden würde, falls wir die Grundoperation der einen Spalte preisgäben.

Der einzige Einwand, der gegen jene Addition sich erheben lässt und auch erhoben wurde*), ist der Vorwurf der Tautologie: dass man

*) Von den Vorzügen, welche Herr Venn seiner exklusiven Addition vindizirt, erscheint mir der erste: der einer grösseren Annäherung an die arithmetische Zeichensprache, als ein zweifelhafter. Wenn reduzirte Summen zur Anwendung auf gewisse arithmetische Probleme — wie z. B. zur unmittelbaren Umdeutung in Probabilitäten der entsprechenden Ereignisse bei Aufgaben der Wahrscheinlichkeitsrechnung — sich in der That nicht nur besser qualifiziren sondern gar allein

dabei sich schuldig mache, schon einmal Gesagtes (zumeist doch nur in verhüllter Gestalt) nochmals zu sagen, zu wiederholen.

Dieses ist nun aber an sich etwas ganz Harmloses, und kann uns das Ärgerniss, welches an Tautologien, wenn sie etwa wie bei Th. 14) unverhüllt auftreten, welches an den „nackten" Pleonasmen zu nehmen ist, nicht bewegen, auf alle oben aufgezählten Vorteile zu verzichten — um so weniger, als ja ohnehin bei allgemeinen Festsetzungen fast immer gewisse Grenzfälle mit eingeschlossen werden, mit unterlaufen, im Hinblick auf welche *allein* man die Festsetzungen sicher nicht getroffen haben würde. —

Jevons[1] p. 76 sq. führt als Beleg dafür, dass das „oder" — eventuell „und", vergl. § 8, η, ϑ) — faktisch nicht im ausschliessenden Sinne gebraucht wird, den Satz an: Ein (englischer) „peer" ist entweder ein Herzog (duke), oder ein Graf (earl) oder ein Marquis oder ein „viscount" oder ein Baron, und macht darauf aufmerksam, dass viele peers zwei oder mehr von diesen Titeln besitzen, z. B. der Prince of Wales zugleich Duke of Cornwall, Earl of Chester, Baron Renfrew etc. ist. Auf p. 77 citirt er Stellen aus Shakespeare, Milton, Tennyson und Darwin's „Origin of species" (denen leicht aus deutschen Klassikern ähnliche gegenüberzustellen wären) um die gleiche Thatsache zu stützen, und resumirt mit Recht, dass die Bedeutungen der durch die Konjunktionen „und" sowie „oder" verknüpften Terme *von der absoluten Identität bis zum absoluten Gegensatze* schwanken.

ε) Als nächste Anwendung unsres Kalkuls sei eine kleine Studie ausgeführt über *unzulängliche Präzision* und *Missverständlichkeit* verbaler Ausdrücke, welche mit den Partikeln *„und"*, *„oder"* und *„nicht"* aufgebaut werden und die *Beschreibung von Klassen* bezwecken, welche sich aus andern als bekannt vorausgesetzten Klassen ableiten.

---

und ausschliesslich eignen, so begegnen wir dem dadurch, dass wir *in solchem Bedarfsfalle* eben auch unsre Summen mit Leichtigkeit in reduzirte umwandeln, und ist solcher Umstand kein Grund für uns, uns auch sonst stets mit solchen zu placken. [Über die vorgehaltene Anstössigkeit der Gleichung $1 + 1 = 1$ glaube ich mit Stillschweigen hinweggehen zu dürfen.] Was aber die von Venn viertens als Hauptgrund angeführte angebliche Thatsache betrifft, dass die schönen Entwickelungs- und Eliminationsschemata von Boole beim Aufgeben seiner Addition nicht mehr anwendbar sein würden („so far as has yet been schown"), so ist derselbe wol gänzlich hinfällig und beruht — wie schon Herr Bruce Halsted[2] p. 212 angedeutet zu haben scheint — auf einer Verkennung des Umstandes, dass jene Schemata oder „generalizations" durch die in meinem Operationskreis[2] dargelegten Methoden nicht nur aufrecht erhalten sondern noch einfacher und eleganter gestaltet werden — einfacher namentlich schon durch die völlige Entbehrlichmachung aller subtraktiven und divisiven Operationen. Vergleiche auch Frau Ladd Franklin[2] p. 559 sq. —

Auf die Mehrsinnigkeit des Bindewortes „oder" wurde schon in § 8 unter ζ, η, ϑ) aufmerksam gemacht.

Was *a oder b* ist, im inklusiven Sinne verstanden als *„a oder auch b"*, entsprach nach dortigen Auseinandersetzungen der identischen Summe:

$$a + b, \quad \text{welche} \quad = ab_1 + ab + a_1 b \quad \text{ist,}$$

d. h. bedeutet, was entweder a und nicht b, oder b und nicht a, oder endlich a und b zugleich ist.

Was a oder b ist, im *exklusiven* Sinne verstanden als *„a oder aber b"*, vergl. § 8, η), wird nunmehr darzustellen sein mit:

$$ab_1 + a_1 b,$$

d. h. entweder a, und dann nicht b, oder aber b, und dann nicht a.

Für zwei Kreise a und b wird dieses Gebiet durch die in nebenstehender Figur schraffirte Fläche veranschaulicht.

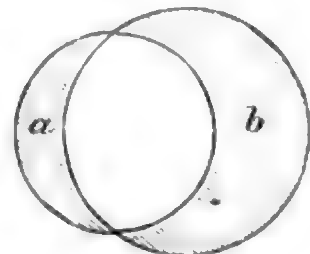


Fig. 18.

Die beiden Ausdrücke differiren um das Glied ab, fallen also mit ihren Bedeutungen zusammen, sooft $ab = 0$ ist.

Wir haben dies bereits l. c. durch das Beispiel „Gold oder Silber" erläutert, resp. exemplifizirt. Dagegen bedeutet „Grundbesitzer oder aber Adelige" etwas ganz anderes als „Grundbesitzer oder auch Adelige". Jenes nämlich fasst blos die bürgerlichen Grundbesitzer mit den nicht grundbesitzenden Adeligen in eine Klasse zusammen unter Ausschluss der adeligen Grundbesitzer. Dieses dagegen unter Einschluss der letzteren.

Beiderlei „oder" erscheinen als *symmetrisch* in Bezug auf die Glieder der Alternative. „a oder auch b" sagt dasselbe wie „b oder auch a" nach dem Kommutationsgesetze $12_\times$).

Ebenso ist aber auch „a oder aber b" einerlei mit „b oder aber a", da, wie leicht zu sehen,

$$ab_1 + a_1 b = ba_1 + b_1 a$$

sein muss.

Hier möchten wir noch die Frage einschalten, ob es nicht vielleicht ein unsymmetrisches „oder" gibt in dem Sinne, dass „a oder b" bedeutet: entweder a und dann nicht b, oder aber b und dann vielleicht doch auch a zugleich?

Die Frage ist offenbar zu verneinen. Der Ausdruck ist ganz *unklar*, sofern er in seinem ersten Teil etwas verbietet, was er in seinem zweiten Teile ausdrücklich erlaubt.

Hier kann man entweder — in Analogie mit dem in der Gesetzgebung maassgebenden Usus — den Grundsatz anerkennen, dass, was etwa in *einem* Gesetzesparagraphen als erlaubt (nicht verboten) erscheint, in einem andern aber verboten wird, *verboten* sei, den Grundsatz also: Wenn Erlaub-

niss und Verbot zusammentreffen, so gilt das Verbot. Darnach hätten wir

$$ab_1 + ba_1 + bab_1 = ab_1 + a_1 b$$

als Sinn des obigen Ausdrucks, entsprechend dem exklusiven „oder aber" — da das b, welches zugleich auch a ist, dem ersten Teil zufolge auch nicht b sein muss, also mit dem Faktor bb_1, $= 0$, behaftet sein und wegfallen wird.

Oder man könnte auch den Grundsatz einhalten, sobald in Bezug auf das Nämliche eine Erlaubniss *und* ein Verbot ausgesprochen werden, immer das *zuletzt* Gesagte gelten zu lassen, ein ergangenes Verbot also durch eine darauf folgende ausdrückliche Erlaubniss als aufgehoben zu betrachten — was allerdings nicht im Einklang mit dem Prinzip I des Aussagenkalkuls stehen wird. In diesem Falle würde unser Ausdruck bedeuten:

$$ab_1 + b + ab = a + b;$$

jenes „oder" deckte sich dann also mit „oder auch".

In beiden Fällen hätten wir kein neues „oder", sondern nur eines der beiden früheren in weitläufigerer Formulirung.

Sofern es nicht aus dem oben genannten Grunde ohnehin gleichgültig, irrelevant ist, werden wir wie bisher, so auch fortgesetzt *hier*, wenn nicht ausdrücklich „oder aber" gesagt wird, unter der schlechtweg gesetzten Partikel *„oder"* immer das einschliessende „oder auch" verstehen.

ζ) Nach unsern Festsetzungen sind nun die Ausdrücke:

„nicht-a" „was a und b ist", sowie, „was a oder b ist"

von einer ganz bestimmten Bedeutung; sie können nur auf *eine* Weise verstanden werden als a_1, ab, resp. $a + b$, und erscheinen Missverständnisse hiebei ausgeschlossen.

Ebenso sind:

„Was a und nicht b ist" als ab_1,

„Was a oder nicht b ist" als $a + b_1$

völlig unzweideutige Ausdrücke.

Doppelsinnig dagegen erscheinen schon die Ausdrücke:

„Was nicht a und b ist", „Was nicht a oder b ist".

Den erstern z. B. kann man einerseits verstehen als:

„Was nicht a, und zugleich b, ist"

d. h. als $a_1 b$, andrerseits als:

„Was nicht a und b zugleich ist",

d. h. als

$$(ab)_1 = a_1 + b_1 = a_1 b + b_1 = a_1 b + ab_1 + a_1 b_1 \quad \text{nach Th. } 33_+)$$

— woraus zu ersehen, um was sich die Bedeutung des Ausdrucks von der des vorigen unterscheidet.

Ebenso kann der zweite verstanden werden als:

„Was »nicht a« oder b ist“, d. h. $a_1 + b = a_1 b_1 + ab + ab_1$,
oder aber als:

„Was nicht »a oder b« ist, d. h. $(a+b)_1 = a_1 b_1$.

Im Interesse der Deutlichkeit empfiehlt sich hiernach die Maxime: bei konjunktiver Häufung von Attributen oder Prädikaten die bejahten den verneinten womöglich vorangehen zu lassen.

Man wird hier wiederum bestätigt finden, dass die Mehrsinnigkeit und die damit gegebene Möglichkeit von Missverständnissen, ja, gelegentlich die Verleitung zu solchen, daher rührt, dass die Wortsprache des *Instituts der Klammern* entbehrt. Hiefür noch ein Beispiel:

„Was a und b oder c ist“

kann verstanden werden als:

„Was »a und b« oder c ist“,

d. i. als

$$ab + c = (ab) + c$$

oder auch in dem wesentlich davon verschiedenen Sinne:

„Was a und »b oder c« ist“,

d. i. als

$$a(b + c).$$

Letzterer Ausdruck wird nun vollständig bekanntlich gelesen als: „a (mal) Klammer b plus c geschlossen“, und so könnte man — scheint es — auch im Texte Doppelsinnigkeiten vermeiden, wenn man daselbst die Worte ... „Klammer“ ... „Geschlossen“ ... an geeigneter Stelle einfügte. Mindestens würden aber hiefür die ... *Anführungszeichen* » und ... *Schlusszeichen* « ... den Vorzug verdienen, da wie schon einmal erwähnt, im Worttext die Einklammerung schon anderweitig beschlagnahmt ist.

In Druck und Schrift dürfte der Gebrauch dieser Zeichen, zu denen wir auch gelegentlich greifen, in der That der beste Behelf sein wo immer es auf genaueste Unterscheidung ankommt und Missverständnisse sich nicht durch den Stil, Wahl geeigneter Redewendungen schon völlig ausschliessen lassen.

Zu so verzweifeltem Auskunftsmittel, jene Zeichen, wie angegeben, ausdrücklich zu lesen, greift die Sprache jedoch im *gesprochenen* Texte nicht; vielmehr verhält sie sich diesen Zeichen gegenüber gerade wie bei den Interpunktionszeichen und bestrebt sich ihrem Mangel abzuhelfen und dasjenige was die Zeichen uns auszudrücken bestimmt sind, darzustellen durch den Tonfall und Rhythmus der Rede, Anbringung geeigneter Pausen und nachdrückliche Betonung einzelner Redeteile, Emphase. Auch beim Lesen von Formeln werden ja die Klammern nicht immer gesprochen, sondern zumeist in ähnlicher Weise angedeutet — woraus allerdings, beim Diktiren z. B., bekannte Schwierigkeiten entspringen.

Immerhin besitzt die Zeichensprache des Kalkuls zufolge ihrer korrekten Handhabung der Klammern einen merklichen Vorsprung vor der Wortsprache, der sich besonders bei subtileren und verwickelten Untersuchungen geltend macht.

Wie schon beim Beschreiben von Klassen, so macht sich auch in irgend welchen andern Beziehungen der beklagte Mangel und gerügte Nichtgebrauch von die Klammern zu vertreten fähigen sprachlichen Gebilden sehr häufig fühlbar.

Als Beispiel dadurch herbeigeführter Unbestimmtheit führt Jevons u. a. den Satz an: Er fuhr ˛von Dover nach London und 'von London nach Brighton¸ mit dem Schnellzuge'. Zufolge der (Un-)Sitte, das Zeitwort ganz an's Ende zu stellen, entstehen im Deutschen leider solche Unklarheiten ganz besonders leicht, wie es beispielsweise die Zeitungsnotiz erkennen lässt: An der deutschfranzösischen Grenze wird viel über ˛Wilddiebereien 'von französischer Seite¸ geklagt' — derengleichen aber unschwer auch von den bessern Schriftstellern in unbegrenzter Fülle beizubringen wären.

In der begonnenen Aufzählung missverständlicher Ausdrücke der Wortsprache wollen wir nicht nach Vollständigkeit streben, sondern begnügen uns mit noch ein paar Beispielen.

η) Aufgabe. Auf wieviele Arten kann der Ausdruck: „Was a und b oder c und d ist“ verstanden, beziehungsweise missverstanden werden?

Auflösung. Verstanden auf vier, somit missverstanden auf drei Arten.

Sind nämlich vier Terme durch irgendwelche Operationen zu verknüpfen, was wir dadurch andeuten wollen, dass wir die Terme $abcd$ *ohne* Knüpfungszeichen nebeneinander setzen, so können Klammern auf folgende fünf Arten gesetzt werden, um die Knüpfungen auf lauter „binäre“ (d. h. immer nur zwei Elemente auf einmal verbindende) zurückzuführen:

$$\{(ab)\,c\}\,d, \quad \{a\,(bc)\}\,d, \quad (ab)\,(cd), \quad a\,\{(bc)\,d\}, \quad a\,\{b\,(cd)\}.$$

Unser obiger Ausdruck lautet nun:

$$a \cdot b + c \cdot d$$

und lässt folglich fünf Deutungen zu, von denen aber die zweite und vierte dasselbe Resultat liefern, indem nach Th. $13_\times$) etc.:

$$\{a\,(b+c)\}\,d = a\,\{(b+c)\,d\} = a\,(b+c)\,d = abd + acd$$

sein muss, wogegen dieses Resultat von den drei andern Deutungen:

$$\{(ab) + c\}\,d = (ab + c)\,d = abd + cd, \quad a\,\{b + (cd)\} = a(b + cd) = ab + acd$$

und

$$(ab) + (cd) = ab + cd$$

verschieden ist, gleichwie auch diese unter sich es sind im Allgemeinen.

ϑ) Aufgabe. Wie unterscheidet sich der Ausdruck: „folgsame (a) fleissige (b) Kinder (c)" von dem Ausdruck: „folgsame Kinder und fleissige Kinder".

Auflösung. Der erstere ist abc, der letztere

$$ac + bc = (a + b)\,c \quad \text{also} \quad abc + ab_1c + a_1bc,$$

d. h. er umfasst ausser dem erstern auch noch die Kinder, welche folgsam aber nicht fleissig und diejenigen, welche fleissig aber nicht folgsam sind.

Sagt man nun: „folgsame und fleissige Kinder", so erscheint es ganz in subjektives Belieben gestellt, ob man den erstern Ausdruck darunter verstehen will, oder den letztern — vergl. § 8, ξ).

Es geben, denke ich, die vorstehenden Betrachtungen kein allzu glänzendes Bild von der Qualifikation der Wortsprache zur exakten Darstellung und Einkleidung von Untersuchungen über Klassen, und sie lassen wol auch erkennen, dass das Heil nicht etwa zu erwarten ist von Bestrebungen, die — wie das „Volapük" — blos die unregelmässigen Formen, z. B. der Deklinationen und Konjugationen, abschaffen.

ι) Nunmehr Betrachtungen von einer andern Tendenz: Die Sätze bisheriger Theorie können gelegentlich verwertet werden um *Ausdrücke zu vereinfachen*, welche Klassen darstellen sollen.

Aufgabe. Wenn gesprochen wird von den gebildeten Reichen, den reichen Adeligen und den adeligen Ungebildeten — wie ist die Beschreibung dieser Klasse von Personen zu vereinfachen?

Auflösung. Man lasse den mittleren Term weg; die Anführung der reichen Adeligen ist zu sparen. Denn:

$$\text{Sei} \quad a = \text{gebildet}, \quad b = \text{reich}, \quad c = \text{adelig},$$

so ist:

$$ab + bc + ca_1$$

die gegebene Klasse, und für bc kann gesetzt werden:

$$1 \cdot bc = (a + a_1)\,bc = abc + a_1bc;$$

alsdann aber wird in dem Ausdrucke:

$$ab + abc + a_1bc + a_1c$$

das zweite Glied vom ersten, das dritte vom letzten nach Th. 23_+) absorbirt, und entsteht:

$$ab + a_1c.$$

In Worten kann man überlegen: Die reichen Adeligen sind entweder gebildet oder ungebildet. Im erstern Falle sind sie unter den gebildeten Reichen, im letztern unter den adeligen Ungebildeten ohnehin erwähnt, und folglich ist es durchaus überflüssig, sie noch besonders zu erwähnen.

Man sieht, wie hier die Rechnung zwar für den in ihr noch Ungeübten vielleicht nicht bequemer ist, als die Überlegung in Worten, wie sie aber die Operationen dieses verbalen oder mentalen Räsonnements Schritt für Schritt wiederspiegelt und dieselben in knappster Form zum Ausdruck und Bewusstsein bringt.

Beiläufig haben wir vorstehend einen Satz gewonnen. Denselben spricht die Formel aus:

Theorem ι) $$ab + bc + ca_1 = ab + ca_1,$$
welche leicht zu merken und in der Technik des Kalkuls von ziemlicher Anwendbarkeit ist.

$\varkappa$) Der Satz ist übrigens nahe verwandt, wenn man will nur eine kleine Umformung, eines schon von Herrn Peirce aufgestellten Theorems, nämlich des folgenden: *Es gilt stets:*

Theorem $\varkappa$) $$(a + x)(b + x_1) = ax_1 + bx.$$
Durch Ausmultipliziren der linken Seite lässt sich nämlich erhalten:
$$xb + ba + ax_1,$$
wonach der Satz ersichtlich auf den ι) zurückkommt. In der ihr von Peirce gegebenen Form ist die Gleichung dadurch bemerkenswert, dass die eine Seite derselben als das duale Gegenstück der andern (und umgekehrt) erscheinen *würde*, wenn nicht das Symbol x zugleich mit seiner Negation x_1 tauschte. Es wäre darnach nicht korrekt, die Formel $\varkappa$) selber eine „zu sich selbst duale“ zu nennen, wohl aber darf man von dem durch sie ausgedrückten allgemeinen Satze sagen, dass er sich selbst dual entspreche. Denn das duale Gegenstück von $\varkappa$), welches lautet: $ax + bx_1 = (a + x_1)(b + x)$,
wird den nämlichen Satz ausdrücken, da man in letzterer Gleichung unter x auch dasjenige Gebiet verstehen kann, welches in $\varkappa$) mit x_1 bezeichnet wurde.

λ) Aufgabe. Auf einer strategischen Bahnlinie findet sich für eine gewisse Zeit der Transport verboten von allen Gütern ausser solchen, welche Kriegszwecken dienen können, wenn sie explosiv oder

nicht für die Montanindustrie bestimmt sind, sowie solchen, welche für die Montanindustrie bestimmt sind, wenn sie nicht explosiv sind oder nicht Kriegszwecken dienlich.

Man soll das Transportverbot vereinfachen.

Auflösung. Es bedeute $a =$ Kriegszwecken dienlich, $b =$ explosiv, $c =$ für die Bergbauindustrie bestimmt. So ist nur erlaubt zu transportiren die Klasse der Güter:

$$a(b+c_1)+c(b_1+a_1).$$

Von Th. 33_+), Zusatz, Gebrauch machend kann man hiefür schreiben:

$$a(bc+c_1)+c(b_1a+a_1)=ac(b+b_1)+ac_1+a_1c=ac+ac_1+a_1c=a+c,$$

quod erat inveniendum. Also:

Ausschliesslich *erlaubt* ist der Transport derjenigen Güter, welche Kriegszwecken dienlich, oder für die Montanindustrie bestimmt sind (ganz ohne Rücksicht darauf, ob sie explosiv sind, oder nicht). —

Man kann auch gemäss Th. 36) von dem Ausdruck die Negation nehmen, und findet: $(a_1+b_1c)(c_1+ba)=a_1c_1$ unmittelbar durch Ausmultipliziren. Also ist der Transport *verboten* für Alles, was weder Kriegszwecken dienlich noch auch für die Montanindustrie bestimmt ist. — Die Klasse „explosiv" fiel beidemal ganz heraus; dieselbe kommt wesentlich gar nicht in Betracht. —

μ) Man kann nun auch schon manche Streitfrage rechnerisch entscheiden.

Aufgabe. Ein Chemiker hatte, um weitere Schlüsse darauf zu bauen, gesagt:

„Salze, die nicht farbig sind, sind Salze, die nicht organisch sind, oder organische Körper, die nicht farbig sind."

Ein anderer bestreitet ihm dies. Zu entscheiden, wer Recht hat.

Auflösung. Es bedeute $a =$ Salze, $b =$ organisch, $c =$ farbig. So lautete die Behauptung:

$$ac_1 \subseteq ab_1+bc_1.$$

Nach Th. $38_\times$) ist die vorstehende Subsumtion völlig gleichbedeutend mit der Gleichung:

$$ac_1(ab_1+bc_1)_1=0, \quad \text{oder} \quad ac_1(a_1+b)(b_1+c)=0$$

und da Ausmultipliziren linkerhand diese Gleichung nach Th. $30_\times$) bewahrheitet, so ist auch die Subsumtion richtig, hatte der *Erstere* Recht.

Wie von allen verfügbaren Mitteln, so auch vom Ausmultipliziren kann

geschickt und ungeschickt Gebrauch gemacht werden. Unzweckmässig wäre es, hier erst die beiden Binome auszumultipliziren, wobei von den vier zu bildenden Produkten blos eines, bb_1 fortfiele. Besser gehe man mit dem Faktor a in die erste Klammer und mit dem c_1 in die letzte Klammer hinein, wo dann nur je ein Glied stehen bleiben und sogleich $ab \cdot b_1 c_1$ entstehen wird.

Man kann auch nach Th. 38_+) die Subsumtion umschreiben in die Gleichung:

$$(ac_1)_1 + ab_1 + bc_1 = 1 \quad \text{oder} \quad a_1 + c + ab_1 + bc_1 = 1,$$

welche sich ebenfalls bewahrheitet, indem nach Th. 33_+) Zusatz: $a_1 + ab_1 = a_1 + b_1$, desgleichen $c + bc_1 = c + b$, hernach aber $b_1 + b = 1$ und die ganze Summe: $1 + a_1 + c = 1$ nach Th. 22_+) sein wird.

Endlich könnte man die rechte Seite der fraglichen Subsumtion umformen in:

$$ab_1(c + c_1) + (a + a_1)bc_1 = ab_1c + ac_1(b_1 + b) + a_1bc_1 = ac_1 + (ab_1c + a_1bc_1).$$

Nach Th. 6_+) ist nun ein Summand — hier ac_1 — jederzeit in der Summe enthalten. —

ν) So unvollständig unser bis jetzt gesichertes wissenschaftliches Kapital noch ist (wie aus der Fortsetzung der Theorie erhellen wird), so vermag man doch mit demselben schon unbeschränkt neue Sätze aufzustellen, deren oft recht interessante zu entdecken, entdeckte zu beweisen. Wir begnügen uns mit ein paar Beispielen.

Theorem ν) (von Peirce). *Wenn*

$$ab \in c + d$$

ist, so muss auch:

$$ac_1 \in b_1 + d$$

sein [und desgleichen, mit demselben Rechte:

$$ad_1 \in b_1 + c, \qquad bc_1 \in a_1 + d, \qquad bd_1 \in a_1 + c, \qquad c_1d_1 \in a_1 + b_1,$$

sodass von allen sechs Subsumtionen eine jede die fünf übrigen nach sich zieht, mit jeder andern äquivalent ist]. *Es kann hienach ein Faktor des Subjekts mit einem Summanden des Prädikats vertauscht werden, sofern man nur beide in ihre Negationen umwandelt.*

Der Beweis des Theorems wird am einfachsten dadurch geleistet, dass man nach Th. $38_\times$) die Subsumtionen in Gleichungen umschreibt, wodurch die vorausgesetzte in $ab(c+d)_1 = 0$ oder wegen 36_+) in $abc_1d_1 = 0$, die behauptete in $ac_1(b_1 + d)_1 = 0$, das ist $ac_1bd_1 = 0$ übergeht, sonach die beiden ganz das nämliche besagen.

[Nun darf man in der Voraussetzung unbeschadet ihrer Gültigkeit

a mit b sowie auch c mit d vertauschen, und muss hiebei auch die Behauptung gültig bleiben. Thut man dies einzeln oder gleichzeitig, so erhält man aus der letztern sofort auch noch die drei folgenden von den behaupteten Subsumtionen, und geht die allerletzte dann nach dem Theorem selbst aus der vorletzten hervor, wenn man in ihr die Terme b und c vorschriftsmässig auf die andre Seite des Subsumtionszeichens wirft. Zum Überfluss folgt die eine Hälfte der sechs Subsumtionen auch aus der andern und so die letzte aus der ersten durch beiderseitiges Negiren gemäss Th. 37) und 36).]

ξ) Exempel hiezu. In der Mannigfaltigkeit 1 der (ebenen) Kurven bedeute a die Klasse der *Kegelschnitte*, b die Klasse derjenigen *Kurven, welche einen „Mittelpunkt" haben*, c die Klasse der *Ellipsen* (mit Einschluss des Kreises) und d die Klasse der *Hyperbeln* (mit Einschluss des Geradenpaars, nämlich Paares *einander schneidender* Geraden), so ist die vorausgesetzte Subsumtion erfüllt, nämlich:

Kegelschnitte, welche einen Mittelpunkt haben, sind Ellipsen oder Hyperbeln.

Nach dem Theoreme folgt daraus: Kegelschnitte, welche nicht Ellipsen sind, müssen Hyperbeln sein oder (Kurven, die) keinen Mittelpunkt haben. Etc. etc.

Anmerkung. Das gegebene Beispiel kann benutzt werden um darzuthun, dass es nicht gestattet ist, die Subsumtionszeichen in dem Satze ν) durch Gleichheitszeichen zu ersetzen. Denn die vorausgesetzte Subsumtion gilt hier sogar als *Gleichung* (indem die Ellipsen nebst den Hyperbeln auch die Kegelschnitte sind, die einen Mittelpunkt haben), die gefolgerte Subsumtion aber nicht:

Kurven, die keinen Mittelpunkt haben (oder aber, resp.), sowie Hyperbeln, brauchen nicht Kegelschnitte zu sein, die nicht Ellipsen sind — sie brauchen nämlich überhaupt nicht Kegelschnitte zu sein.

o) Herr Peirce erblickt im obigen Satze ν) das wahre Wesen, die „Essenz" der Negation — was insofern begründet erscheint, als derselbe die hochwichtigen Theoreme 41) in sich vereinigt. Diese fliessen aus ihm, indem man $c = 0$ resp. $b = 1$ annimmt.

Man konnte auch umgekehrt das Th. ν) ganz unmittelbar auf die beiden einfacheren Theoreme 41) zurückführen.

Anstatt aus diesen setzt Peirce[5] p. 35, sein Theorem aus folgenden beiden Sätzen zusammen (*wie?* ist mir nicht recht ersichtlich):

Theorem $o_{\times}$). *Wenn*	Theorem o_{+}). *Wenn*
$ab \neq\!\!\!\in c$	$a \neq\!\!\!\in b + c$

so ist: $ac_1 \neq\!\!\!\in b_1$ | *so ist:* $b_1 \neq\!\!\!\in c + a_1$

sowie umgekehrt — deren Beweis und Deutung dem Leser überlassen sei.

π) Theorem (von Jevons[1] p. 61). *Von den sechs Gleichungen:*

$$a = bc_1 + b_1c, \qquad a_1 = bc + b_1c_1$$
$$b = ca_1 + c_1a, \qquad b_1 = ca + c_1a_1$$
$$c = ab_1 + a_1b, \qquad c_1 = ab + a_1b_1$$

hat jede die fünf übrigen zur Folge; dieselben sind alle sechse einander äquivalent.

Aufgabe: das Theorem zu beweisen.

Auflösung. Durch beiderseitiges Negiren nach Th. 32) und 36) gehen die beiden Gleichungen einer jeden Zeile in einander über. Es handelt sich also nur noch darum, die untereinander stehenden links auf einander zurückzuführen.

Dies kann geschehen, indem man die beiden ersten Gleichungen mit c_1 resp. c beiderseits multiplizirt und die Ergebnisse $ac_1 = bc_1$, $a_1c = bc$ überschiebend addirt. Etc.

Am besten bringt man gemäss Th. 39_+) die erste dieser Gleichungen rechterhand auf Null. Dieselbe erweist darnach sich äquivalent mit

$$a(bc_1 + b_1c)_1 + a_1(bc_1 + b_1c) = 0$$

oder, wegen

$$(bc_1 + b_1c)_1 = bc + b_1c_1,$$

mit:

$$abc + ab_1c_1 + bc_1a_1 + ca_1b_1 = 0.$$

Hieraus ist aber zu ersehen, dass der vorausgesetzte Zusammenhang zwischen den Symbolen a, b, c in Bezug auf diese symmetrisch ist, durch Vertauschung derselben nicht verändert wird. Man mag demnach z. B. die Buchstaben a, b, c „cyklisch" — im Ringe herum — vertauschen, d. h. a durch b, daneben b durch c und c durch a ersetzen; dadurch wird man aus jener ersten Formel die dritte und aus dieser die fünfte erhalten.

Das behufs Beweises vorstehend eingeschlagene Verfahren und die daran geknüpfte Wahrnehmung mochte ungezwungen zur Entdeckung des Satzes geführt haben.

Man verifizire den Satz auch durch die Anschauung an der Fig. 18 (S. 371), indem man das dort schraffirte Gebiet mit c bezeichnet.

In Worten kann man sagen: *Wenn a bedeutet „b oder aber c", so muss auch b einerlei sein mit „a oder aber c", und c mit „a oder aber b".*

Exempel zu dem Satze. Es möge a die Klasse der gesetzlich

erlaubten, b diejenige der moralischen Handlungen vorstellen (welche beiden Sphären einander bekanntlich nicht durchaus decken). Alsdann sind die Handlungen ab unbedingt zu billigen oder wenigstens nicht zu beanstanden (es sei denn unter Gesichtspunkten, wie der Klugheit, Zweckmässigkeit, u. a. auf die wir hier keine Rücksicht nehmen wollen), die Handlungen $a_1 b_1$ sind unbedingt zu verwerfen; dagegen können wir die Handlungen der Klasse $ab_1 + a_1 b$ $(= c)$, welche nur gesetzlich oder nur moralisch, aber nicht beides zugleich sind, für den Augenblick — nur um etwa einen kurzen Namen für die Klasse zu haben — „strittige" oder „fragwürdige" nennen, sofern sie von dem Interpreten des Gesetzes eine andere Beurteilung zu erfahren haben als wie vom Standpunkte der Moral. Noch besser vielleicht wird man sie „Konfliktshandlungen" nennen, weil Derjenige, der sie begeht oder sich vor sie gestellt sieht, sich in Konflikt befindet oder in solchen gerät zwischen seinem eigenen sittlichen Bewusstsein und demjenigen seiner Nation soweit es in der Gesetzgebung zum Ausdruck gelangt ist.

Nach unserm Satze müssen dann auch die gesetzlichen Handlungen entweder moralische oder aber Konfliktshandlungen sein, und umgekehrt. Desgleichen müssen diejenigen Handlungen welche fragwürdig (Konfliktsh.) oder aber gesetzlich sind, moralische sein, und umgekehrt.

Stellt man einen Ausdruck $ab_1 + a_1 b$ symbolisch als eine Knüpfung $a \circ b$ von a mit b dar, so ist diese Knüpfung einerseits, wie erwähnt, eine *kommutative*, es ist $a \circ b = b \circ a$, zugleich ist sie nach Jevons' Satze auch *eindeutig umkehrbar*, und befolgt in Bezug auf ihre Umkehrungen das Gesetz, dass sooft $c = a \circ b$ ist, auch $a = b \circ c$ und $b = c \circ a$ sein muss. Man beweise, dass allgemein auch:

$$(a \circ b) \circ a = b = a \circ (b \circ a)$$

sein wird. Die Knüpfung genügt überhaupt den Gesetzen des in Anhang 5 unter „Beleg 6" angeführten Algorithmus Q_0. —

ϱ) Wir haben gelernt, jede beliebige Subsumtion $a \mathrel{=\!\!\!<} b$ auf verschiedene Arten in *eine* Gleichung umzuwandeln, welche ganz das nämliche sagt — cf. Th. 20) und 38).

Umgekehrt hingegen mochte eine Gleichung $a = b$ nach Def. (1) durch *zwei* als gleichzeitig geltend hingestellte Subsumtionen $a \mathrel{=\!\!\!<} b$ und $b \mathrel{=\!\!\!<} a$ ersetzt werden.

Hier liegt die Frage nahe, ob es nicht auch angängig ist, jede beliebige Gleichung umzuschreiben in *eine einzige* Subsumtion.

Diese Frage beantwortet in bejahendem Sinne — das

Theorem ϱ). *Wenn $a = b$ ist, so muss auch $a + b \subseteq ab$ sein, und umgekehrt,* sodass die Gleichung mit der Subsumtion äquivalent.

In Worten: Wenn alles, was *a oder b* ist, auch *a und b* sein muss, so sind a und b identisch, einerlei — und vice versä.

Dies zu *beweisen* kann als eine leichte Übungsaufgabe für Anfänger empfohlen werden. Doch sei deren Lösung hier angegeben:

Wenn $a = b$ ist, so wird

$$a + b = a + a = a \quad \text{und} \quad ab = aa = a,$$

somit läuft die behauptete Subsumtion hinaus auf die durch das Prinzip I verbürgte $a \subseteq a$. Die Gleichung zog mithin die Subsumtion nach sich.

Ist umgekehrt $a + b \subseteq ab$, so können wir nach Th. 6_+), der Voraussetzung und Th. $6_\times$) den Kettenschluss ausführen:

$$a \subseteq a + b, \quad a + b \subseteq ab, \quad ab \subseteq b, \quad \text{ergo} \quad a \subseteq b,$$

und ebenso zeigt man, was überdies nach der Symmetrie schon folgt, dass auch $b \subseteq a$, womit nach Def. (1) dann die Gleichung $a = b$ bewiesen erscheint. Die Subsumtion hat also auch die Gleichung zur Folge, q. e. d.

Ein anderer Beweis ist ganz mechanisch führbar, indem man Subsumtion wie Gleichung gemäss den Theoremen $38_\times$) und 39) rechterhand auf 0 bringt.

σ) Aufgabe. Man zeige, dass wenn

$$a \subseteq b_1 c_1 \quad \text{und} \quad bc = 0$$

ist, auch

$$b \subseteq c_1 a_1 \quad \text{und} \quad ca = 0$$

sowie

$$c \subseteq a_1 b_1 \quad \text{und} \quad ab = 0$$

sein muss.

Gilt z. B.: ein Fisch ist weder Vogel noch Säugetier, während kein Vogel ein Säugetier ist, so haben wir auch die Folgerungen: ein Vogel ist weder Fisch noch Säugetier, und kein Säugetier ist ein Fisch, sowie: ein Säugetier ist weder Fisch noch Vogel, desgleichen kein Fisch ein Vogel.

τ) Ebenso zeige man, dass wenn gleichzeitig:

$$a \subseteq bc_1 + b_1 c, \qquad b \subseteq ca_1 + c_1 a, \qquad c \subseteq ab_1 + a_1 b$$

ist, dann diese Subsumtionen als Gleichungen gelten müssen, nämlich

$$a = bc_1 + b_1 c, \text{ etc.}$$

sein wird.

Ausführung — gleichwie bei σ) — dem Leser überlassen — vergl. π).

υ) Dem Anfänger, wie dem Dozenten wird auch die Zusammenstellung einer Anzahl *rein rechnerischer* Übungen willkommen sein, die wir in mehrere Gruppen verteilen.

Die Aufgaben zielen zumeist auf die Vereinfachung eines gegebenen Ausdruckes hin, und werden wir sie alsdann dadurch darstellen, dass wir den „gegebenen" und den resultirenden vereinfachten Ausdruck, der zu entdecken gewesen, d. i. den „gesuchten" Ausdruck, ohne weiteres einander gleich setzen. In andern Fällen handelt es sich von vornherein nur um den Nachweis der Identität einander gleich gesetzter Ausdrücke; in manchen auch darum, aus einer gegebenen Voraussetzung rechnerisch eine angegebene Folgerung zu ziehen.

Allemal machen die Angaben den Anspruch, allgemeingültig zu sein bei beliebiger Deutung der vorkommenden Buchstabensymbole als Gebiete oder als Klassen. Jede so ein Problem nebst seinem Endergebniss statuirende Angabe bringt mithin ein eigenes Theorem des identischen Kalkuls zum Ausdruck. Natürlich muss jedoch bei unsrer beabsichtigten mehr nur miscellenhaften Zusammenstellung solcher Theoreme auf strenge Systematik und Vollständigkeit Verzicht geleistet werden.

Nur gelegentlich geben wir auch eine Andeutung über die bequemste Art der Lösung, und muss der Leser resp. Löser eben die wichtigsten Sätze des Kalkuls, vor allem die Regeln für's Ausmultipliziren und Ausscheiden, das Tautologie- und das Absorptionsgesetz, die Theoreme 30), und Zusatz zu 33_+), etc. beständig vor Augen haben.

Als Theorem *φ*) stellen wir die Formel voran:

$$\varphi) \qquad (a + b)(b + c)(c + a) = ab + bc + ca,$$

welche dadurch bemerkenswert erscheint, dass sie *vollkommen zu sich selbst dual* ist.

Dieselbe kann auch in der Gestalt geschrieben werden:

$$a(b + c) + bc = (a + bc)(b + c)$$

und lässt sich analog in der Form:

$$a(b + c + d \cdot\cdot) + bcd \cdot\cdot = (a + bcd \cdot\cdot)(b + c + d \cdot\cdot)$$

auch auf beliebig viele Terme $a, b, c, d, \cdot\cdot$ ausdehnen, wo sie dann noch zu sich selbst dual, aber nicht mehr — wie bei dreien — in Bezug auf *alle* diese Terme symmetrisch ist.

Für drei Symbole kann man dem Satze auch noch andere zu sich selbst duale Formen geben, und zwar symmetrisch als:

$$(a + bc)(b + ac)(c + ab) = a(b + c) + b(a + c) + c(a + b),$$

desgleichen unsymmetrisch, aber einfacher, als:

$$(a + bc)(b + ac) = a(b + c) + b(a + c), \quad \text{etc.}$$

— indem diese Ausdrücke alle durch Ausmultipliziren, nach dem Absorptionsgesetze auf $ab + ac + bc$ hinauskommen. —

$\chi)$ $(a + bc)b = (a + c)b; \quad a(ab + bc) = ab;$

$(ab + ac + bc)abc = abc; \quad (b + ac)(c + d) = ac + bc + bd;$

$a + b(c + d) + (a + bx)c = a + b(c + d); \quad (a + b)(b + ac) = b + ac;$

$(a + b)(b + a) = a + b; \quad (a + b)(b + c)(c + d)(d + a) = ac + bd;$

$(a + b)(b + c) = b + ac; \quad (a + b)(b + c)(c + d) = ac + cb + bd;$

$(a + b)(b + c)(c + d)(d + e) = bd + c(ad + ae + be);$

$(a + b)(b + c)(c + d)(d + e)(e + f) = acdf + ace + bce + bde + bdf;$

$(a + b)(a + c)(a + d)(b + c)(b + d)(c + d) = abc + abd + acd + bcd;$

$(a + b)(b + c)(c + d)(d + e)(e + a) = adb + bec + cad + dbe + eca;$

$(a + b + c)(a + b + d)(a + c + d)(b + c + d) = ab + ac + ad + bc + bd + cd;$

$a(b + c)c(a + b) = ac;$

$$(a + bc)(b + ac) = ab + ac + bc = (a + b)(ab + ac + bc);$$

$(ab + cd)(a + b)(c + d) = ab(c + d) + (a + b)cd.$

$a(b + c) + c_1 = a + c_1; \quad a(b + c)(a_1 + b_1)c_1 = 0; \quad a_1bc(b_1 + ac + a_1c_1) = 0;$

$(a + b)(a_1 + b_1) = ab_1 + a_1b, \qquad (a + b_1)(a_1 + b) = ab + a_1b_1;$

$(a + b_1c)(b + a_1c_1) = ab, \quad (a_1x + b)(a + b_1x_1) = ab; \quad a(b + c) + a_1 + b_1c_1 = 1;$

$(a + b_1c_1)(ac + b_1) = ac + b_1c_1; \qquad a(b_1 + cd)b(c_1 + d) = abcd;$

$(ab_1c + a_1bc_1)(abc_1 + a_1b_1c) = 0; \qquad (a_1 + bc)(a + b_1c_1) = abc + a_1b_1c_1;$

$(a_1 + b_1)(ab + ac + bc) = c(ab_1 + a_1b); \qquad (a_1 + b_1)a(bc_1 + b_1c) = ab_1c;$

$a(b + c)(c_1 + ab + a_1b_1) = ab; \qquad a + b_1 + c_1 + b(ac_1 + a_1c) = 1;$

$\{ab_1c + (a_1 + c_1)b\}\{ab_1c_1 + a_1(b + c)\} = a_1b; \qquad ab + ab_1c = a(b + c);$

$a(a_1 + b_1c)(a_1 + bc) = ac(a_1 + b_1)(a_1 + b) = a(b_1 + a_1c)b(a_1 + c_1) = 0;$

$a_1(b_1 + c_1)(b + ca)(c + ab) = 0; \quad (x + y)(x_1 + yz_1)(y_1 + xz) = 0;$

$xy(a + x_1)(a_1 + y_1)(b + y_1)(b_1 + x_1) = 0; \qquad a_1 + b_1 + c_1 + ab + ac + bc = 1;$

$(x + y)(x_1 + z_1)(y_1 + z)(x_1 + y + z)(x + y_1 + z_1) = 0; \quad a_1 + b_1 + c(ab_1 + a_1b) = a_1 + b_1;$

$(a + b)(ab_1 + a_1b) = ab_1 + a_1b = (a_1 + b_1)(ab_1 + a_1b);$

$$ab(ab_1 + a_1b) = 0 = a_1b_1(ab_1 + a_1b);$$

$(bc_1 + b_1c)(ca_1 + c_1a)(ab_1 + a_1b) = 0; \quad (bc_1 + b_1c) + (ca_1 + c_1a) + (ab_1 + a_1b) =$

$= (ca_1 + c_1a) + (ab_1 + a_1b) = (ab_1 + a_1b) + (bc_1 + b_1c) = (bc_1 + b_1c) + (ca_1 + c_1a) =$

$= (a + b + c)(a_1 + b_1 + c_1) = a(b_1 + c_1) + a_1(b + c) = \text{etc.}$

$(ab+a_1b_1)(bc+b_1c_1)(ca+c_1a_1) = abc + a_1b_1c_1;$

$(bc+b_1c_1)(ab_1+a_1b)(ac_1+a_1c) = a_1bc + ab_1c_1;$

$(a_1bc + ab_1c + abc_1)(a_1b_1 + a_1c_1 + b_1c_1) = 0;$

$ab + a_1b_1 + a_1c_1 + b_1c_1 = c_1 + ab + a_1b_1;$

$a_1 + b_1 + a(bc_1+b_1c) = a_1 + b_1 + c_1 = a_1bc + ab_1c + abc_1 + a_1b_1 + a_1c_1 + b_1c_1;$

$(a+b_1+c_1)(ab+ac+bc) = a(b+c); \quad a(b+c)+b(ac_1+a_1c) = ab+ac+bc;$

$a(b+c) + c_1 + ab + a_1b_1 = a + b_1 + c_1 = a(bc_1+b_1c) + c_1 + ab + a_1b_1;$

$a(b+c) + a_1b_1 + a_1c_1 + b_1c_1 = a + b_1 + c_1 = abc + a_1b_1 + a_1c_1 + b_1c_1 + a(bc_1+b_1c);$

$a_1(bc_1+b_1c) + ab + ac + bc = b + c; \quad ab + ac + bc + a_1b_1 + a_1c_1 + b_1c_1 = 1;$

$(a_1+c_1+e_1)(b_1+c_1+e_1)(b_1+d_1+e_1)(b_1+d_1+f_1)\,acdf = ab_1cde_1f,$

Anleitung: man lasse in den Summen die Glieder fort, deren Negation als Faktor aussen steht, und erhält: $e_1(b_1 + e_1)(b_1 + e_1)b_1acdf$, etc.;

$$(a_1 + b + c)(a + b_1 + c)(a + b + c_1) = ab + ac + bc + a_1b_1c_1;$$

$$(a_1b_1 + bc_1)_1 = ab_1 + bc; \quad \{(a_1x + b_1x_1)c\}_1 = c_1 + ax + bx_1.$$

Zeige, dass wenn $x = a(b + c) + bc_1 + b_1c$ ist, dann $x_1 = a_1bc + b_1c_1$ sein muss. Ebenso dass wenn bezüglich:

$x = a_1bc + a(b + c), \quad bc + ca + ab, \quad b_1(c_1 + a) + c_1a, \quad a(bc_1 + b_1c) + b_1c_1,$

so

$x_1 = ab_1c_1 + a_1(b_1 + c_1), \quad b_1c_1 + c_1a_1 + a_1b_1, \quad b(c + a_1) + ca_1, \quad a_1(b_1c + bc_1) + bc;$

$$ab_1 + b_1c + abc_1 = ac_1 + b_1c.$$

$\psi)$ $a_1b_1 + ac + bc = c + a_1b_1; \quad (a + b)c_1 + (c + a_1b_1)a_1 + bc = 1;$

$$a_1bc + ab + ac + b_1c = ab + c;$$

$$a_1b + ac_1 + a_1c + bc + ab_1 = a + b + c,$$

Anleitung: $a_1(b + c) + a(b_1 + c_1) + bc = a_1(b + c) + a(bc)_1 + bc =$
$= a_1(b + c) + a + bc = b + c + a + bc =$ etc.;

$$ab + bc_1 + cd + bd_1 = b + cd,$$

Anleitung: $ab + b(cd)_1 + cd = ab + b + cd =$ etc.;

$$a + b + c_1 + a_1b_1c = 1,$$

Anleitung: Nach Th. 33_+) Zusatz ist die linke Seite

$$= a + b + c_1 + a_1b_1 = a + b + c_1 + a_1 = 1 + b + c_1 = 1,$$

oder auch nach Th. 36_+) und 30_+), weil $a_1b_1c = (a + b + c_1)_1$;

$$ab + a_1c + bc + cd_1 + ab_1cd = ab + c,$$

Bemerkung: das Glied ab könnte auch beiderseits fortgelassen werden;

$a(cd + abcd_1 + b_1cd_1 + ac_1 + ab_1d) = a;$

$(ab_1c_1 + bc)(bc_1a_1 + ca)(ca_1b_1 + ab) = abc;$

$(ab + a_1 b_1)(cd + c_1 d_1)\{(a + d) b_1 c_1 + a_1 d_1 (b + c)\} = 0;$

$\{a + c_1 (b + d_1)\}\{b + d_1 (a + c_1)\}(a + bd_1) c_1 (b + ac_1) d_1 = (a + b) c_1 d_1;$

$(a + b + c + d)(a_1 + b_1 + c_1 + d_1) = a(b_1 + c_1 + d_1) + a_1 (b + c + d).$

Anleitung: man zeige, dass der beim Ausmultipliziren eigentlich noch hinzutretende Term $(b + c + d)(b_1 + c_1 + d_1)$ von den beiden übrigen absorbirt wird, indem man ihn mit $a + a_1$ multiplizirt;

$(a + b + c)(a + b_1 + c_1)(a_1 + b + c_1)(a_1 + b_1 + c) = 0;$

$a_1 bc + a(b + c) = a(b + c) + bc;\qquad a(b + c) + bc_1 + b_1 c =$

$= abc + bc_1 + b_1 c = ab + bc_1 + b_1 c = ac + bc_1 + b_1 c;$

$ab_1 c_1 + a_1 bc_1 + a_1 b_1 c + a_1 bc + a(b + c) = a + b + c;$

$abx + a_1 x_1 + a_1 b = bx + a_1 x_1;\qquad a_1 x_1 y_1 + xy_1 + axy = ax + a_1 y_1;$

$ay + bx + a_1 b_1 xy = ay + bx + xy$

wol am bequemsten nachzuweisen; indem man das xy rechts mit 1, $=$ $= a + b + a_1 b_1$ multiplizirt;

$abx_1 y_1 + ay + bx + a_1 b_1 xy = (a + x)(b + y);$

$ab_1 + bc_1 + ca_1 = a_1 b + b_1 c + c_1 a = (a + b + c)(a_1 + b_1 + c_1);$

$(a + b_1)(b + c_1)(c + a_1) = (a_1 + b)(b_1 + c)(c_1 + a) = abc + a_1 b_1 c_1;$

$ab + ab_1 x + a_1 bx_1 = ax + bx_1;$

$abcd + a(b_1 + c_1 + d_1) xy + b(a_1 + c_1 + d_1) xy_1 + c(a_1 + b_1 + d_1) x_1 y +$

$+ d(a_1 + b_1 + c_1) x_1 y_1 = axy + bxy_1 + cx_1 y + dx_1 y_1,$

wie zu zeigen, indem man $abcd$ mit 1, $= xy + xy_1 + x_1 y + x_1 y_1$ multiplizirt, sodann die gleichnamigen Glieder zusammenzieht. —

ω) Wenn
$$c = ax + bx_1$$
bedeutet, so zeige man, dass
$$ab + c(a + b) = c$$
sein muss.

Desgleichen, wenn
$$e = axy + bxy_1 + cx_1 y + dx_1 y_1$$
bedeutet, dass
$$abcd + e(a + b + c + d) = e.$$

Wenn
$$abc = 0$$
ist, so muss
$$abd(x + c_1) = abd$$
sein. —

Unter der Voraussetzung, dass
$$abcd = 0$$

ist, sollen die folgenden Reduktionen gerechtfertigt oder als zulässige entdeckt werden:

$$a(bc_1 + d_1) = a(b + d_1); \qquad (a_1 + b_1 + d)c = (a_1 + b_1)c;$$
$$a(b + c_1 + d_1) = a(c_1 + d_1); \quad ad + ac_1 + ab_1cd_1 = a(b_1 + c_1);$$
$$a_1 + bc + cd_1 = a_1 + bc; \qquad a_1 + b_1c + cd = a_1 + b_1c;$$
$$a_1 + bd + abc_1d_1 = a_1 + bc_1; \qquad abc + (b_1 + c_1)d_1 = (a + b_1 + c_1)d_1;$$
$$a_1 + b(c_1 + d) = a_1 + bc_1; \qquad a(b_1 + cd_1) = a(b_1 + c);$$
$$ab + (a + b_1 + c_1)d_1 = ab + (b_1 + c_1)d_1.$$

Anleitung zur ersten Aufgabe. Die linke Seite lässt sich schreiben:

$$a(bc_1d + d_1) + abcd = abd(c_1 + c) + ad_1 = a(bd + d_1) = a(b + d_1).$$

Anleitung zur zweiten dieser Aufgaben. Die linke Seite ist

$$\{a_1 + b_1 + d(a_1 + b_1)_1\}c = (a_1 + b_1 + abd)c = (a_1 + b_1)c,$$

weil der letzte Term, ausmultiplizirt, Null gibt. Etc.

Anleitung zur letzten Aufgabe: Da bc die Negation von $b_1 + c_1$, so darf man für $a + b_1 + c_1$ schreiben $abc + b_1 + c_1$; hievon der erste Term, ausmultiplizirt, gibt $abcd_1$ (und kann um $abcd$, welches 0 ist, vermehrt werden; dadurch entsteht abc) welches dann in das schon vorhandene Glied ab eingeht, von diesem verschlungen wird.

Hier würde die Gleichung falsch, wenn man das Glied ab beiderseits fortlassen wollte. Zu ihrer Geltung bedarf sie aber der Voraussetzung nicht.

α_1) Man vereinfache eine jede der nachfolgenden acht Subsumtionen:

$$ab_1 \neq\!\!\!\in b, \quad a \neq\!\!\!\in a_1 + b, \quad ab_1 \neq\!\!\!\in a_1, \quad b_1 \neq\!\!\!\in a_1 + b,$$
$$a \neq\!\!\!\in ab, \quad a + b \neq\!\!\!\in b, \quad b_1 \neq\!\!\!\in a_1b_1, \quad a_1 + b_1 \neq\!\!\!\in a_1.$$

Auflösung: $a \neq\!\!\!\in b$ — wie vermittelst des Th. $38_\times$) zu zeigen. —

Nach dem dritten der obigen Schemata könnte beispielsweise dem Satze: „Alle Sünden sind verzeihbar (können Vergebung finden)" als eine logisch vollkommen äquivalente — psychologisch aber so sehr davon verschiedene — auch die Fassung gegeben werden: „Unverzeihliche Sünden sind keine Sünden" — welche De Morgan von dem das Beispiel herrührt nicht ganz mit Unrecht als „ungeschickt", tölpelhaft oder abgeschmackt („awkward") hinstellt.

Dagegen muss man sich hüten, dergleichen an einem Beispiel zu machende Wahrnehmungen sogleich auf die ganze Urteilsform auszudehnen. Zum Beispiel: „Falsche lateinische Deklinationen sind gar keine lateinischen Deklinationen . . ." hatte ich einst zu entgegnen, als mir ein philologischer Kollege meine Einteilung der numerischen Gleichungen in richtige und falsche[1] p. 359 durch den Vergleich mit einer Einteilung der lateinischen Deklinationen in richtige und falsche lächerlich zu machen suchte. In der That: wirklich lateinische Deklinationen sind immer richtige. „. . . dagegen: falsche Gleichungen sind wirklich Gleichungen (d. i. Behauptungen einer

Gleichheit)." So erwies sich jene „ungeschickte" Urteilsform hier als eine geschickte zur Entkräftung des Einwandes.

β_1) Man bringe die Gleichung $a + b = a$ rechts auf 0 nach Th. 39).

Auflösung: $a_1 b = 0$, was mit $b \mathrel{\underline{\in}} a$ äquivalent. *Notwendige und hinreichende Bedingung dafür dass ein Summand b im andern eingehe und unterdrückt werden dürfe, ist also: dass er diesem eingeordnet sei.* Darnach erscheint das Absorptionsgesetz 23_+) als spezieller Fall und Korollar der Theoreme 6).

Man verfahre ebenso mit der Gleichung $ab = a$ und untersuche die Bedingung für das Eingehen eines Faktors b im andern a. Dieselbe ist $ab_1 = 0$ oder $a \mathrel{\underline{\in}} b$.

Wenn $x = ab_1 + a_1 b + a_1 c_1 + b_1 c_1$ bedeutet, so untersuche man nach Vorstehendem systematisch, welches von den vier Gliedern rechts unterdrückt werden darf — McColl[3]. Da

$$ab_1(a_1 b + a_1 c_1 + b_1 c_1)_1 = ab_1(a + b_1)(a + c)(b + c) = ab_1(ab + c) = ab_1 c$$

und

$$a_1 b(ab_1 + a_1 c_1 + b_1 c_1)_1 = a_1 bc$$

von 0 im allgemeinen verschieden, so sind die zwei ersten Glieder beizubehalten. Dagegen ist:

$$a_1 c_1(ab_1 + a_1 b + b_1 c_1)_1 = 0 \quad \text{und} \quad b_1 c_1(ab_1 + a_1 b + a_1 c_1)_1 = 0;$$

wir können also nach Belieben das dritte oder vierte Glied weglassen. Aber nicht beide zugleich, denn nachdem nun

$$x = ab_1 + a_1 b + b_1 c_1 \quad \text{resp.} \quad x = ab_1 + a_1 b + a_1 c_1$$

geschrieben ist, wird:

$$b_1 c_1(ab_1 + a_1 b)_1 = a_1 b_1 c_1 \quad \text{und} \quad a_1 c_1(ab_1 + a_1 b)_1 = a_1 b_1 c_1$$

nicht verschwinden — so lange die Gebiete a, b, c als *allgemeine* gedacht, so lange nicht besondere Beziehungen zwischen denselben bestehend vorausgesetzt werden.

Natürlich wird man zur Anwendung des hier erläuterten systematischen Verfahrens nur zu schreiten haben, sofern sich nicht die überflüssigen Glieder („redundant terms") schon beim blossen Anblick, bei Durchsicht des Ausdrucks (by mere inspection) als andere zum Faktor habend entdecken lassen — vergl. das Beispiel:

$$a_1 bc + a_1 c + abc_1 + bc_1 = a_1 c + bc_1.$$

Bei der Untersuchung, ob ein $a + b = a$, d. h. $a_1 b = 0$ ist, kann übrigens zur Vereinfachung der Rechnung, wie McColl hervorhebt, von einem späteren Satze, vergl. Anm. 2 zu Th. 44_+) mit Vorteil Gebrauch gemacht werden.

γ_1) Nunmehr noch einige Übungen im rechnerischen Ziehen von Schlüssen. Man beweise den Sorites:

$$a \mathrel{=\!\!\!\in} b, \quad b \mathrel{=\!\!\!\in} c, \quad c \mathrel{=\!\!\!\in} d, \quad d \mathrel{=\!\!\!\in} e, \quad \text{ergo} \quad a \mathrel{=\!\!\!\in} e,$$

indem man die Prämissen in der Form darstellt:

$$a = ab, \quad b = bc, \quad c = cd, \quad d = de.$$

(Jevons[9] p. 31.)

Auflösung. Durch Rückwärtseinsetzung folgt:

$$a = (abcd)\,e.$$

δ_1) Man zeige dass wenn den Prämissen eines (bejahenden) Kettenschlusses noch eine Subsumtion hinzugefügt wird, welche sozusagen die Kette *schliesst*, durch welche nämlich der major seiner letzten dem minor seiner ersten Prämisse subsumirt wird, dann sämtliche termini einander gleich sein müssen. Z. B. ist:

$$a \mathrel{=\!\!\!\in} b, \quad b \mathrel{=\!\!\!\in} c, \quad c \mathrel{=\!\!\!\in} d, \quad d \mathrel{=\!\!\!\in} e \quad \textit{und} \quad e \mathrel{=\!\!\!\in} a,$$

so folgt $a = b = c = d = e$. (Jevons[9] p. 212.)

In der That hat man $a \mathrel{=\!\!\!\in} e$ nebst $e \mathrel{=\!\!\!\in} a$, somit $e = a$, ebenso $a \mathrel{=\!\!\!\in} d$ nebst $d \mathrel{=\!\!\!\in} a$, somit $d = a$, etc. —

ε_1) „Jedes a ist b", dargestellt als „Jedes a ist b, oder b", gibt durch Konversion den Schluss: „Jedes a, welches nicht b ist, ist b" — als scheinbare „contradictio in adjecto".

In Formeln kann man noch etwas einfacher so zu diesem Schluss gelangen: Wenn $a \mathrel{=\!\!\!\in} b$, so ist nach Th. $15_\times$) $ab_1 \mathrel{=\!\!\!\in} bb_1$, aber $bb_1 \mathrel{=\!\!\!\in} b$ nach Th. $6_\times$), ergo $ab_1 \mathrel{=\!\!\!\in} b$. Am einfachsten nach Th. 41_+), $c = b$ setzend.

Man löse diesen Widerspruch. (Jevons[9] p. 202.) Der scheinbare Widerspruch schwindet bei dem Hinweis darauf, dass $ab_1 \mathrel{=\!\!\!\in} 0$, oder also $ab_1 = 0$ sein muss, d. h. es gibt keine a, welche nicht b sind; die Klasse dieser ist eine leere, und somit auch in der b mitenthalten! —

ζ_1) Wenn kein a ein bc (d. h. b und c zugleich) ist, was folgt bezüglich der b und der ac? (Jevons[9] p. 200.)

Beantwortung: die Prämisse $a \mathrel{=\!\!\!\in} (bc)_1$ lässt sich umschreiben in $abc = 0$, und dieses ebenso wieder in $b \mathrel{=\!\!\!\in} (ac)_1$, d. h. kein b ist ein ac. —

η_1) Jevons[9] p. 189.

Was ist der wahre Sinn der Redensart: „Alle Räder, welche nach Croyland kommen, sind mit Silber beschlagen"?

Bezeichnet r die Klasse der nach Croyland kommenden Räder und $s =$ silberbeschlagen, so soll $r \subseteq s$ sein.

Die Unterstellung ist: dass es silberbeschlagene Räder überhaupt nicht gebe, d. h. dass $s = 0$ sei.

Hiernach folgt gemäss Th. 2) und 5_+), dass auch $r \subseteq 0$ somit $r = 0$ sei, das heisst also: es kommen keine Räder nach Croyland (einer gebirgig entlegenen, früher schwer zugänglichen Abtei).

Aufgaben von einer ähnlichen Leichtigkeit der Behandlung, indessen gleichwol nicht immer von unzweifelhafter Klarheit der Fragestellung und unanfechtbarer Lösung, gibt Jevons in [9] in ungeheurer Menge.

ϑ_1) Beobachtet sei, dass die Phänomene a, b, c nur in den Kombinationen abc_1, a_1b_1c und $a_1b_1c_1$ vorkommen. Was sind die einfachsten Aussagen, die über a, b, c gemacht werden können? (Jevons [9] p. 219.)

Beantwortung. Der Ansatz:

$$abc_1 + a_1b_1c + a_1b_1c_1 = 1, \quad \text{oder} \quad abc_1 + a_1b_1 = 1$$

gibt erschöpfend die Mannigfaltigkeit 1 der wirklichen Fälle an. Durch beiderseitiges Negiren folgt:

$$(a_1 + b_1 + c)(a + b) = 0 \quad \text{oder} \quad ab_1 + a_1b + (a + b)c = 0.$$

Das Verschwinden der beiden ersten Terme zeigt an, dass $a = b$ ist, und kann hienach das Verschwinden des letzten Terms kürzer durch

$$(a + a)c = 0 \quad \text{oder} \quad ac = 0$$

ausgedrückt werden. Faktisch bedingen also die Phänomene a und b einander gegenseitig (die Klassen der Fälle wo das eine oder wo das andere von ihnen vorliegt, sind identisch) und wo eines von ihnen vorliegt, da fehlt c. —

ι_1) Gesetzt: Jedes s ist a oder b, aber jedes a ist p, und jedes b ist p. Zu folgern: jedes s ist p. (De Morgan [2] p. 123.)

Ist $s \subseteq a + b$, dazu $a \subseteq p$, $b \subseteq p$, so folgt nach Def. (3) aus dem System der letzteren Prämissen: $a + b \subseteq p$, und hieraus in Verbindung mit der ersten Prämisse nach Prinzip II:

$$s \subseteq p,$$

wie zu zeigen war.

Nach De Morgan wäre dieser Schluss eine gewöhnliche Form des *„Dilemma"*. —

$\varkappa_1$) Gesetzt: Jedes a ist entweder b, c oder d, ferner kein b ist a und kein c ist a, so folgt: jedes a ist d. (De Morgan [2] p. 122.)

Beweis. Von den Prämissen

$$a \mathrel{=\!\!\!\in} b + c + d, \quad ab = 0, \quad ac = 0$$

kann man die erste nach Th. 20) schreiben:

$$a = a(b + c + d) = ab + ac + ad,$$

was sich mit Rücksicht auf die folgenden vereinfacht zu:

$$a = ad \quad \text{oder} \quad a \mathrel{=\!\!\!\in} d.$$

λ_1) Gesetzt: Jedes a ist b, c oder d; jedes b ist e, jedes c ist e, jedes e ist d. So folgere man: jedes a ist d. (De Morgan[2] p. 123.)

Prämissen: $a \mathrel{=\!\!\!\in} b + c + d, \quad b \mathrel{=\!\!\!\in} e, \quad c \mathrel{=\!\!\!\in} e, \quad e \mathrel{=\!\!\!\in} d.$

Ergo: $b \mathrel{=\!\!\!\in} d, \quad c \mathrel{=\!\!\!\in} d, \quad b + c \mathrel{=\!\!\!\in} d,$

und da ohnehin $d \mathrel{=\!\!\!\in} d$, so ist auch $b + c + d \mathrel{=\!\!\!\in} d$, woraus in Verbindung mit der ersten Prämisse a fortiori folgt: $a \mathrel{=\!\!\!\in} d$. —

μ_1) Angenommen: Jedes a ist b, jedes c ist d aber kein b ist d. Zu beweisen, dass auch kein a ein c sein wird. (De Morgan[2] p. 123.)

Prämissen: $a \mathrel{=\!\!\!\in} b, \quad c \mathrel{=\!\!\!\in} d, \quad bd = 0.$

Aus den ersten beiden folgt nach Th. $15_\times$): $ac \mathrel{=\!\!\!\in} bd$, sonach $ac \mathrel{=\!\!\!\in} 0$, was auf $ac = 0$ nach Th. 5) hinausläuft. —

ν_1) Man vereinfache die Aussage:

$$(c + a)b_1 + ac = (a + b)c_1 + ab.$$

Auflösung. Bringt man rechts auf 0, so entsteht: $bc_1 + b_1c = 0$, das heisst: $b = c$.

ξ_1) Ist $x = ax + bx_1$, so soll bewiesen werden, dass $bx_1 = 0$ sein muss.

Am einfachsten geschieht dies mittelst Durchmultiplizirens der Prämisse mit x_1.

o_1) Wenn $a = ab + x(a + b)$, so ist $b = ab + x_1(a + b)$, und umgekehrt. Dies zu beweisen, wird man beide Gleichungen rechts auf 0 bringen, wodurch sich $a_1bx + ab_1x_1 = 0$ übereinstimmend ergibt.

π_1) (Jevons[9], p. 239.) Zu zeigen, dass die Aussage: „Alle a sind sowol b als c" äquivalent ist dem Systeme der beiden Aussagen: „Was nicht b ist, ist auch nicht a" und „Was nicht c ist, ist nicht a", mithin

$$a \neq\!\!\!\in bc \quad \text{äquivalent} \quad \begin{cases} b_1 \neq\!\!\!\in a_1 \\ c_1 \neq\!\!\!\in a_1 \end{cases}.$$

Auflösung: Erstere Subsumtion, rechts auf 0 gebracht gibt:

$$ab_1 + ac_1 = 0$$

und dies ist auch die vereinigte Gleichung der beiden letztern Subsumtionen. Zudem geben diese nach (3): $b_1 + c_1 \neq\!\!\!\in a_1$, was die Konversion durch Kontraposition der erstern Subsumtion nach 37) und 36) ist.

ϱ_1) De Morgan[3] p. 14 empfiehlt einem Jeden, der sich oder seine Bekannten auf die Probe zu stellen wünscht, in wie weit Zergliederung (Analyse) der Formen des Aussagens (of enunciation) für ihn von Wert sein würde, die Vorlage dieser Frage, deren Beantwortung sofort gegeben *und begründet* werden soll: ob die beiden folgenden Behauptungen (oder welche von ihnen) richtig seien:

Erstens. Alle Engländer, welche nicht schnupfen, sind zu finden unter den Europäern, welche keinen Tabak konsumiren.

Zweitens. Alle Engländer, welche keinen Tabak konsumiren, finden sich unter den Europäern, welche nicht schnupfen?

Bedeutet a = Engländer, b = Europäer, c = Schnupfer, d = Konsument von Tabak, so ist behauptet: $ac_1 \neq\!\!\!\in bd_1$, sodann $ad_1 \neq\!\!\!\in bc_1$, und gilt als selbstverständlich, dass $a \neq\!\!\!\in b$ und $c \neq\!\!\!\in d$ ist. Während also

$$ab_1 = 0 \quad \text{und} \quad cd_1 = 0$$

ist, sagt die erste Behauptung, dass

$$ac_1(b_1 + d) = 0, \quad \text{die zweite, dass} \quad ad_1(b_1 + c) = 0$$

sei; die zweite ist mithin offenbar richtig; von der ersten aber verschwindet zwar auch der Term $ac_1b_1 = c_1 \cdot 0$ identisch; dagegen bleibt die Behauptung übrig:

$$ac_1d = 0, \quad \text{oder} \quad ad \neq\!\!\!\in c,$$

welche unrichtig, sintemal es auch Engländer gibt, die Tabak konsumiren ohne zu schnupfen (indem sie eben rauchen oder Tabak kauen, priemen). —

σ_1) Venn[1] p. 264.

Drei Personen A, B, C sind beschäftigt, einen Haufen Bücher in einem Antiquariat zu sortiren. A soll alle deutschen politischen Werke und die gebundenen ausländischen Novellen herauslesen, dem B sind die gebundenen politischen Werke und die deutschen Novellen, falls sie nicht politischen Inhaltes, zugewiesen, endlich dem C die gebundenen deutschen Werke und die ungebundenen politischen Novellen. [Statt „politisch" würden wir vielleicht besser „historisch" nehmen.]

Welche Werke werden von zweien der drei Personen beansprucht, und werden es gewisse Werke von allen dreien?

Auflösung. Es bedeute $a =$ deutsch, $b =$ politisch, $c =$ gebunden, $d =$ Novelle, und bei der Rechnung A die Klasse der der gleichnamigen Person zugewiesenen Werke, desgl. B etc., so ist gegeben:

$$A = ab + a_1 cd, \quad B = bc + b_1 ad, \quad C = ac + c_1 bd$$

und hieraus folgt:

$$AB = bc(a+d), \quad AC = ab(c+d), \quad BC = ac(b+d),$$
$$ABC = abc,$$

womit die Antworten auf die gestellten Fragen gefunden sind und z. B. die letzte besagt, dass die gebundenen deutschen politischen Werke und nur diese (falls solche vorhanden) von allen drei Personen beansprucht werden.

In den Mathematical Questions with their solutions from the „Educational Times" (edited by W. J. C. Miller), Vol. 33, 1880, pag. 99 und 100 sind auch noch in andrer Manier die Lösungen der vorstehenden Aufgabe gewonnen von den Herrn C. J. Monro, R. R. Grey, und andern, sowie von H. McColl. In Bezug auf des letztern Manier vergleiche der weiter vorgeschrittene Leser den § 46, 18. Studie.

τ_1) Aufgabe, McColl, Math. Questions, Vol. 34, 1881, p. 85, gelöst von W. B. Grove, Elizabeth Blackwood, u. a.

Was ist der geringste Zusatz, der zu den Prämissen: $a \Subset \alpha$, $b \Subset \beta$, $c \Subset \gamma, \cdots$ gemacht werden muss, damit sie den Schluss gestatten: $x \Subset \xi$?

Auflösung. Mit Rücksicht auf Th. $38_\times$), 24_+) und $5_\times$) lässt das ursprüngliche Prämissensystem sich zusammenziehen zu der Subsumtion: $a\alpha_1 + b\beta_1 + c\gamma_1 + \cdots \Subset 0$, und da der gewünschte Schluss ist: $x\xi_1 \Subset 0$, so ist den Prämissen allermindestens hinzuzufügen die Annahme, dass

$$x\xi_1 \Subset a\alpha_1 + b\beta_1 + c\gamma_1 + \cdots$$

sei. Dieses setzt weniger voraus, der Zusatz ist *schwächer*, („weaker"), als wenn etwa das Subjekt nur in einzelnen Gliedern der Summe rechterhand enthalten gedacht werden müsste oder in einer echten Teilsumme der letztern, in einer Unterklasse, die nicht das Ganze wäre („short of the whole").

v_1) Aufgabe (W. B. Grove, Math. Questions Vol. 35, 1881, p. 29 — hier leicht abgeändert).

In einer gewissen Schule hat jeder Schüler, der Englisch und Französisch, oder keines von beiden lernt, keine Algebrastunden; jeder an

dem Unterricht in der Algebra Teilnehmende lernt sowol Englisch als Deutsch oder keines von beiden; jeder der Französisch aber nicht Deutsch lernt, hat entweder Englisch oder nicht Algebra. Man ersetze die Angaben durch eine einzige ihrem System äquivalente einfachere Angabe *und zeige*, dass die *Anzahl* derer, die Algebra haben, die Zahl der Englisch Lernenden nicht überschreiten kann.

Mit der letzteren Forderung treten wir eigentlich aus dem Rahmen der uns hier gesteckten Kategorieen von Aufgaben heraus; doch mag die Lösung als eine so naheliegende hier mit in Kauf genommen werden.

Auflösung (von McColl, Elizabeth Blackwood, u. a.). Es bezeichne a, d, e, f die Gattung der bezüglich Algebra, Deutsch, Englisch, Französisch lernenden Schüler.

So lauten die Data:

$$ef + e_1 f_1 \Subset a_1, \quad a \Subset ed + e_1 d_1, \quad d_1 f \Subset a_1 + e,$$

und ist die vereinigte Gleichung derselben:

$$a(ef + e_1 f_1 + ed_1 + e_1 d + d_1 e_1 f) = 0$$

oder, da der Koeffizient von e_1 in der Klammer sich auf 1 reduzirt, hernach das Th. 33_+) Zusatz anwendbar wird:

$$a(f + d_1 + e_1) = 0,$$

das heisst:

$$a \Subset def_1.$$

Da nun die Klasse a einem Teil der Klasse e schon eingeordnet, und a fortiori $a \Subset e$ ist, so muss Num. $a <$ Num. e sein, wenn wir mit „Numerus a“ die Anzahl der Individuen der Klasse a bezeichnen — wie zu beweisen war. —

Die einfachste Formulirung der Data würde übrigens das System der beiden Aussagen:

$$af = 0 \quad \text{und} \quad a \Subset de$$

vorstellen, also: Wer Algebra hat, hat kein Französisch, dagegen sicher Deutsch sowol als Englisch.

φ_1) (Jevons[9] p. 283 und Miss Ladd[1] p. 51.)

Was sind, genau präzisirt, die Punkte, in welchen zwei Disputanten übereinstimmen, und die, in welchen sie differiren, wenn der eine (Henrici) behauptet:

Der Raum (a) sei „die dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit“ (b) mit Punkten als Elementen (c),

der Andere der Meinung ist, dass der Raum die dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit sei und dass zugleich der Raum Punkte zu Elementen habe?

Auflösung. Henrici's Behauptung ist: $a = bc$, oder

$$ab_1 + ac_1 + a_1bc = 0.$$

Der Andere behauptet erstens, dass $a = b$, mithin $ab_1 + a_1b = 0$, oder

$$ab_1 + a_1bc + a_1bc_1 = 0$$

sei, und zweitens, dass $a \Subset c$, das heisst $ac_1 = 0$ sei.

Die vereinigte Gleichung dieser beiden Aussagen:

$$ab_1 + ac_1 + a_1bc + a_1bc_1 = 0$$

geht über diejenige Henrici's um das zu den vorhergehenden disjunkte letzte Glied a_1bc_1 hinaus. Mithin stimmen Beide in dem was Henrici behauptete überein, während der Opponent desselben obendrein behauptet, dass

$$a_1bc_1 = 0,$$

m. a. W.

$$bc_1 \Subset a$$

sei, d. h. dass eine dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, welche *nicht* Punkte zu Elementen hat, Raum sein müsse.

Wie schon das Beispiel der (Einzel-)Töne zeigt, welche nach Höhe, Stärke und Dauer eine dreifach ausgedehnte Mn. vorstellen, ist also jedenfalls der Opponent im Unrecht. Dies schliesst nicht aus, dass auch Henrici's angebliche Behauptung falsch ist. Beide Disputanten hätten nicht „*die*", sondern nur „eine" dreifach ausg. Mn. sagen dürfen, wo dann ihre beiderseitigen Aussagen: $a \Subset bc$ und: $a \Subset b$, $a \Subset c$ auf genau dasselbe hinausgelaufen wären — cf. Def. $(3_\times)$. —

Die bisherigen Anwendungsbeispiele und Aufgaben schon lassen wol erkennen, dass wo man über so viele Methoden verfügt, wie im identischen Kalkul, wo man freie Wahl hat unter so vielen Mitteln, von welchen sich ein mehr oder minder judiziöser Gebrauch machen lässt — da jedenfalls von einem „toten Formalismus" nicht zu sprechen sein wird. —

Zehnte Vorlesung.

§ 19. **Funktionen und deren Entwickelung.**

Nachdem wir Operationen kennen gelernt haben, dienlich um aus gegebenen Gebieten oder Klassen deren neue abzuleiten, müssen wir uns über die Eigenschaften der Ausdrücke orientiren, welche mittelst dieser Operationen aufgebaut oder zusammengesetzt werden können. Auf dieses Ziel steuern wir nunmehr hin.

42_+) Theorem.

Jedes Gebiet y lässt sich durch jedes andre Gebiet x und dessen Negation x_1 „linear und homogen“ ausdrücken in der Form:

$$y = ax + bx_1.$$

Beweis. Geometrisch wäre dies zwar evident für die Bedeutungen von $a = A$, $b = B$ der Fig. 19 in welcher x und y die Kreisflächen, dagegen A und B die Bilineums- oder Bogenzweieckflächen, in welche diese Buchstaben eingeschrieben sind, vorstellen. Offenbar ist nämlich hier: $Ax = A$, $Bx_1 = B$, $y = A + B$.

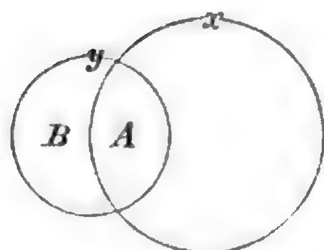


Fig. 19.

Indessen soll ohne Not nicht auf die Anschauung rekurrirt, zurückgegangen werden oder Berufung erfolgen.

Wir beweisen daher unsre Behauptung rein „analytisch“. Und dies gelingt bereits — und auf die einfachste Weise — durch die nach bisherigem [Th. $21_\times$), 30_+) und $27_\times$)] leicht erweisliche Identität:

$$y = yx + yx_1,$$

welche mit obiger Behauptung zusammenfällt, sobald man unter a und b das Gleiche, und zwar y selbst, versteht.

Noch besser, nämlich — wie man bald in der Lage sein wird, darzuthun — auf die allgemeinste Weise, wird der Satz erwiesen durch die ganz unumschränkt gültige Gleichung:

$$y = (xy + ux_1)\, x + (x_1 y + vx)\, x_1,$$

in welcher, auch bei gegebenen Gebieten x, y, die Symbole u, v noch völlig beliebige, willkürliche oder *arbiträre* Gebiete vorstellen. Auch diese Gleichung wird man durch Ausmultipliziren rechterhand und mit Rücksicht auf bekannte Theoreme leicht verifiziren.

Die in unserm Theorem behauptete Gleichung ist demnach auch wahr, wenn

$$a = xy + ux_1, \qquad b = x_1 y + vx$$

erklärt wird, d. h. unter a, b die angegebenen Werte verstanden werden.

Die „*Koëffizienten*“ a und b der als zulässig behaupteten homogen linearen Darstellung des y durch x und x_1 sind demnach *nicht völlig bestimmt*, wenn auch x und y gegebene Werte (Bedeutungen) haben. Mögen sie doch sogar, wie gezeigt, je einen willkürlichen also vollkommen unbestimmten Bestandteil enthalten! Auch werden diese Koeffizienten im Allgemeinen ihre Bedeutung ändern, wenn man dem x andre und andre Werte beilegt (m. a. W. Bedeutungen unterlegt).

Auch für Klassen ist unser Satz unmittelbar einleuchtend: Die Individuen einer Klasse y müssen solche sein, welche x sind, oder solche, welche nicht x sind. Die Salze z. B. sind teils verbrennliche Salze, teils unverbrennliche.

Es versteht sich, dass auch eine dieser beiden Teilklassen eine leere sein kann, in welchem Falle der betreffende Term der Darstellung $ax + bx_1$ gleich 0 zu denken ist, und zwar *genügt* es, um das Verschwinden dieses Terms zu bewirken, dass man dessen Koeffizienten gleich 0 nehme. Verstünden wir z. B. unter y die Klasse der Menschen und unter x die Klasse der sterblichen Wesen (die Klasse „sterblich“), so wäre $b = 0$ zu denken. Die Klasse der Menschen besteht aus derjenigen der sterblichen Menschen, wozu aus der Klasse der unsterblichen Wesen *nichts* hinzuzunehmen ist; hier ist schon $y = ax = yx$ — vergl. auch Th. $20_\times$).

Entsprechend der schon erwähnten Unbestimmtheit der Koeffizienten a, b dürften wir freilich in unserm Beispiel unter b auch verstehen: die Klasse der Bäume — in Anbetracht, dass es auch keine unsterblichen Bäume gibt, also bx_1 doch $= 0$ wäre.

Die in dem Theorem gebrauchten Ausdrücke „linear“, sowie „homogen“ sind aus der mathematischen Terminologie herübergenommen; sie finden in der Mathematik ihre Erklärung, auch die Benennungen dort ihre Motivirung. Auf letztere wollen wir hier gar nicht, auf erstere nur so weit eingehen, als für unsre Zwecke unerlässlich ist. Für den Augenblick genügt die Bemerkung, dass man eben einen Ausdruck von der Form $ax + bx_1$ — und nur einen solchen — in Bezug auf x und x_1 „linear und homogen“ zu nennen hat. Die allgemeinste lineare aber nicht homogene Funktion

von x und x_1 hätte die Form:

$$ax + bx_1 + c;$$

sie enthielte nämlich ausser einem mit dem Faktor x und einem mit dem x_1 behafteten Gliede auch noch einen von x und x_1 freien Term, das sogenannte *„Absolutglied“* c.

Allerdings gebraucht die Mathematik diese Benennungen nur, sofern die Koeffizienten a und b (beziehlich auch c) von x und x_1 „unabhängig“, bezüglich ebendieser Variabeln „konstant“ sind, nämlich stets dieselben Werte behalten, welche Werte man auch dem x oder x_1 in Gedanken unterlegen mag. Diese Anforderung ist im obigen Theorem anscheinend nicht immer erfüllt. Es werden aber die demnächst folgenden Sätze von 44) an zeigen, dass und wie sie sich in weitestem Umfange realisiren lässt; auch oben waren schon bei der Annahme $a = b = y$ diese Koeffizienten für jede Deutung von x die gleichen.

43) Theoreme.

Die Subsumtion $a \Subset b$ *ist* auch *äquivalent der Gleichung:*

$43_\times$) $a = ub,$	43_+) $b = a + v,$

in welcher u resp. v ein gewisses, ein unbestimmtes Gebiet vorstellt.

Beweis. Da

$ub \Subset b$	$a \Subset a + v$

nach Th. 6), so folgt nach Th. 2) oder 3) aus der Gleichung jedenfalls die Subsumtion, was immer u und v bedeutet haben mochten, und muss nur noch gezeigt werden, dass auch das Umgekehrte für gewisse u, v der Fall ist.

Letzteres mag auf zwei Arten geschehen. Einmal selbständig: Hier genügt es, darauf aufmerksam zu machen, dass falls $a \Subset b$ ist, die Gleichung $43_\times$) schon für $u = a$, ebenso die 43_+) wenigstens für $v = b$ in der That erfüllt sein wird kraft Th. 20).

Sodann auch mittelst Berufung auf Th. 42). Nach diesem Satze kann stets:

$a = ub + vb_1$	$b = ua + va_1 = (u + a_1)(v + a)$

geschrieben werden, indem man das eine der beiden Gebiete a, b linear und homogen durch das andre und seine Negation ausdrückt und die in Betracht kommenden Koeffizienten (die rechts vom Mittelstrich ganz andre sein mögen, als links von demselben) zunächst u und v nennt. Da nun, laut Voraussetzung, nach Th. 38):

$ab_1 = 0$	$a_1 + b = 1$

ist, so folgt aus vorigem durch beiderseitiges Multipliziren mit b_1 resp. Addiren von a_1:

$$ab_1 = vb_1 = 0 \qquad \Big| \qquad a_1 + b = ua + va_1 + a_1 = \\ = ua + a_1 = u + a_1 = 1$$

wonach sich die obige Gleichung vereinfacht zu

$$a = ub + 0 = ub \qquad \Big| \qquad b = 1 \cdot (v + a) = a + v$$

wie zu zeigen war.

Zusatz zu Th. 43). Im Hinblick auf Th. 38) können wir also jetzt sagen, dass auch die Gleichungen:

$$ab_1 = 0 \quad \text{und} \quad a = ub \qquad \Big| \qquad a_1 + b = 1 \quad \text{und} \quad b = a + u$$

oder, wenn man will, auch die:

$$ab = 0 \quad \text{und} \quad b = a_1 u \qquad \Big| \qquad a + b = 1 \quad \text{und} \quad b = a_1 + u$$

einander äquivalent sind.

Es wird der Satz links (indem man x für b sagt) als ein spezieller Fall eines späteren Haupttheorems 50_+) erscheinen.

Anmerkung 1. Man hat wohl zu unterscheiden zwischen *unbestimmten* und *willkürlichen* Gebieten. Die letztern gehören zu den erstern, aber nicht umgekehrt.

Ist b gegeben und a | Ist a gegeben und b

lediglich durch die Anforderung bestimmt, dass es die Subsumtion

$$a \mathrel{=\!\!\!\in} b$$

erfülle, so kann man in der Gleichung

$43_\times$) das u | 43_+) das v

als ein vollkommen *willkürliches* oder arbiträres Gebiet ansehen.

Anders aber, wenn überdies auch das andre der beiden Gebiete a, b gegeben, oder überhaupt nur, falls es auch nicht gegeben ist, noch andern Anforderungen ausser jener Subsumtion unterworfen sein sollte.

Für *gegebene a und b*, z. B., dürfen u und v nicht ganz beliebig angenommen werden.

Vielmehr müssen sie alsdann von der Form sein:

$$u = a + wb_1 \qquad \Big| \qquad v = (a_1 + r)\, b$$

wo nur mehr w resp. r ein beliebiges Gebiet vorstellt — wie wir durch ein späteres Theorem 50_+) in die Lage gesetzt sein werden zu beweisen, indem wir die Gleichung 43) nach der Unbekannten u resp. v auflösen.

Ebenso mag überhaupt jede fernere an a und b gestellte Anforderung eine Einschränkung des Willkürlichkeitsbereichs, der Variabilität von u oder v involviren, gewisse Gebieteklassen als unzulässige Bedeutungen für u oder v ausschliessen.

Ähnlich, wenn man etwa die beiden die Subsumtion $a \mathrel{=\!\!\!\in} b$ nur um-

schreibenden Gleichungen $43_\times$) und 43_+) als gleichzeitig geltende in's Auge fasst, können u und v nicht völlig unabhängig von einander angenommen werden. Vielmehr, wenn eines von diesen beiden Gebieten (eventuell im Einklang mit den für dasselbe angeführten Bestimmungen) festgelegt, gegeben oder irgendwie angenommen ist, muss das andre die Form haben:

$$u = a + sv_1, \qquad | \qquad v = b(u_1 + t),$$

wo nur mehr s, resp. t willkürlich bleibt.

Auch dieses nachzuweisen ist weiter nichts, als eine hier vorgreifend angeführte und als Übungsexempel zu empfehlende Anwendung des weiter unten vorgetragenen Theorems 50_+). Zur Erleichterung von deren Lösung und um auf dieselbe nicht mehr zurückkommen zu müssen, führen wir hier nur noch an, dass u resp. v die Gleichung erfüllen muss:

$$ua_1v + u_1a = 0 \qquad | \qquad vb_1 + v_1bu_1 = 0$$

welche sich ergibt, indem man den Wert von b oder a aus der einen von den beiden Gleichungen 43) in die andre substituirt und dann rechts auf 0 bringt, kurz indem man eines der Symbole a, b aus den Gleichungen 43) eliminirt.

Beispielsweise kann die nach Def. (2) geltende Subsumtion:

$$0 \mathrel{=\!\!\!\in} b \qquad | \qquad a \mathrel{=\!\!\!\in} 1$$

nach Th. 43) umgeschrieben werden in eine Gleichung:

$$0 = ub. \qquad | \qquad 1 = a + v.$$

Doch sind alsdann u und v augenscheinlich nicht vollkommen willkürlich und andrerseits sind sie auch nicht vollkommen bestimmt. Es gelten die Gleichungen (wenn b nicht selbst 0 resp. a nicht selbst 1 ist) nicht für alle, sondern nur für gewisse Gebiete u, v, aber doch für unendlich viele; es muss nämlich u, v von der Form sein:

$$u = wb_1, \qquad | \qquad v = a_1 + r,$$

wo w und r arbiträr bleiben. In der That lag hier ein Fall vor, wo $a = 0$ resp. $b = 1$ völlig bestimmt war, wo es „gegeben“ erscheint.

Anmerkung 2. Wir wollen jetzt im Überblick die *zwölf* Arten zusammenstellen, auf welche nach den bisherigen Sätzen eine Subsumtion $a \mathrel{=\!\!\!\in} b$ in Gestalt einer einzigen Beziehung (zumeist Gleichung) angeschrieben werden kann. Die folgenden Aussagen sind einander äquivalent:

$$a \mathrel{=\!\!\!\in} b \quad \text{und nach 37):} \quad b_1 \mathrel{=\!\!\!\in} a_1;$$

nach 20):

$$a = ab, \qquad b = a + b,$$

woraus nach 32) und 36) auch folgt:

$$a_1 = a_1 + b_1, \qquad b_1 = a_1b_1;$$

nach 38): $\quad ab_1 = 0, \qquad a_1 + b = 1;$

nach 43):

$$a = ub, \qquad b = a + v,$$

woraus nach 32) und 36) auch:

$$a_1 = b_1 + u_1, \qquad b_1 = a_1 v_1$$

— in welchen letzteren Darstellungen u, v und somit auch u_1, v_1, *gewisse* nicht näher bestimmte Gebiete vorstellen, welche in den oben erläuterten Fällen auch als *arbiträre* auszulegen erlaubt ist.

Wie man leicht erkennt kann man obendrein die Gleichungen auch sämtlich durch Subsumtionen ersetzen in folgender Weise:

$$a \mathrel{=\!\!\!\in} ab, \qquad a + b \mathrel{=\!\!\!\in} b$$
$$a_1 + b_1 \mathrel{=\!\!\!\in} a_1, \qquad b_1 \mathrel{=\!\!\!\in} a_1 b_1$$
$$ab_1 \mathrel{=\!\!\!\in} 0, \qquad 1 \mathrel{=\!\!\!\in} a_1 + b$$
$$a \mathrel{=\!\!\!\in} ub, \qquad a + v \mathrel{=\!\!\!\in} b$$
$$b_1 + u_1 \mathrel{=\!\!\!\in} a_1, \qquad b_1 \mathrel{=\!\!\!\in} a_1 v_1$$

und mag so die Zahl der verfügbaren Ausdrucksweisen noch um zehn vermehren.

Bei den sechs ersten von diesen gilt nämlich die umgekehrte Subsumtion nach Th. 6) und Def. (2) ohnehin als allgemeine Formel, sodass Gleichheit eintritt. Und bei den vier letzten Subsumtionen, welche ihrerseits aus der ihnen entsprechenden Gleichung nach Def. (1) hervorgingen, folgt auch aus der Subsumtion wieder die Gleichung nach Th. 6), welches uns $ub \mathrel{=\!\!\!\in} b$ resp. $a \mathrel{=\!\!\!\in} a + v$ liefert, etc., darnach gemäss Prinzip II den Schluss $a \mathrel{=\!\!\!\in} b$ zu ziehen gestattet, welcher äquivalent war der Gleichung (in der freilich u, v eine andre Bedeutung haben kann als in der vorausgesetzten Subsumtion).

Wir geben jetzt die Erklärung des *Funktions*begriffes für (und in seiner Beschränkung auf) den identischen Kalkul.

Definition. „*Funktion*“ *von* x oder $f(x)$ — gelesen: f von x — *nennen wir im identischen Kalkul jeden Ausdruck, welcher aus dem Gebietsymbol* x (eventuell auch seiner Negation x_1) *und irgendwelchen andern Gebietsymbolen aufgebaut ist vermittelst der drei Grundoperationen des Kalkuls als da sind: identische Multiplikation, Addition und Negation.*

Beliebig häufige Verwendung eines jeden Symbols ist bei diesem Aufbau selbstverständlich zugelassen. Auch war die in Klammer gesetzte Einschaltung strenge genommen überflüssig, weil wir zu x zunächst durch Negiren ohnehin x_1 ableiten und diese beiden Bausteine beliebig weiter verwenden können. Von den Operationen dürfen einzelne auch unvertreten sein; ebenso mögen andere Symbole fehlen.

Analog ist unter einer *Funktion* $f(x, y)$ *von* x *und* y, sowie unter einer *Funktion* $f(x, y, z)$ *von* x, y *und* z, u. s. w. irgend ein *Ausdruck*

zu verstehen, *der aus den angegebenen Symbolen* x, y resp. x, y, z, etc. *nebst vielleicht irgend welchen andern vermittelst der drei identischen Spezies aufgebaut ist.*

Die angeführten Symbole x, resp. x, y, resp. x, y, z, etc. heissen die „*Argumente*“ der Funktion $f(x)$, resp. $f(x, y)$, resp. $f(x, y, z)$, etc., welche demnach als eine Funktion von nur *einem* Argumente, resp. von zwei, drei oder mehr Argumenten zu bezeichnen — oder, wie man sogleich erkennen wird, besser gesagt — „anzusehen“ ist.

Im Allgemeinen werden hienach in dem Aufbau des eine Funktion darstellenden Ausdruckes die Argumente $x, y, z, \ldots$ der Funktion *nebst ihren Negationen* $x_1, y_1, z_1, \ldots$ vorkommen, unter sich und mit noch andern Gebietsymbolen, wie $0, 1, a, b, c, \ldots a_1, b_1, \ldots$ verknüpft durch identische Multiplikation oder Addition, wobei zwischen die Verknüpfungen hinein, sowie solchen vorangehend oder nachfolgend, auch die Operation der Negation an irgendwelchen Teilen des Ausdrucks vorgeschrieben sein mag.

Jene „andern“ Gebietsymbole, $a, b, c, \ldots$ welche neben den Argumenten vorkommen mögen, werden — wenn mit Buchstaben dargestellt und als allgemeine Gebiete aufgefasst — auch wol „*Parameter*“ der Funktion genannt.

Zu jedem ein Gebiet darstellenden Ausdruck darf man nach Th. $21_\times$) den Faktor 1 so oft es beliebt hinzusetzen, und nach Th. 30_+) für den einen Faktor 1 schreiben $x + x_1$, für einen zweiten Faktor 1 schreiben $y + y_1$, für einen dritten $z + z_1$, etc. und was hier für den ganzen Ausdruck gesagt ist, gilt ebenso auch für irgend einen Term, ein Operationsglied oder einen Teilausdruck desselben.

Hienach ist offenbar, dass man jeden Ausdruck überhaupt nach Belieben ansehen kann als Funktion von x*), oder von x und y, von x, y und z, etc., *auch wenn er diese Argumente von vornherein gar nicht enthalten sollte.* Mit andern Worten: unter der „beliebig häufigen“ Verwendung der Argumentsymbole in dem Aufbau des Ausdruckes ist oben auch die Nicht-Verwendung derselben, die Enthaltung von ihrer Verwendung, mit zugelassen.

Auch die Unterscheidung zwichen den Argumenten und den Parametern der Funktion erscheint hienach als eine willkürliche: Wenn wir einen Ausdruck als Funktion von $x, y, z, \ldots$ hinstellen, so heisst dies weiter nichts, als dass wir beabsichtigen, sein Verhalten für ver-

---

*) In Bezug auf irgend ein Gebiet y folgt dies nebenbei auch schon aus dem Th. 42).

schiedene Bedeutungen oder Wertsysteme *ebendieser* genannten Argumente zu studiren.

Insofern wir dabei diesen Argumenten andre und andre spezielle Gebiete als Bedeutung unterlegen, ihre Namen festhaltend denselben andre und andre Werte beilegen werden, kann man auch sagen, man lasse die Argumente *sich ändern*, oder sie seien „veränderliche" Gebiete, *Variable.*

Die Parameter der Funktion dagegen, deren jedem wir — etwa im Laufe einer Untersuchung — stets dieselbe Bedeutung untergelegt wissen wollen, nennen wir „beständige" Gebiete oder *Konstante.*

Es kann sein, dass wenn die Bedeutung der Argumente wechselt, diese also geändert werden, auch der als Funktion derselben hingestellte Ausdruck seine Bedeutung wechselt, dass also der Funktionswert sich dann ebenfalls ändert. Ebenso kann es aber auch sich ereignen, dass trotzdem man die Argumente alle denkbaren Wertsysteme (aus der Mannigfaltigkeit unsrer Gebiete) durchlaufen lässt, der Wert der Funktion doch stets der gleiche bleibt, dass er als unveränderlich, „*absolut konstant*" sich herausstellt. Kurz gesagt: die Funktion selbst kann sich als variabel oder aber als konstant erweisen. (Beispiele nachher.)

Im erstern Falle wird die Funktion als die *abhängige* (dependente) Variable bezeichnet, im Gegensatz zu den Argumenten als den *unabhängigen* (independenten) Variabeln — in Anbetracht, dass es bei den letztern in unser Belieben gestellt erscheint, welchen Wertänderungen wir dieselben unterwerfen wollen, wogegen hienach die Veränderlichkeit des Funktionswertes zufolge des für denselben geltenden Ausdruckes sich mit Denknotwendigkeit richtet, mithin als eine durch die Veränderungen, denen man die Argumente einmal unterworfen hat, durchaus „bedingte" erscheint.

Bleibt der Wert einer Funktion stets der gleiche, wenn man einem bestimmten Argument x alle denkbaren Werte aus der Mannigfaltigkeit unsrer Gebiete als Bedeutung unterlegt während die Bedeutung aller übrigen Symbole festgehalten wird, wogegen er sich ändern würde sobald auch die Bedeutung der übrigen Argumente wechselte, so nennt man die Funktion nur „relativ konstant" und zwar *konstant in Bezug auf dieses* genannte *Argument* x. Ebenso kann eine Funktion auch *konstant* sein *in Bezug auf eine bestimmte Gruppe von Argumenten*, indem ihr Wert durch alle möglichen Veränderungen, denen man eben diese Argumente unterwirft, sich nicht beeinflusst erweist. Auch hiezu nachher Beispiele.

Die zwischen Parametern und Argumenten einer Funktion willkürlich gezogene Grenze ist demungeachtet von eminent praktischer Wichtigkeit, in Anbetracht, dass es in der Regel nicht zweckmässig erscheint, einen Ausdruck in seiner Abhängigkeit von *allen* in denselben eingehenden allgemeinen oder literalen Gebietsymbolen *zugleich* zu untersuchen. Zumeist erscheint es nur angezeigt oder geboten, dies in Bezug auf eine gewisse Gruppe der den Ausdruck formal zusammensetzenden Elemente auf einmal zu thun, und diesen als den „Argumenten" der Funktion die übrigen Elemente als ihre Parameter gegenüberzustellen.

Alle hier eingeführten Benennungen sind dem Mathematiker — in ihrer nicht durchaus gleichlautenden, aber doch analogen Anwendung auf das Gebiet der *Zahlen* — längst geläufig. Die mathematische Erklärung der „Funktion" setzt allerdings das Vorhandensein eines „analytischen" oder Formelausdrucks für dieselbe *nicht* voraus, sondern stützt sich lediglich auf die *eindeutige Zuordnung* der Funktionswerte zu den Argumentwerten (resp. -wertsystemen); doch lässt sie wenigstens die analytische Darstellung der Funktionen durch dergleichen Ausdrücke mit zu, und findet auf dem Gebiet der letztern ihre hauptsächlichsten Anwendungen.

Ausserhalb der mathematischen Terminologie wird von „Funktionen" sowol als von „Argumenten" in einem gänzlich davon unabhängigen Sinne gesprochen: Man spricht von der Funktion, im Sinne von Lebensverrichtung, vom Funktioniren, irgend eines Organes des Pflanzen- oder Tierkörpers, auch von dem Funktioniren einer Maschine, überhaupt von der Funktion, der Wirksamkeit irgend eines Mittels zu einem Zwecke. Und ferner pflegt ein Beweisgrund auch als Argument, die Beweisführung, namentlich wenn sie eine rhetorische ist, als Argumentiren oder Argumentation bezeichnet zu werden. Diese Benennungen haben, wie gesagt, gar nichts mit den obigen, an die wir uns hier halten, zu schaffen. Die verschiedenen Anwendungssphären dieser Homonyme liegen aber auch so weit auseinander, dass der vorhandene Doppelsinn nicht sehr verfänglich erscheint.

Ersetzt man in einem als Funktion $f(x)$ betrachteten Ausdrucke das Argument x *durchweg*, wo immer es sich in dem Ausdrucke vorfindet, durch ein spezielles Gebiet a, also namentlich auch x_1 durchweg durch a_1, so wird der durch diese Substitution sich ergebende Ausdruck mit $f(a)$ bezeichnet.

Insbesondre erhält man demnach $f(1)$, indem man x durch 1 und demgemäss x_1 durch 0 durchweg in $f(x)$ ersetzt — wobei man die durch die Theoreme 21), 22) und eventuell 30) angezeigten Vereinfachungen oder Reduktionen des Ausdrucks eintreten lassen kann. Ebenso resultirt $f(0)$ aus $f(x)$, indem man 0 für x und 1 für x_1 einsetzt.

Obige Bemerkung gilt auch, wenn a einen zusammengesetzten Ausdruck bezeichnet, und ist hienach, sobald $f(x)$ gegeben ist, auch die Bedeutung von $f(bc)$, $f(a+b)$, etc. ohne weiteres klar.

Analog entsteht $f(a, b)$ aus $f(x, y)$, indem man a für x und b für y (somit auch a_1 für x_1 und b_1 für y_1) in letzterm Ausdruck substituirt. Und so weiter.

Wird ein die Gebietsymbole $x, y, \ldots$ enthaltender Ausdruck als Funktion von diesen Argumenten mit $f(x, y, \ldots)$ bezeichnet, so verfügt man damit über eine zweite Darstellung desselben und diese wird, gegenüber dem *„aktuellen"* Ausdruck der Funktion in Gestalt des ursprünglichen Ausdruckes, bezeichnet als die *„symbolische"* Darstellung derselben. Eine Funktion wird darnach „symbolisch" dargestellt, indem man hinter einen „Funktionsbuchstaben" f oder $\varphi, \psi, \chi, F, \Phi, \Psi, X, \ldots$ in eine Klammer und durch Kommata getrennt die Namen der Argumente in unabänderlich festzuhaltender Reihenfolge schreibt.

Der Funktionsbuchstabe ist ein „Operationssymbol", aber nicht ein Gebiets- oder Klassensymbol, und darf mit einem solchen durchaus nicht verwechselt werden. Sähe man z. B. bei $f(a + b)$ das f für ein Gebiet an, so würde diesem Ausdruck eine ganz andere als die vorhin erläuterte Bedeutung zukommen, derselbe würde nämlich dann für das Produkt $f \cdot (a + b) = f \cdot a + f \cdot b$ gehalten werden müssen. Es empfiehlt sich also zum Funktionsbuchstaben einen solchen zu wählen, der nicht schon anderweitig als Gebietsymbol vorkommt.

Dass ein Buchstabe als Funktionsbuchstabe gelten solle ist jedoch in der Regel schon ohne ausdrückliche Vereinbarung ersichtlich. Sagen wir z. B. $f(x)$, oder auch $f(0)$, $f(1)$ und dergleichen, so gibt sich das eingeklammerte Symbol schon dadurch als ein Argument oder Argumentwert — mithin das davorstehende als Funktionsbuchstabe — zu erkennen, dass es mit einer Klammer umschlossen ist, die ohne solche Absicht als eine „überflüssige" zu verwerfen wäre (vergl. Anhang 2). Und sagen wir $f(x, y, \ldots)$ so zeigen auch die Symbole trennenden Kommata deren Bestimmung, Argumente zu repräsentiren, an.

Haben wir nun etwa eine Funktion $f(x, y, z)$, so wird der Ausdruck $f(y, z, x)$ nicht wieder eben diese, sondern diejenige Funktion vorstellen, deren Ausdruck aus dem gegebenen hervorgeht, indem man x durch y, daneben y durch z und z durch x durchweg ersetzt. Ebenso, wenn $f(x, y)$ gegeben ist, bedeutet $f(y, x)$ das Ergebniss einer Vertauschung von x und y miteinander im gegebenen Ausdrucke, u. s. w.

Leicht erhellen nunmehr die *Vorteile*, welche durch die symbolische Darstellung der Funktionen erzielbar sind und im Hinblick auf welche eben solche Darstellung in die Wissenschaft eingeführt wurde.

Bei allen Untersuchungen von irgend allgemeinem Charakter ist es eine Sache von erster Wichtigkeit, zu wissen, in welcher Weise sich die Bedeutung eines Ausdruckes richtet nach den Bedeutungen der ihn zusammensetzenden Terme von allgemeiner Natur. Will man diese Abhängigkeit erforschen, so muss man den letzteren als Argumenten andere und andere Bedeutungen unterlegen, Werte beilegen,

man muss dieselben sich ändern lassen oder sie variiren, um sodann die zugehörigen Werte in's Auge zu fassen, welche unser Ausdruck dabei annimmt.

Die „Einsetzung" oder „*Substitution*" eines speziellen Wertes für ein bestimmtes Buchstabensymbol, oder auch eines Wertsystemes für eine ganze Gruppe von solchen, wird darum eine der am häufigsten geforderten Verrichtungen in der Wissenschaft sein. Und unter Umständen, wenn etwa alle Werte einer bestimmten Klasse von Werten der Reihe nach für ein Symbol eingesetzt werden sollten, kann der ermüdende Prozess dadurch abgekürzt, vereinfacht werden, dass man statt dessen auf einmal einen allgemeinen Ausdruck für dieses Symbol substituirt, welcher die Werte jener Klasse, und nur diese, sämtlich umfasst, dass man anstatt der Einzelwerte selbst einsetzt den Ausdruck der ganzen Klasse von Werten. So wird es oft erforderlich auch einen zuweilen recht komplizirten Ausdruck für ein Buchstabensymbol zu substituiren, sogar nicht selten gleichzeitig ein ganzes System von Ausdrücken für ein System von Argumenten.

Die Operation der Einsetzung läuft im wesentlichen auf ein Kopiren, Abschreiben, Reproduziren des gegebenen Ausdruckes hinaus, wobei man nur dessen eingedenk bleiben muss, sobald man beim Abschreiben auf eines der zu ersetzenden Symbole stösst, dass man dasselbe nicht unverändert kopirt, sondern den eben dafür einzusetzenden Ausdruck nimmt, denselben — nötigenfalls in eine Klammer eingeschlossen — hinsetzt, um darnach in dem solchergestalt modifizirten Abschreibeverfahren wieder fortzufahren. An der Schultafel kann der Prozess durch Auslöschen der zu ersetzenden Symbole mit dem Kreideschwamme und Einschreiben der einzusetzenden Werte in die leeren Räume verdeutlicht werden; jedenfalls ist unerlässlich, dass der Anfänger in der Ausführung solch elementaren Prozesses sich eine gewisse Übung erwerbe.

Es kann nun der aktuelle Funktionsausdruck ein durch ein anderes zu ersetzendes Symbol hundert mal, ja unbegrenzt, „unendlich" oft enthalten, wie das Beispiel zeigen mag:

$$f(x) = a + x\,(b + x_1\,[a + x\,\{b + x_1\,(a + x\,(\cdots\cdots))\}])$$

— in welchem der Ausdruck freilich in den einfacheren $f(x) = a + xb$ auch zusammengezogen werden könnte, während derartige Vereinfachungen vielleicht nicht immer ausführbar erscheinen. Da wäre es nun äusserst ermüdend, resp. gar nicht vollständig durchführbar, das Argument x durch einen komplizirten Ausdruck — sagen wir

$$(ab_1 + a_1 b)\,(cd + c_1 d_1)$$

— durchweg in Wirklichkeit zu ersetzen.

Die symbolische Funktionsdarstellung *erspart* uns aber die Nötigung

zu dieser Arbeit, führt dieselbe zurück auf die *ein*malige Ersetzung des x an der Stelle, wo es als Argument aufgeführt war, durch den Ausdruck, welcher dafür einzusetzen ist. So wird in unserm Beispiele schon

$$f\{(ab_1 + a_1b)(cd + c_1d_1)\}$$

das Ergebniss der verlangten Operation vorstellen, und für die Zwecke allgemeiner Überlegungen genügt es zumeist, die Operation solchergestalt nur „angedeutet" zu lassen.

So liefert uns die symbolische Funktionsdarstellung allemal einen übersichtlichen und ausdrucksvollen schon durch sich selbst verständlichen Namen für jeden Funktionswert, welcher zu einem gegebenen Argumentwert oder Wertsysteme gehört. —

Ein weiterer Vorteil, den uns diese Funktionsbezeichnung gewährt, ist aber der, dass wir durch sie auch in den Stand gesetzt werden, Eigenschaften, welche *allen* Funktionen zukommen, desgleichen Sätze, welche etwa nur für gewisse Klassen von Funktionen gelten, in der Zeichensprache des Kalkuls konzisest mittelst Formeln darzustellen.

Dieser Vorteil ist für das Studium der Ausdrücke und Funktionen ein ähnlicher und von der gleichen Tragweite, wie der, den der Gebrauch von Buchstaben als *allgemeinen* Symbolen für Gebiete oder Klassen beim Studium der letzteren gewährt. Die Funktionsbuchstaben können auch verwendet werden zur Darstellung von *allgemeinen* Funktionen.

Nunmehr zur Illustration des Gesagten einige **Beispiele** und **Übungen**.

Bedeutet $f(x) = a + a_1x$, worin dem Obigen entsprechend a einen Parameter vorstellen soll, also die Symbole a und a_1 von unveränderter Bedeutung bleiben, wenn man auch dem x irgendwelche verschiedene Bedeutungen unterlegt, sodass die Gebiete a und a_1 als „unabhängig von x" zu bezeichnen, so ist $f(0) = a$ und $f(1) = 1$. Somit ist die Funktion sicher mit x veränderlich, wofern nur unter a nicht gerade das Gebiet 1 verstanden wird; sie nimmt ja dann für verschiedene Werte von x mitunter selbst verschiedene Werte an. Weiter ist auch $f(a) = a$, mithin hier zufällig: $f(a) = f(0)$. Dagegen ist wieder $f(a_1) = 1$, somit hier $f(a_1) = f(1)$. Endlich wird $f(b) = a + a_1b = a + b$ — cf. Th. 33_+) Zusatz, und konnten wir auch allgemein den ursprünglichen Ausdruck vereinfachen zu $f(x) = a + x$. —

Für $f(x) = a + bx$ ist ähnlich:

$$f(0) = a = f(a) = f(b_1), \qquad f(1) = a + b = f(b) = f(a_1),$$
$$f(c) = a + bc, \qquad f(c_1) = a + bc_1, \quad \text{etc.} —$$

Für $$f(x) = (a + x)(b + x_1)$$

wird

$$f(0) = a, \quad f(1) = b, \quad f(a) = ab = f(b_1), \quad f(b) = a + b = f(a_1),$$

also wieder, im Allgemeinen, $f(x)$ veränderlich bei veränderlichem x, wirklich „abhängig" von x. Natürlich darf man bei einer speziellen Funktion $f(x)$ die ursprüngliche Abmachung, Konvention, durch welche die Bedeutung dieses Zeichens erklärt wurde, nicht aus dem Auge verlieren. Würde z. B. jemand hier irrtümlich die Gleichung $f(b) = a + b$ als die Erklärung, Definition dieser Funktion f, als Funktion eines Argumentes, das (statt x) den Namen b führte, ansehen, so würde er erhalten:

$$f(a_1) = a + a_1 = 1, \quad \text{anstatt, wie vorhin:} \quad f(a_1) = a + b.$$

Dasjenige was ich aus einem Ausdruck $f(x)$ erhalte, wenn ich für x erst b, hernach für b durchweg a_1 in denselben einsetze, müsste nur dann notwendig als das gleiche erscheinen, wie wenn für x sogleich a_1 in dem Ausdruck eingesetzt worden wäre, wenn dieser b nicht neben x enthielte. —

Versteht man hingegen unter $f(x)$ den Ausdruck:

$$f(x) = a(x + b_1) + b(a_1 + x_1),$$

so wird

$$f(0) = ab_1 + b = a + b, \quad f(1) = a + a_1 b = a + b,$$
$$f(a) = a + b, \quad f(b) = a + b,$$

und so weiter; man erhält für $f(x)$ stets den gleichen Wert

$$f(x) = a + b,$$

was für ein Gebiet man auch unter x verstehen möge; die hier vorliegende Funktion ist faktisch unabhängig von x oder konstant.

Analog wäre

$$f(x) = (a + b_1 x)(a_1 x_1 + b) = ab$$

(bei gegebenen a, b) absolut konstant. Man vergleiche § 18, λ), wo bereits der Beweis für diese Behauptungen geleistet worden ist.

Ebenso würde die Funktion:

$$f(x, y) = a(x + y_1) + y(a_1 + x_1) = a + y$$

zu nennen sein: „konstant in Bezug auf x", wogegen sie, sofern nicht gerade $a = 1$ bedeutet, von y abhängig erscheint. —

Die Funktion $f(x, y) = a(x + y + x_1 y_1)$ ist ebenfalls konstant, und zwar stets $f(x, y) = a$.

Dagegen die Funktion: $f(x, y, z) = xz + y_1 z + x_1 yz$ ist nur in Hinsicht auf x und y konstant, indem sie den Wert haben wird:

$$f(x, y, z) = z.$$

Bedeutet: $\quad f(x, y, z) = ayz_1 + bzx_1 + cxy_1,$

so folgt:

$$f(0, y, z) = ayz_1 + bz, \qquad f(1, y, z) = ayz_1 + cy_1,$$

$$f(x, 0, 0) = cx = f(1, x_1, 1), \quad f(x, 0, 1) = bx_1 + cx, \quad f(x, 1, 1) = bx_1,$$

$$f(0, 0, 0) = 0 = f(1, 1, 1), \quad f(1, 0, 0) = c, \quad f(0, 1, 1) = b,$$

$$f(a, b, c) = abc_1 + bca_1 + cab_1 = f(a_1, b_1, c_1), \quad f(b, c, a) = 0,$$

$$f(c, a, b) = ab_1 + bc_1 + ca_1, \; f(a, b_1, c_1) = ab_1c + bc_1a_1 + cab = ac + a_1bc_1,$$

$$f(a_1, b, c) = abc_1 + bca + ca_1b_1 = ab + a_1b_1c, \quad \text{etc.}$$

Der Leser ermittle auch noch andre Funktionswerte, wie

$$f(x_1, 1, 0), \quad f(x, 1, x), \quad f(x, x_1, 0), \quad f(d, d, d), \quad \text{etc.}$$

44_+) Theorem. *Allgemein ist:*

$$f(x) = f(1) \cdot x + f(0) \cdot x_1.$$

Beweis. In § 17, Zusatz 2 zu Th. 36) haben wir gesehen, dass (und wie) sämtliche im aktuellen Ausdruck von $f(x)$ etwa „angedeuteten“ *Negationen* sich werden „*ausführen*“ lassen, sodass schliesslich der Ausdruck nur noch durch Addition und Multiplikation (ohne Negation) aus lauter Gebietssymbolen aufgebaut erscheint.

Von einem Ausdruck solcher Art haben wir aber in § 13, Zusatz 1 zu Th. 28) ferner gesehen, dass (und auf welche Weise) derselbe immer in seine „letzten Aggreganten“ *zerfällt* werden kann, also dass derselbe als eine Summe, ein (eventuell auch nur *ein*gliedriges) Polynom erscheint von lauter monomischen Gliedern, die nur (eventuell auch *ein*faktorige) Produkte sind von lauter „einfachen“ Gebietssymbolen — irgendwie herausgegriffen aus der Gruppe der in den Ausdruck ursprünglich eingehenden literalen Gebiete und deren Negationen —, dagegen keine Summen mehr als Faktoren aufweisen und ohne jegliche Klammern darum sich anschreiben lassen.

Nachdem in diesem Stadium unser Ausdruck angelangt ist, kann man nun kraft des Kommutationsgesetzes $12_\times$) in einem jeden der erwähnten Monome sämtliche Faktoren, die x sind, desgleichen sämtliche Faktoren x_1, zusammenrücken lassen und ihr Produkt nach dem Tautologiegesetze $14_\times$) je durch einen einzigen Faktor x, resp. x_1 ersetzen [wobei implicite auch das Assoziationsgesetz $13_\times$) nebst Th. $16_\times$) in Wirkung tritt].

Diejenigen Glieder des Aggregates, welche x und x_1 zugleich enthalten, kommen dabei nach Th. $30_\times$), $22_\times$) und 21_+) in Wegfall.

Der Ausdruck erscheint hienach als „*linear*“ in Bezug auf x und x_1, insofern er diese Symbole nicht mehr mit sich selber oder mit-

einander, sondern nur noch mit Parametern multiplizirt zeigen wird. Und zwar hat er, wenn man noch die in Bezug auf x und x_1 „gleichnamigen“ Glieder zusammenzieht, sie nach Th. $27_\times$) „vereinigt“, nämlich x_1 bei all den Gliedern, welche x_1 zum Faktor haben, als gemeinsamen Faktor „ausscheidet“, und ebenso x bei den mit x behafteten Gliedern — nachdem man kraft des Kommutationsgesetzes 12_+) sie hat zusammenrücken lassen — notwendig die Form:

$$f(x) = Ax + Bx_1 + C,$$

wo die „Koeffizienten“ A, B, C die Symbole x und x_1 nicht mehr als Operationsglieder enthalten, (sondern höchstens sich darstellen werden als Summen von Produkten *aus lauter Parametern* oder eventuell auch Negationen solcher).

Jedenfalls nämlich kann man doch die Summe derjenigen Glieder, welche weder mit x noch mit x_1 behaftet waren, nunmehr C nennen und mit A resp. B das Gebiet bezeichnen, in welches — nach Ausführung der geschilderten Operationen — das x resp. x_1 multiplizirt erscheinen wird — vorausgesetzt natürlich, dass die Symbole A, B, C nicht bereits anderweitig als Namen vergeben waren, nämlich nicht selbst schon als Parameter im aktuellen Funktionsausdruck $f(x)$ vorgekommen sind, in welchem Falle denn andere Buchstaben zur Darstellung unsrer Koeffizienten genommen werden müssten.

Hienach lässt also jede Funktion von x im identischen Kalkul sich als eine lineare Funktion von x darstellen.

Dieselbe wäre „homogen“ zu nennen in dem Falle, wo etwa das „Absolutglied“ C sich $= 0$ herausstellte, wo man es dann fortlassen und einfacher: $f(x) = Ax + Bx_1$ schreiben könnte.

Aber auch wenn C nicht verschwindet, kann man unsern Ausdruck vollends homogen machen — sei es durch überschiebendes Multipliziren der vorstehenden Gleichung mit der Gleichung

$$1 = x + x_1$$

— sei es, noch besser, indem man blos das Absolutglied mit dem Faktor 1, der $= x + x_1$ ist, versieht, somit C durch

$$C \cdot 1 = C(x + x_1) = Cx + Cx_1$$

ersetzt.

Hierdurch wird in der That:

$$f(x) = (A + C)x + (B + C)x_1.$$

Der Ausdruck nimmt also schliesslich die „lineare homogene“ Form an (indem wir $A + C$ kürzer a und $B + C$ ebenso b nennen):

$$f(x) = ax + bx_1,$$

in welcher a und b von x (und x_1) unabhängig sind.

Im identischen Kalkul lässt hienach jede Funktion sogar *als eine homogene lineare sich hinstellen* (mit konstanten Koeffizienten).

Diesem Umstand hauptsächlich hat es der identische Kalkul zu verdanken, dass er so erheblich viel leichter zu beherrschen und zu handhaben ist, als die numerisch rechnende Mathematik für deren Ausdrücke und Funktionen eine so einfache typische Grundform nicht angebbar ist.

Die geschilderten Umformungen fanden nun aber sämtlich statt nach allgemein geltenden Theoremen oder Gesetzen des identischen Kalkuls, sodass die Gleichheit zwischen dem ursprünglichen Ausdruck $f(x)$ und dem so gewonnenen $ax + bx_1$ identisch bestehen muss für ganz beliebige, für alle erdenklichen Bedeutungen sämtlicher vorkommenden Buchstaben oder Gebietsymbole — wie denn schon für alle Zwischenstufen der Rechnung die Gleichung zwischen dem Ausdruck $f(x)$, und dessen successiven Transformationen nach dem Distributionsgesetze etc., stetsfort den Charakter einer allgemeinen Formel behielt.

Diese letzte Formel bleibt demnach auch richtig, falls man x durch 1 ersetzt, wobei $x_1 = 0$ zu setzen ist; desgleichen fährt sie fort gültig zu sein für $x = 0$, $x_1 = 1$. Indem man sie für diese speziellen Fälle in Anspruch nimmt, erkennt man aber dass:

$$f(1) = a, \qquad f(0) = b$$

ist und nach Einsetzung dieser Werte von a und b in jene letzte Formel wird unser Theorem bewiesen erscheinen.

Die Darstellung einer Funktion $f(x)$ nach dem Schema des Th. 44_+) wird die „*Entwickelung*“ (development) dieser Funktion nach der Variabeln x genannt.

Durch solches Entwickeln wird die Funktion „linear“ und „homogen“ gemacht in Bezug auf x und x_1.

x und x_1 heissen die „*Konstituenten*“ der Entwickelung, im Gegensatz zu den „*Koeffizienten*“ $f(1)$ und $f(0)$ derselben.

Das Produkt der Konstituenten ist 0, ihre Summe ist 1, nach Th. 30), wogegen die Koeffizienten irgendwelche von einander unabhängig beliebige Werte haben mögen, wie schon die Annahme

$$f(x) = ax + bx_1$$

erkennen lässt.

Nach Boole[4] p. 72 und 73 Fussnote ist das Theorem 44_+) das Analogon des Taylor'schen Satzes in der Funktionenlehre der arithmetischen Analysis.

Die (in der Taylor'schen bekanntlich enthaltene) Mac-Laurin'sche Reihe:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \cdots$$

geht in der That in unser Th. 44_+) über, sobald man annimmt, dass die Zahl x der Formel des Tautologiegesetzes $14_\times$):

$$xx = x \quad \text{oder} \quad x - xx = 0,$$

das heisst der Gleichung:

$$x(1 - x) = 0$$

genüge. Diese quadratische Gleichung hat aber im Gebiet der Zahlen nur die beiden Wurzeln 0 und 1, und wird demnach unter x dann eine dieser beiden Zahlen zu verstehen sein.

Für $x^2 = x$ ist aber auch $x^2 \cdot x = x \cdot x$ oder $x^3 = x^2$, somit auch $x^3 = x$, dann weiter $x^3 \cdot x = x \cdot x$ oder $x^4 = x$, etc., und vereinfacht darnach die obige Reihe sich zu:

$$f(x) = f(0) + x\left\{\frac{f'(0)}{1!} + \frac{f''(0)}{2!} + \cdots\right\};$$

insbesondere gibt dies, für $x = 1$ in Anspruch genommen:

$$f(1) = f(0) + \left\{\frac{f'(0)}{1!} + \frac{f''(0)}{2!} + \cdots\right\}$$

und wenn man aus diesen beiden Gleichungen die in der geschwungenen Klammer $\{\ \}$ stehende Reihe eliminirt, indem man ihren Wert aus der zweiten Gleichung entnimmt und in die erste einsetzt, so kommt:

$$f(x) = f(0) + x\,\{f(1) - f(0)\}$$

oder, anders geordnet:

$$f(x) = f(1) \cdot x + f(0) \cdot (1 - x).$$

Dies ist nun das Th. 44_+) selbst, in Anbetracht, dass wir beim Studium der inversen Operationen des identischen Kalkuls (§ 23) sehen werden, dass in der That $1 - x = x_1$ bedeutet.

Wenn also die (Mac-Laurin'sche) Reihenentwickelung einer Funktion $f(x)$ für die Werte 0 und 1 von x zulässig ist, so fällt sie mit unserm Theorem zusammen. —

Bemerkt sei noch, dass man die Gleichung $xx = x$ in der Arithmetik auch zusammenziehen könnte in $x(x - 1) = 0$, was im identischen Kalkul nicht angängig wäre, cf. § 23.

Wir wollen nun die verschiedenen Phasen der beim Beweise des Theorems 44) auszuführen gewesenen Operationen, die vorstehend abstrakt geschildert sind, durch einige konkrete Beispiele erläutern.

Natürlich bleibt es unbenommen, mit dem schematischen Verfahren auch noch anderweitige Vereinfachungen, die sich unterwegs anbringen lassen, zu verbinden.

Exempel. Sei $f(x) = [\{(ax + bx_1)_1 c + dx\}_1 cx_1]_1$.

Dann gibt die Ausführung der vorgeschriebenen Negationen:

$$f(x) = \{(ax + bx_1)_1 c + dx\} + c_1 + x = (a_1 + x_1)(b_1 + x)c + c_1 + x$$

indem der Term dx von dem x absorbirt wurde.

Durch Ausmultipliziren folgt hieraus:

$$f(x) = a_1 b_1 c + a_1 c x + b_1 c x_1 + e_1 + x = a_1 b_1 c + e_1 + b_1 c x_1 + x$$

wobei wieder zu Anfang der zweite Term in den letzten einging. Ferner kann man aber in der Summe $b_1 c x_1 + x$ nach Th. 33_+) Zusatz den Faktor x_1 unterdrücken und darnach wird auch in unserm

$$f(x) = a_1 b_1 c + e_1 + b_1 c + x$$

der erste Term vom vorletzten aufgesogen und bleibt:

$$f(x) = b_1 c + e_1 + x$$

was — am besten wieder nach dem soeben citirten Satze — homogen gemacht sein wird:

$$f(x) = x + (b_1 c + e_1) x_1 .$$

In der That aber ist hier mit leichtester Mühe schon aus dem ursprünglichen Ausdrucke zu entnehmen, dass:

$$f(1) = [(a_1 c + d)_1 e \cdot 0]_1 = 0_1 = 1 , \quad f(0) = [(b_1 c)_1 e]_1 = b_1 c + e_1$$

ist, womit also die Koeffizienten von x und x_1 richtig angegeben erscheinen.

Exempel. Bedeutet

$$f(x) = (ax + bx_1 + c)(dx + ex_1) gx ,$$

so sind diesmal keine Negationen auszuführen. Durch einfaches Ausmultipliziren, wenn man sich unterwegs nicht die geringste Vereinfachung gestattet, ergäbe sich:

$$f(x) = adgxxx + aegxx_1 x + bdgx_1 xx + begx_1 x_1 x + cdgxx + cegx_1 x .$$

Nach Th. 30_+) fallen nun aber die Terme alle fort, welche x_1 neben x zeigen. Bei den übrigen ist nach Th. $14_\times$) xx sowie xxx durch x allein zu ersetzen und ergibt sich schliesslich durch Vereinigung dieser (bezüglich x) gleichnamigen Terme $adgx + cdgx$ das Resultat:

$$f(x) = (a + c) dgx$$

und dieses wird durch das Th. 44) bestätigt, beziehungsweise noch rascher gewonnen, indem schon aus dem ursprünglichen Ausdrucke direkt sich ergibt:

$$f(1) = (a + c) dg , \qquad f(0) = (b + c) e \cdot 0 = 0 .$$

Exempel. Man entwickle, ohne Benutzung des Satzes, nach x die Funktion:

$$f(x) = (ax_1 + bx)(dx + ex_1)_1 (gx + h)(k + lx_1) \{(mx)_1 (nx_1)_1\}_1$$

und kontrollire dadurch den Satz.

Ausführung der Negationen gibt:

$$f(x) = (ax_1 + bx)(d_1 + x_1)(e_1 + x)(gx + h)(k + lx_1)(mx + nx_1) .$$

Das Ausmultipliziren ohne jegliche Vereinfachung würde hier 64 Glieder geben. Lassen wir aber sogleich diejenigen fort, in welchen x und x_1 zusammentreffen, und multipliziren die Faktoren zunächst paarweise, den ersten

mit dem letzten, etc. schreiben auch gleiche Faktoren nie wiederholt an, so entsteht:

$$f(x) = (anx_1 + bmx)(d_1e_1 + e_1x_1 + d_1x)(gkx + hk + hlx_1).$$

Der Term d_1e_1 (mit $x + x_1$ multiplizirt) wird hier von den beiden folgenden absorbirt, und kommt:

$$f(x) = (ane_1x_1 + bmd_1x)(hlx_1 + gkx + hk) =$$
$$= ane_1hlx_1 + ane_1hkx_1 + bmd_1gkx + bmd_1hkx,$$

also:

$$f(x) = bd_1(g + h)kmx + ae_1h(k + l)nx_1.$$

Mit viel geringerer Mühe erhält man aber dieses Resultat augenblicklich nach dem Th. 44_+), indem sich:

$$f(1) = bd_1(g + h)km, \qquad f(0) = ae_1h(k + l)n$$

schon aus dem ursprünglichen Ausdruck von $f(x)$ — bequemer allerdings nach ausgeführten Negationen — unmittelbar ergibt.

Übungsexempel. Man entwickele

$$f(x) = a(x + b_1) + b(a_1 + x_1),$$

so ergibt sich rein mechanisch, was wir früher § 18, λ) mittelst Kunstgriffen fanden: $f(x) = (a + b)(x + x_1) = a + b$.

Übungsaufgabe. Durch Entwickelung *nach* a zu zeigen, dass:

$$ab(c + d) + (a + b)cd = a(bc + bd + cd) + a_1bcd.$$

Bezeichnet man die linke Seite mit $f(a)$, so ergeben sich in Gestalt von $f(1)$ und $f(0)$ die rechts angeführten Koeffizienten von a und a_1.

Entwickelt man eine Funktion von der Form

$$f(x) = ax + bx_1$$

gemäss dem Th. 44) nach x, so erzeugt sich allemal der gleiche Ausdruck wieder, indem

$$f(1) = a, \qquad f(0) = b$$

sich erweist, d. h.: *Eine bezüglich eines Symbols homogene lineare Funktion ist immer schon nach diesem „entwickelt“.*

Durch das Th. 44_+) erscheint das Th. 42_+) von neuem bewiesen für alle Gebiete $y = f(x)$, die eines analytischen Ausdruckes im identischen Kalkul fähig sind, und erhält letzteres für diese dadurch einen präziseren Inhalt. —

Zusatz 1 zu Th. 44_+) (Boole).

Der Satz lässt von einer Funktion *eines* Argumentes sich leicht ausdehnen auf eine Funktion von zwei, drei, und beliebig vielen Argumenten.

Auch jede solche Funktion kann *nach* (allen) *ihren Argumenten* (zugleich) *„entwickelt“* werden nach den Schemata:

$$f(x, y) = f(1, 1)xy + f(1, 0)xy_1 + f(0, 1)x_1y + f(0, 0)x_1y_1,$$

$$f(x, y, z) =$$

$$= f(1, 1, 1)xyz + f(1, 1, 0)xyz_1 + f(1, 0, 1)xy_1z + f(1, 0, 0)xy_1z_1 +$$

$$+ f(0, 1, 1)x_1yz + f(0, 1, 0)x_1yz_1 + f(0, 0, 1)x_1y_1z + f(0, 0, 0)x_1y_1z_1,$$

und so weiter, und kann man für das Bildungsgesetz der Entwickelung mit Boole folgende Regel aufstellen.

Um die Entwickelung einer Funktion $f(x, y, \ldots)$ von beliebig vielen Argumenten nach ebendiesen zu erhalten, ersetze man in dem Ausdruck der Funktion sämtliche Argumente durch 1 *und multiplizire das Ergebniss mit dem (geordneten) Produkt dieser Argumente. Dadurch bekommt man das Anfangsglied der gesuchten Entwickelung. In diesem ersetze man den letzten Faktor (des „Konstituenten“ oder Produkts der Argumente) durch seine Negation und zugleich das letzte Argument* 1 *(im „Koeffizienten“) durch* 0, *wodurch sich ein zweites Glied der Entwickelung ergibt. In diesen beiden Gliedern ersetze man hierauf den vorletzten Faktor ihres Konstituenten durch seine Negation, zugleich das vorletzte Argument ihres Koeffizienten* (welches noch immer 1 geblieben sein wird) *durch* 0, *und erhält zwei weitere Glieder. In allen vier bisherigen Gliedern ersetze man den drittletzten Faktor durch seine Negation, zugleich das drittletzte Argument im Koeffizienten durch* 0, *wodurch sich vier weitere Glieder ergeben, und so weiter fort,* bis man jeden, auch den ersten, Konstituentenfaktor durch seine Negation, zugleich auch das erste Argument 1 jedes Koeffizienten durch 0 ersetzt hat.

Wenn im Funktionsausdruck, vielleicht neben einem Argumente, auch dessen Negation vorkommt, so muss diese selbstverständlich in 0 verwandelt werden, wenn man das Argument durch 1 ersetzt, und umgekehrt in 1, wenn man das Argument durch 0 ersetzt im Einklang mit einer schon früher statuirten Bemerkung.

Es wurde beim Formuliren der vorstehenden Regel bereits unterweges angedeutet, dass man den hier als ersten erhaltenen Faktor jedes Gliedes wieder als dessen *„Koeffizienten“*, das Produkt der nachfolgenden (Buchstaben-)Faktoren aber, welche Argumente oder Negationen von solchen sind, als seinen *„Konstituenten“* zu bezeichnen habe.

Behufs Beweises von diesem Zusatze betrachte man den Funktionsausdruck $f(x, y, z, \ldots)$ zuerst lediglich in seiner Abhängigkeit von x. Man entwickele ihn nach diesem einen Argument x gemäss dem Schema 44_+). Die Koeffizienten dieser Entwickelung werden dann nur noch als Funktionen von $y, z, \ldots$, hingegen konstant in Hinsicht

auf x erscheinen, indem eben behufs ihrer Gewinnung dieses x durch 1 oder 0 ersetzt werden musste. Hierauf entwickle man jeden dieser Koeffizienten nunmehr nach y, abermals gemäss dem Schema 44_+), setze seinen Wert in den Ausdruck ein und multiplizire aus. Die neuen Koeffizienten werden dann nur noch als Funktionen von $z, \ldots$ dagegen als konstant bezüglich x und y erscheinen; sie können nach z entwickelt eingesetzt werden, und so weiter.

Es wird genügen, den angedeuteten Beweis nur für die Funktion $f(x, y)$ von *zwei* Argumenten wirklich auszuführen, da von diesem besonderen Falle des auszuführenden Beweises der allgemeinere sich nur quantitativ (durch grössere Häufung von Symbolen in den auch häufiger wiederholt zu machenden Ansätzen) unterscheidet. — Dort hat man zunächst:

$$f(x, y) = f(1, y)x + f(0, y)x_1,$$

und dann weiter:

$$f(1, y) = f(1, 1)y + f(1, 0)y_1, \qquad f(0, y) = f(0, 1)y + f(0, 0)y_1.$$

Die Einsetzung dieser Werte in den vorigen Ausdruck gibt nach Ausmultipliziren den zu beweisenden Satz, wie er sich oben angegeben findet. —

Die im obigen Zusatz gegebene Ausdehnung des Th. 44) auf Funktionen von mehr als *einem* Argumente ist zwar theoretisch interessant und wichtig, aber für die Technik des Kalkuls von geringem praktischen Werte, aus dem Grunde, weil man sich bei den vielen zum Teil gleichzeitig geforderten Einsetzungen von Werten 0 und 1 (je für ein Symbol und dessen Negation, oder umgekehrt) allzuleicht versieht, diese zahlreichen Substitutionen auch ermüdend und langweilig sind.

Sollte wirklich die Entwickelung einer gegebenen Funktion nach mehreren Argumenten angezeigt erscheinen, so schlägt man am besten den Weg ein, der uns zum Beweise dieses Zusatzes verholfen hat, d. h. man entwickelt immer nur nach *einem* Argument auf einmal und so nach diesen allen nur successive („fortschreitend", „hintereinander"), wobei man bei jeder Zwischenoperation schon auf möglichste Vereinfachung der Koeffizienten Bedacht nehmen wird.

Wir begnügen uns, hiezu nur ein Exempel zu geben. Sei nach x, y, z zu entwickeln: $f(x, y, z) =$

$$(abxy + a_1b_1)(cd_1xz + c_1dy_1) + (a_1x_1 + b_1y + c_1z + d)(yz + d_1y_1z_1),$$

so entwickelt man am besten zuerst nach y als demjenigen Symbole, welches am häufigsten in dem Ausdrucke vorkommt — sodass durch Ein-

setzung der Spezialwerte 0, 1 für y oder y_1 die beträchtlichsten Reduktionen des letzteren in Aussicht stehen. Es entsteht:

$$f(x, 1, z) = (ab + a_1 b_1) c d_1 x z + (a_1 x_1 + b_1 + c_1 + d) z, \quad (= \text{etc.})$$
$$f(x, 0, z) = a_1 b_1 (c d_1 x z + c_1 d) + a_1 x_1 d_1 z_1.$$

Und hieraus leiten wir ab, wie wenn wir nach z entwickeln wollten:

$$f(x, 1, 1) = ax + a_1 x_1 + b_1 + c_1 + d, \qquad f(x, 1, 0) = 0,$$
$$f(x, 0, 1) = a_1 b_1 (c d_1 x + c_1 d), \qquad f(x, 0, 0) = a_1 b_1 c_1 d + a_1 d_1 x_1,$$

woraus endlich, der Entwickelung nach x entsprechend:

$$f(1, 1, 1) = a + b_1 + c_1 + d, \qquad f(1, 1, 0) = 0,$$
$$f(1, 0, 1) = a_1 b_1 (c d_1 + c_1 d), \qquad f(1, 0, 0) = a_1 b_1 c_1 d,$$
$$f(0, 1, 1) = a_1 + b_1 + c_1 + d, \qquad f(0, 1, 0) = 0,$$
$$f(0, 0, 1) = a_1 b_1 c_1 d, \qquad f(0, 0, 0) = a_1 (b_1 c_1 + d_1).$$

Damit ist denn gefunden:

$$f(x, y, z) = (a + b_1 + c_1 + d)\, xyz + a_1 b_1 (c d_1 + c_1 d)\, x y_1 z + a_1 b_1 c_1 d\, x y_1 z_1 +$$
$$+ (a_1 + b_1 + c_1 + d)\, x_1 y z + a_1 b_1 c_1 d\; x_1 y_1 z + a_1 (b_1 c_1 + d_1)\, x_1 y_1 z_1$$

als die gesuchte Entwickelung.

Das Resultat ist das nämliche, ob man erst nach x entwickelt und dann weiter nach y, oder ob man es erst nach y und dann nach x thut, oder endlich nach beiden zugleich.

Auch stimmt eine Entwickelung nach dem Argumentenpaare x, y und dem Argument z überein mit derjenigen nach dem Argument x und dem Argumentenpaare y, z; sie ist zugleich die Entwickelung nach dem Argumentetripel x, y, z. Man sieht:

Das Entwickeln einer Funktion ist in Hinsicht auf deren Argumente eine kommutative und zugleich assoziative Operation. Reihenfolge und Gruppirung der Argumente, nach denen einzeln oder in Gruppen entwickelt wird, sind dabei nebensächlich; die ganze Anordnung des Entwickelungsprozesses steht in unserm Belieben. Woferne nur allemal ausmultiplizirt wird ist die nach der Gesamtheit der Argumente entwickelte Funktion zugleich entwickelt nach jedem einzelnen dieser Argumente und nach jeder Gruppe von solchen und umgekehrt — abgesehen natürlich von der Anordnung der resultirenden Glieder und der Reihenfolge der zu den Konstituenten derselben zusammentretenden Faktoren, welche Momente ja aber ohne Einfluss auf den Wert des Ergebnisses sind.

Dies alles wird nebenher bei der Durchführung des obigen Beweises ersichtlich und könnte leicht noch näher dargelegt werden. Hinsichtlich z zum Beispiel erscheint die nach x, y, z entwickelte Funktion

in der That *gesondert* in Glieder, welche z selbst und solche, welche z_1 enthalten. Die Glieder von beiderlei Art sind leicht aus dem Gesamtausdruck herauszulesen, wenn sie auch nicht (durchaus) beisammen stehen. Analog bezüglich des y sowie des x. Etc.

Zusatz 2 zu Th. 44_+) (Boole).

Alle Konstituenten der Entwickelung einer Funktion sind zu einander disjunkt, geben nämlich zu irgend zweien multiplizirt das Produkt 0, indem sie sich jedenfalls dadurch von einander unterscheiden müssen, dass mindestens ein Faktor des einen Konstituenten im andern durch seine Negation vertreten erscheint, wonach also das Th. $30_\times$) anwendbar wird.

So ist bei zwei Argumenten in der That:

$$xy \cdot xy_1 = 0, \quad xy \cdot x_1 y = 0, \quad xy \cdot x_1 y_1 = 0,$$
$$xy_1 \cdot x_1 y = 0, \quad xy_1 \cdot x_1 y_1 = 0, \quad x_1 y \cdot x_1 y_1 = 0.$$

Etc. Es wäre nicht uninteressant, doch etwas umständlich, das allgemeine Zutreffen dieser aus dem Bisherigen schon einleuchtenden Thatsache mittelst zwingender Schlüsse genauer darzulegen.

Ebenso gilt:

Die Summe aller Konstituenten ist stets gleich 1 — eine Aussage, die bei *einem* Argumente mit Th. 30_+), bei zwei Argumenten mit dem Th. 34_+) zusammenfällt (für a, b dort x, y gesagt). Bei dreien haben wir:

$$xyz + xyz_1 + xy_1z + xy_1z_1 + x_1yz + x_1yz_1 + x_1y_1z + x_1y_1z_1 = 1$$

Etc. Jene Konstituenten sind nämlich (allgemein) gerade die Glieder des ausmultiplizirten Produktes — cf. Th. 30_+):

$$1 = (x + x_1)(y + y_1)(z + z_1) \cdots,$$

welches als die Entwickelung der konstanten Funktion 1 nach $x, y, z, \cdots$ anzusehen sein wird.

Hat die Funktion n Argumente, so ist die Anzahl ihrer Konstituenten, somit auch der Glieder ihrer vollständig angeschriebenen Entwickelung gleich der n^{ten} Potenz von 2, gleich 2^n. Diese Anzahl ist also 2, 4, 8, 16, 32, 64, $\cdots$ bei 1, 2, 3, 4, 5, 6, $\cdots$ Argumenten.

Anmerkung 1 zu Th. 44_+).

Das duale Gegenstück zu diesem Theorem:

$44_\times$) Th. $$f(x) = \{f(0) + x\}\{f(1) + x_1\}$$

möge hier wenigstens einmal Erwähnung finden; erstmalig ist dasselbe von Herrn Peirce ausgesprochen.

Durch Vergleichung dieses Ausdrucks mit dem vom andern, Th. 44_+) gelieferten, ergibt sich nach ihm die interessante Formel:

$$\{f(0)+x\}\cdot\{f(1)+x_1\} = f(1)\cdot x + f(0)\cdot x_1.$$

Dieselbe würde als „zu sich selbst dual" zu bezeichnen sein, wenn man nur berechtigt wäre die Funktion $f(x)$ sich selber dual entsprechend zu nennen.

Ersetzt man $f(1)$ durch a und $f(0)$ durch b, wo dann a und b als *allgemeine* Gebiete werden aufgefasst werden dürfen, so erhält man jene Formel:

$$(a+x_1)(b+x) = ax + bx_1$$

von Peirce, die wir schon unter $\varkappa$) des § 18 betrachtet haben. —

Gleichwie das Th. 44_+) in eventuell wiederholter Anwendung benutzt werden konnte, um eine Funktion $f(x, y, z, \cdots)$ nach ihren Argumenten in eine Summe zu entwickeln, so kann dies auch mit Th. $44_\times$) geschehen behufs Entwickelung ebendieser Funktion in Gestalt eines Produktes. Diese letztere wird dann das duale Gegenstück der vorigen Entwickelung sein. Z. B. bei zwei Argumenten wird:

$$f(x, y) = \{f(0,0)+x+y\}\,\{f(0,1)+x+y_1\}\,\{f(1,0)+x_1+y\}\,\{f(1,1)+x_1+y_1\}.$$

Etc. Jene *erstere* Entwickelung war nach dem mathematischen Sprachgebrauch zu bezeichnen als (ein) *homogen*(er Ausdruck) in Hinsicht jedes einzelnen sowol, als jeder Gruppe, als auch der Gesamtheit der „Argumentsymbole" (falls in diese wir auch die Negationen der Argumente mit einrechnen); sie war nämlich dadurch gekennzeichnet, dass in jedem Gliede immer *gleichviele* der betreffenden Symbole als Faktoren stehen. (Dabei ist jeder Argumentbuchstabe auch vertreten.)

Analog erscheint diese *letztere* Entwickelung in einer eigentümlichen, *der homogenen dual entsprechenden* Form, die sich dadurch kennzeichnet, dass jeder Faktor der Zerfällung immer von genannten Argumentsymbolen gleich viele als Summanden enthält (so zwar, dass in jedem Faktor auch jeder Argumentbuchstabe entweder in Gestalt des Argumentes selbst oder in Gestalt von dessen Negation als Glied vertreten ist, und dies im Ganzen auf jede mögliche Weise).

Lässt man *alle* in einem Ausdruck f überhaupt vorkommenden Buchstabensymbole als „Argumente" gelten, und entwickelt nach diesen gemäss Th. 44_+), so wird man eine Zerlegung jenes Ausdrucks f in seine *„letzten* Aggreganten" erhalten — in dem schon § 13 zu Th. 28) erörterten Sinne, jedoch in der Regel wol mit dem Unterschiede (vom Ergebniss der dort beschriebenen Prozesse), dass jetzt von den nach Th. 30_+) möglichen Zusammenziehungen von Gliedern, und dem Eingehenlassen überflüssiger Faktoren solcher, kein Gebrauch gemacht ist.

Analog kann man auch das Th. $44_\times$) benutzen, um die Zerfällung

irgend eines Ausdrucks in seine „*letzten* oder Prim-Faktoren“ zu bewerkstelligen.

Anmerkung 2 zu Th. 44). Als Folgerungen fliessen aus diesem Theorem durch beiderseitiges Multipliziren mit x resp. x_1 die Sätze Mc Coll's:

$$xf(x) = xf(1) \quad \text{und} \quad x_1 f(x) = x_1 f(0)$$

und macht derselbe darauf aufmerksam, dass durch Anwendung dieser Schemata manche Rechnungen sich sehr vereinfachen lassen.

Hatten wir z. B. in § 18 unter β_1) auszurechnen: $ab_1(a_1 b + a_1 c_1 + b_1 c_1)_1$, so kann dies so geschehen, dass man den Faktor hinter ab_1 als eine Funktion $f(a)$ von a, oder aber als eine solche $F(b)$ von b betrachtet; darnach ergibt sich nach dem ersten resp. zweiten Schema das Ganze gleich

$$ab_1(0 + 0 + b_1 c_1)_1 = ab_1(b + c) = ab_1 c,$$

resp.

$$ab_1(0 + a_1 c_1 + c_1)_1 = ab_1(c_1)_1 = ab_1 c.$$

Und dergleichen mehr.

Sind Ausdrücke, *an* oder *mit* welchen eine Rechnungsoperation des identischen Kalkuls vorzunehmen ist, nach bestimmten resp. den nämlichen Argumenten „entwickelt“ — und man vermag ja jeden Ausdruck nach gegebenen Argumenten entwickelt darzustellen — so lassen die Rechnungsregeln ganz ausserordentliche Vereinfachungen zu, von welchen jetzt Kenntniss zu nehmen ist: wir haben mit *entwickelten* Funktionen nun rechnen zu lernen.

Vorbemerkung zu Th. 45_+).

Schon nach dem Distributionsgesetze allein ist die *Summe* von nach $x, y, \cdots$ entwickelten Funktionen [ganz ähnlich, wie in der Arithmetik die von Potenzreihen] zu bilden mittelst *additiver Vereinigung der Koeffizienten aller gleichnamigen Glieder* — wobei wir „*gleichnamig*“ jetzt solche Glieder zu nennen haben, welche denselben Konstituenten als Faktor enthalten, sich also höchstens durch ihren Koeffizienten unterscheiden.

So sind z. B. $axy_1 z$ und $bxy_1 z$ zwei gleichnamige Terme in Hinsicht auf die Argumente x, y, z.

In der That haben wir ohne weiteres:

$$(ax + bx_1) + (a'x + b'x_1) = ax + a'x + bx_1 + b'x_1 = (a + a')x + (b + b')x_1,$$

$$(ax_1 + bx) + (cx_1 + dx) + (ex_1 + fx) = (a + c + e)x_1 + (b + d + f)x,$$

$$(axy + bxy_1 + cx_1 y + dx_1 y_1) + (a'xy + b'xy_1 + c'x_1 y + d'x_1 y_1) =$$

$$= (a + a')xy + (b + b')xy_1 + (c + c')x_1 y + (d + d')x_1 y_1,$$

und so fort. Die Summe von Funktionen, welche nach gewissen für

sie alle gemeinsamen Argumenten entwickelt sind, wird hienach ebenfalls wieder nach diesen entwickelt erhalten, und bedarf die vorstehende Regel für den auch nur mit den ersten Elementen der Buchstabenrechnung Vertrauten keiner besonderen Betonung; sie versteht sich ohnehin. Aber auch:

45_+) Theorem. *Um das Produkt von Funktionen „auszurechnen", welche nach denselben Argumenten entwickelt* und geordnet *sind, braucht man nur die Koeffizienten der gleichnamigen* resp. gleichstelligen *Glieder miteinander zu multipliziren* und hinter deren Produkte die ihnen gemeinsamen Konstituenten zu setzen. Auf diese Weise erhält man das Produkt wieder nach ebendiesen Argumenten entwickelt.

Man hat so gewissermassen nur eine *Superposition*, ein *Übereinanderschieben* mit den die Entwickelungen darstellenden Polynomen vorzunehmen, dergestalt, dass die ohnehin übereinstimmenden Konstituenten der gleichstelligen Glieder zur Deckung kommen, ihre Koeffizienten aber zu neuen Koeffizienten zusammentreten, indem sie sich multiplikativ verbunden nebeneinanderstellen.

In der That ist:

$$(ax+bx_1)(a'x+b'x_1) = aa'x + bb'x_1,$$
$$(ax_1+bx)(cx_1+dx)(ex_1+fx) = acex_1 + bdfx,$$
$$(axy+bxy_1+cx_1y+dx_1y_1)(a'xy+b'xy_1+c'x_1y+d'x_1y_1) =$$
$$= aa'xy + bb'xy_1 + cc'x_1y + dd'x_1y_1,$$

etc. Beweis durch (mentales) Ausmultipliziren nach der Multiplikationsregel für Polynome Th. $28_\times$) mit Rücksicht auf den Zusatz 2 zu Th. 44_+):

Indem hier jedes Glied des einen Polynoms oder entwickelten Ausdrucks mit jedem Glied des andern im Geiste zusammengebracht wird, verschwinden alle diejenigen Einzelprodukte, deren Faktoren *verschiedene* Konstituenten enthalten, in Anbetracht, dass ja letztere disjunkt sind — m. a. W. ungleichnamige Glieder aus dem einen und dem andern Polynom entnommen, geben allemal Null zum Produkte. Von Einfluss auf den Wert des Ergebnisses können nur diejenigen Einzelprodukte bleiben, welche gleichnamige Glieder aus dem einen und dem andern Polynom zusammenfassen. In dem Produkt solcher wird aber der in beiden übereinstimmende Konstituent nicht wiederholt als Faktor zu erwähnen, sondern nach dem Tautologiegesetze $14_\times$) nur *ein*mal als Faktor anzuschreiben sein, q. e. d.

Von zweien ist der Satz äusserst leicht auch auf beliebig viele multiplikativ zu verknüpfende Polynome auszudehnen.

Das Theorem ist bereits von Boole gegeben; es bewirkt dass multiplikative Prozesse sich im identischen Kalkul oft ausserordentlich viel bequemer, als in der Arithmetik gestalten.

Zusatz zu Th. 45_+).

Das Theorem ist noch einer naheliegenden Erweiterung fähig, nach welcher überhaupt das Ausmultipliziren von *gleichvielgliedrigen* Aggregaten oft sich vereinfachen wird (auch wenn diese Aggregate *nicht* aus „Entwickelung" nach gewissen Argumenten hervorgegangen). Zur Herstellung des Produktes zweier solchen Aggregate *genügt die multiplikative Verknüpfung ihrer gleichstelligen Glieder*, sobald bekannt ist, dass die Glieder des einen Aggregates *disjunkt* sind mit den *ungleichstelligen* Gliedern des andern — was dann immer auch umgekehrt der Fall sein wird. So muss z. B. sein:

$$(a+b+c)(a'+b'+c') = aa'+bb'+cc',$$

sobald $ab'=0$, $ac'=0$, $ba'=0$, $bc'=0$, $ca'=0$, $cb'=0$ ist. —

46_+) Theorem.

Auch *die Negation einer* nach irgendwelchen Symbolen *entwickelten Funktion wird* nach ebendiesen entwickelt *erhalten, indem man* einfach *die Koeffizienten* des Ausdrucks *negirt*, die Konstituenten aber unverändert lässt; es ist:

$$(ax+bx_1)_1 = a_1x+b_1x_1,$$

$$(axy+bxy_1+cx_1y+dx_1y_1)_1 = a_1xy+b_1xy_1+c_1x_1y+d_1x_1y_1,$$

etc. Beweis 1. Bezeichnet f den Inhalt der Klammer links, das ist eben die zu negirende Funktion, den Neganden, und f' die rechte Seite der zu beweisenden Gleichung, sonach die *angebliche* Negation von f, so ist blos zu zeigen, dass

$$f' = f_1$$

d. h. die angebliche Negation in der That die wirkliche ist. Auf Grund der Theoreme 30), wonach ja:

$$ff_1 = 0 \quad \text{und} \quad f+f_1 = 1$$

sein muss, wird dies aber nach dem Hülfstheorem 29) geleistet sein, sobald wir darthun, dass auch:

$$ff' = 0 \quad \text{und} \quad f+f' = 1$$

ist. Beides folgt nun in der That durch Ausführung dieser Multiplikation und Addition gemäss Th. 45_+), indem bei f und f' die Produkte der gleichstelligen Koeffizienten a, a_1; b, b_1; etc. durchweg verschwinden, ihre Summen gleich 1 werden — konform den Theoremen 30), wobei zuletzt Zusatz 2 zu Th. 44_+) in Wirksamkeit tritt.

Der vorstehende Beweis lief mehr auf eine Probe der Richtigkeit, eine Verifikation des Satzes hinaus. Der folgende Beweis ist mehr „heuristisch“, lässt auch erkennen, auf welchem Wege der Satz leicht zu entdecken war.

Beweis 2. Nach Th. 36) ist — zunächst bei *einem* Argumente:
$(ax+bx_1)_1=(ax)_1(bx_1)_1=(a_1+x_1)(b_1+x)=xa_1+a_1b_1+b_1x_1=a_1x+b_1x_1$
wie nach dem Th. § 18, ι) oder $\varkappa$), oder endlich durch völlige Entwickelung des vorletzten Ausdrucks nach x gemäss Th. 44_+) unter Berücksichtigung des Absorptionsgesetzes einzusehen.

Nachdem so für *ein* Argument der Satz gewonnen ist, lässt er sich für zwei Argumente hieraus ableiten, wie folgt:

$$(axy+bxy_1+cx_1y+dx_1y_1)_1=\{(ay+by_1)x+(cy+dy_1)x_1\}_1=$$
$$=(ay+by_1)_1x+(cy+dy_1)_1x_1=(a_1y+b_1y_1)x+(c_1y+d_1y_1)x_1=$$
$$=a_1xy+b_1xy_1+c_1x_1y+d_1x_1y_1.$$

In derselben Weise fortschreitend wird der Satz für immer ein Argument mehr gewonnen [und allgemein für $n+1$ Argumente auf den vorher erledigten Fall von n Argumenten zurückgeführt].

Das Th. 46_+) gestaltet auch das Negiren der Funktionen zu einer bequemen Operation, sobald solche nur „entwickelt“ worden.

Von manchen in meinem Operationskreis[2] gegebenen Sätzen, die ich später durch Herrn Peirce antizipirt, vorweggenommen fand, ist mir wenigstens dieses Theorem geblieben.

Exempel. $(ax+bx_1+c)_1=(a_1x+b_1x_1)c_1=a_1c_1x+b_1c_1x_1$.

Exempel. Nach unserm Satze kann nun die Negation von ab_1+a_1b auf drei Arten hergestellt werden. Der Ausdruck ist nämlich entwickelt sowol nach a für sich, als auch nach b allein, als auch nach a und b zusammen. Im Hinblick auf ersteres bekommt man die Koeffizienten b_1 und b zu negiren, während man die Konstituenten a und a_1 stehen zu lassen hat; es entsteht: $(ab_1+a_1b)_1=ab+a_1b_1$.
In der zweiten Hinsicht muss man die a und a_1 als die Koeffizienten gelten lassen, diese negiren, und b_1, b als Konstituenten unverändert lassen, wodurch a_1b_1+ab somit das gleiche Resultat entsteht.
In der dritten Hinsicht werden in:

$$ab_1+a_1b=0\cdot ab+1\cdot ab_1+1\cdot a_1b+0\cdot a_1b_1$$

die Koeffizienten 0, 1, 1, 0 zu negiren sein, wodurch sich

$$(ab_1+a_1b)_1=1\cdot ab+0\cdot ab_1+0\cdot a_1b+1\cdot a_1b_1$$

also wiederum das alte Resultat ergibt.

Die letzte Betrachtung zeigt, dass *bei der Anwendung des Satzes eine Fehlerquelle verfänglich* ist: *man darf die etwa fehlenden Glieder*

der Entwickelung nicht übersehen, da deren Nullkoeffizienten beim Negiren sich in 1 zu verwandeln haben; m. a. W. man muss die Entwickelung jeweils als eine *vollständige* dargestellt der Anwendung des Satzes zugrunde legen, jeden einzelnen Konstituenten berücksichtigen, wenn er auch, weil in 0 multiplizirt, in dem Ausdruck nicht zu erblicken war.

Thäten wir dies nicht, so erhielten wir ja aus $ab_1 + a_1 b = 1 \cdot ab_1 + 1 \cdot a_1 b$ durch Negiren der Koeffizienten fälschlich $0 \cdot ab_1 + 0 \cdot a_1 b = 0$ als die gesuchte Negation.

Ebenso ist die Klippe zu vermeiden, dass man das Th. $46_\times$) *nicht* etwa *anwende bevor* die (nach den Konstituenten) gleichnamigen Glieder *vereinigt* sind.

So ist z. B. $(a_1 x + a x_1 + b_1 x_1)_1$ nicht $=$

$$= a x + a_1 x_1 + b x_1 = a x + (a_1 + b) x_1, \quad \text{sondern} \quad = a x + (a + b_1)_1 x_1 = a x + a_1 b x_1.$$

Im Hinblick auf die letzten Sätze: Th. 45) nebst Vorbemerkung und Th. 46), kann man zusammenfassend sagen, dass jede an oder mit Funktionen auszuführen vorgeschriebene Operation des identischen Kalkuls sich als die gleiche Vorschrift *überträgt auf die Koeffizienten* von deren Entwickelung. —

Noch sei bemerkt, dass die Negation einer Funktion $f(x)$ in Gestalt von $\{f(x)\}_1$ unbequem zu schreiben ist. Um ein handlicheres Zeichen dafür zu erhalten, mag man definiren:

$$f_1(x) = \{f(x)\}_1, \quad \text{und ähnlich} \quad f_1(x, y) = \{f(x, y)\}_1$$

etc. Darnach wird uns auch bedeuten:

$$f_1(0) = \{f(0)\}_1 \quad \text{und} \quad f_1(1) = \{f(1)\}_1. \text{ —}$$

Es ist zu wünschen, dass man im stande sei jeweils rasch die verschiedenen Werte zu übersehen, deren eine gegebene Funktion des identischen Kalkuls „fähig" ist, welche sie nämlich dadurch zugeteilt erhalten kann, dass man den Argumenten irgendwelche Wertsysteme beilegt.

Um die angeregte Frage über die „Variabilität" irgend einer Funktion zu beantworten, schicken wir eine kurze Betrachtung voraus über *„Mittel"* oder *„Zwischenwerte"*.

Definition. Ein Gebiet x ist ein „mittlerer" Wert oder *„Zwischenwert"* („Mittel") *von a und b* zu nennen, es ist zu sagen: *„x liege zwischen a und b"*, wenn

$$a \Subset x \quad \text{und zugleich} \quad x \Subset b$$

ist. Da hieraus: $a \Subset b$ nach Prinzip II folgt, so ist ersichtlich, dass

von einem „*Mittelwerte*“ nur gesprochen werden kann bei solchen zwei Gebieten, zwischen welchen die Beziehung der Einordnung, Subsumtion besteht, von denen das eine im andern enthalten ist. Dies ist stets vorauszusetzen — oder es wird mit behauptet — sobald wir die Redensart gebrauchen.

Sobald $a ⋹ b$ ist gibt es immer Mittelwerte (mindestens *einen* solchen) zwischen a und b; nach Prinzip I und der Voraussetzung ist nämlich $x = a$ sowol als $x = b$ alsdann ein solcher. Es kann darnach irgend ein Gebiet a als ein Mittelwert zwischen ihm und sich selber hingestellt werden — wie bei der durch die Voraussetzung $a ⋹ b$ mit zugelassenen Annahme $b = a$ zu sehen ist.

Wir gehen nun darauf aus, die allgemeine Form der zwischen a und b liegenden Gebiete, falls es solche gibt, zu finden.

Hier haben wir zunächst das kleine

Hülfstheorem zu Th. 47_+). *Wenn x zwischen a und b liegt, so ist stets:*

$$ax_1 + bx = x,$$

und umgekehrt.

Beweis. Ist x zwischen a und b gelegen, so gilt nach der gegebenen Definition und Th. $38_\times$):

$$ax_1 = 0 \quad \text{und} \quad b_1x = 0.$$

Ersetzen wir darnach in dem Ausdrucke $ax_1 + bx$ das ax_1 durch 0 und dieses durch b_1x, so wird derselbe:

$$ax_1 + bx = b_1x + bx = (b_1 + b)\,x = 1 \cdot x = x$$

wie einerseits zu zeigen gewesen.

Ist andrerseits $ax_1 + bx = x$, so können wir diese Gleichung mit x_1 beiderseits multipliziren („durchmultipliziren“) und erhalten: $ax_1 = 0$ oder $a ⋹ x$ — cf. Th. $38_\times$). Darnach vereinfacht sich aber die Gleichung zu: $bx = x$, was nach Th. $20_\times$) äquivalent ist: $x ⋹ b$. Damit ist also gezeigt dass $a ⋹ x$ und $x ⋹ b$, somit auch $a ⋹ b$ sein muss, d. h. dass in der That x zwischen a und b liegt.

Man könnte dem Satze auch die einfachere Form geben: *Liegt x zwischen a und b, so ist*

$$a + bx = x,$$

in Anbetracht, dass wegen $a ⋹ b$ nach Th. 20_+) $b = a + b$ sein muss. Setzt man in der That diesen Wert für b in den früheren Ausdruck ein, so wird derselbe: $ax_1 + bx = ax_1 + (a + b)\,x = a\,(x_1 + x) + bx = a + bx$.

In dieser vereinfachten Gestalt ist aber der Satz nicht rein umkehrbar, wie in der früheren, vielmehr kann sehr wohl $a + bx = x$ sein, ohne dass doch $a ⋹ x ⋹ b$, ohne dass überhaupt $a ⋹ b$ ist. Bei beliebigem a und b

lässt dies die Annahme $x = a + bw$ erkennen, in welcher auch w ein arbiträres Gebiet vorstellt; denn diese Annahme genügt in der That, wie leicht zu proben, der Forderung $a + bx = x$ — und nebenbei gesagt, wie sich mittelst Th. 50_+) zeigen lassen würde, auch auf die allgemeinste Weise.

Der vereinfachte Satz würde nur so sich umkehren lassen: *Wenn* $a + bx = x$ *und zugleich* $a \Subset b$ *ist, so muss* x *zwischen* a *und* b *liegen.* In der That kommt dann die Voraussetzung, wie so eben gezeigt, auf die des früheren (umgekehrten) Satzes: $ax_1 + bx = x$ hinaus.

Nunmehr beantwortet die aufgeworfene Frage der Satz:

47_+) Theorem. *Stellt* w *ein arbiträres Gebiet vor, so ist:*

$$x = aw_1 + bw$$

die allgemeine Form aller zwischen a *und* b *liegenden Gebiete* — sobald überhaupt zwischen a und b Gebiete liegen können, d. h. $a \Subset b$ ist.

Beweis. Ist irgend ein x zwischen a und b gelegen, so sind immer Werte für w angebbar derart, dass unsre Formel gerade dieses x vorstellt. Ein solcher Wert von w ist sicher x selber, indem für $w = x$ in der That $ax_1 + bx = x$ nach dem vorigen Hülfssatze sein wird.

Umgekehrt muss bei beliebig angenommenem w der Ausdruck $aw_1 + bw$ immer zwischen a und b liegen, sobald nur $a \Subset b$ ist.

Da nämlich dann $b = a + b$ ist, so haben wir ähnlich wie oben:

$$aw_1 + bw = aw_1 + (a + b)\,w = a + bw$$

und folgt erstens $a \Subset a + bw$ nach Th. 6_+), und zweitens, wegen $bw \Subset b$ — cf. Th. $6_\times$) — auch $a + bw \Subset a + b$, d. h. $a + bw \Subset b$. Es ist also $a + bw$ oder $aw_1 + bw$ oder x dann zwischen a und b gelegen, q. e. d.

Im Einklang mit der Anschauung wird also der Ausdruck:

$$x = a + wb$$

uns jeden zwischen a und b liegenden Wert vorstellen und nur solche Werte, sobald nämlich von solchen überhaupt zu sprechen, nämlich $a \Subset b$ oder $a + b = b$ ist.

Der *Mindestbetrag* oder „minimale" Wert des x ist der für $w = 0$ sich ergebende Wert a selber, sein *Höchstbetrag* oder „maximaler" Wert der für $w = 1$ sich ergebende Wert b. Und alle dazwischen liegenden Werte überhaupt erhält man, indem man in einer der beiden obigen Gleichungen w *von* 0 *bis* 1 *variiren* lässt — das heisst, im identischen Kalkul: indem man w alle denkbaren Gebiete unsrer Mannigfaltigkeit vom gänzlich leeren bis zur vollen Tafelfläche als Bedeutung nach einander annehmen, oder wie man sagt „durchlaufen" lässt.

Der Vorgang dieses Durchlaufens ist hier nicht so einfach, wie in

der Arithmetik etwa das Durchlaufen der reellen Zahlen von 0 bis 1, die daselbst ja eine bestimmte Reihenfolge haben.

Zunächst unterscheiden sich nur solche Werte von

$$x = a + wb = a + wa_1 b$$

— cf. Th. 33_+) Zusatz — bei denen der Term $wa_1 b$ verschieden ausfällt. Es kommt nur auf die ausserhalb a zugleich aber innerhalb b liegenden Gebietsteile von w an, wogegen es gleichgültig ist, wie man die innerhalb a oder ausserhalb b fallenden Teile von w festlegt, welche Punkte von a sowie von b_1 man zu w rechnet oder nicht rechnet.

Wenn w den Wert 0 verlässt, so erhalten wir demnach die nächsten Bedeutungen von x, wenn wir w nur *einen* Punkt des Gebietes $a_1 b$ bedeuten lassen, aber *jeden*, einzeln genommen, successive. Hernach werden wir dem w die Bedeutung jedes denkbaren Punktepaares, Punktetripels, Quadrupels etc. von innerhalb des Gebietes $a_1 b$ unterzulegen haben. Es folgen Punktmengen aus unendlich vielen diskreten Punkten von $a_1 b$, die sich in der Nähe einer oder mehrerer Stellen unendlich dicht häufen, dann solche, die längs eines Linienstücks überall dicht sind, solche Punktmengen, die ein Linienstück stetig ausfüllen, dieses wieder kombinirt mit allen früheren Punkten, Punktmengen, etc. dasselbe verlängert oder dazu ein zweites genommen, und so weiter, dann folgen Flächengebiete aus $a_1 b$ herausgegriffen, dann auch mit früherem kombinirt, etc. Zuletzt die ganze Fläche $a_1 b$ ohne irgend ein Punktetripel, ohne ein gewisses Punktepaar, ohne einen einzelnen Punkt dieser Fläche auf jede denkbare Weise gebildet, zu allerletzt diese Fläche $a_1 b$ voll genommen — immerfort mit beliebiger Besetzung der ausserhalb $a_1 b$ liegenden (dem Gebiete $a + b_1$ angehörigen) Punkte.

Insbesondre fliesst aus Th. 47) jetzt auch das Th. $43_\times$), indem, wenn $a \subseteq b$ ist, auch $0 \subseteq a \subseteq b$, mithin a ein Zwischenwert zwischen 0 und b zu nennen sein wird. Derselbe kann hienach durch $0 + wb$, also wb dargestellt werden, und umgekehrt stellt $a = wb$ stets einen solchen vor.

Nach diesen Vorbetrachtungen wird der Satz verständlich sein:

48_+) **Theorem.**

Eine Funktion im identischen Kalkul liegt immer zwischen dem Produkte und der Summe der Koeffizienten ihrer Entwickelung, und zwar ist sie fähig, *jeden* zwischen diesen beiden Grenzen liegenden Wert (mit Einschluss ebendieser Grenzen) auch wirklich anzunehmen dadurch, dass man für ihre Argumente geeignete Werte wählt.

Beweis — zunächst für *ein* Argument. Sei

$$f = ax + bx_1,$$

so berechnet sich:

$$f \cdot ab = ab \quad \text{und} \quad (a+b) \cdot f = f,$$

daher ist nach Th. $20_\times$):

$$ab \Subset f \quad \text{und} \quad f \Subset a + b,$$

somit f in der That zwischen ab und $a + b$ gelegen.

Ebenso leicht wäre dies auch mittelst $ab + f = f$ und $f + (a+b) = a + b$ zu zeigen gewesen. Desgleichen ganz direkt: Es ist nach $6_\times$) $ax \Subset a$, $bx_1 \Subset b$, woraus durch überschiebendes Addiren folgt: $f \Subset a + b$. Und ferner ist: $f = (a + ab)\,x + (ab + b)\,x_1 = xa + ab + bx_1$, sonach kraft 6_+): $ab \Subset f$.

Daher muss nach Th. 47) nun f sich darstellen lassen in der Form:

$$f = abw_1 + (a + b)\,w.$$

Damit aber diese Gleichung, d. h.

$$ax + bx_1 = ab + w\,(a + b),$$

zu einer richtigen Identität werde, kann man zu jedem gegebenen x ein w angeben, und zu jedem gegebenen w ein x, das sie erfüllt. Für ersteres genügt die Annahme:

$$w = ax + bx_1,$$

für letzteres die Annahme:

$$x = a_1bw_1 + ab_1w,$$

wie man leicht nachrechnet.

In der That ist also f zwischen $a \cdot b$ und $a + b$ auch *jedes* Zwischenwertes fähig, und zwar wird der Ausdruck $ax + bx_1$ einen *gegebenen* Wert f, für den nur

$$ab \Subset f \Subset a + b$$

ist, annehmen, indem man

$$x = a_1bf_1 + ab_1f, \quad \text{somit} \quad x_1 = (a + b_1)\,f_1 + (a_1 + b)\,f$$

nimmt, da nach dem Hülfstheorem zu 47_+) dann sein wird:

$$abf_1 + (a + b)\,f = f.$$

Beweis für *zwei* Argumente. Sei

$$f = axy + bxy_1 + cx_1y + dx_1y_1,$$

so sieht man, dass

$$abcd \cdot f = abcd \quad \text{und} \quad (a + b + c + d) + f = a + b + c + d$$

ist. Nach Th. 20) haben wir also in der That:

$$abcd \Subset f \quad \text{und} \quad f \Subset a + b + c + d,$$

wie dies auch noch auf verschiedene andere Arten wieder nachweisbar wäre.

Der erste Teil des Satzes (soweit er kursiv gedruckt) ist hienach bewiesen, und ist klar, wie man den analogen Beweis auch bei beliebig vielen Argumenten leisten kann.

Nennt man nun:

$$abcd + w(a + b + c + d) = \varphi = abcdw_1 + (a + b + c + d)w,$$

so gibt es zu jedem Wertepaar x, y ein Gebiet w, welches die Gleichung

$$f = \varphi$$

erfüllt, zu einer identisch richtigen macht. Ein solches ist $w = f$ selber, wie äusserst leicht nachzurechnen.

Umgekehrt gibt es aber auch zu jedem beliebig angenommenen oder gegebenen Werte von w (oder f) ein Wertepaar x, y, welches diese Gleichung erfüllt. Ein solches ist z. B.:

$$x = (a+b)c_1d_1w + (a_1+b_1)cdw_1, \quad y = (ab_1 + c)d_1w + (a_1b + c_1)dw_1,$$
$$x_1 = (a_1b_1+c+d)w + (ab+c_1+d_1)w_1, \quad y_1 = \{(a_1+b)c_1+d\}w + \{(a+b_1)c+d_1\}w_1,$$

wie die Probe zeigt.

Um die Behauptung mit möglichst wenig Mühe zu verifiziren rechne man nicht etwa erst die Produkte xy, xy_1, x_1y, x_1y_1 für sich aus, sondern sogleich:

$$axy = ax \cdot ay, \quad bxy_1 = bx \cdot by_1, \quad cx_1y = cx_1 \cdot cy, \quad dx_1y_1 = dx_1 \cdot dy_1;$$

man findet auf diese Weise unmittelbar:

$$axy = ab_1c_1d_1w, \quad bxy_1 = bc_1d_1w, \quad cx_1y = cd_1w, \quad dx_1y_1 = dw + abcdw_1,$$

und da nach Th. 33_+) Zusatz — vergl. auch § 18, γ) — sein muss:

$$ab_1c_1d_1 + bc_1d_1 + cd_1 + d = a + b + c + d,$$

so stimmt die Probe.

Die Art zu schildern, wie ich vorstehende Werte von x, y systematisch fand, würde hier noch zu weit führen und sei darüber blos im Allgemeinen auf den § 24 verwiesen.

Da nun nach Th. 47_+) φ jeden denkbaren Wert zwischen $abcd$ und $a + b + c + d$ vorstellt, so ist erkannt, dass auch f jeden solchen Wert wirklich annehmen kann.

Das Entsprechende analog bei drei und mehr Variablen darzuthun, ist nicht ganz einfach (Problem!) und wollen wir auf den *independenten* Beweis des *nicht* kursiv gedruckten Teils des Th. 48_+) für diesen Fall nicht eingehen. —

Man kann jedoch diesen Beweis auch *rekurrirend* führen, nämlich, nachdem er für irgend eine bestimmte Anzahl von Argumenten bereits geleistet ist, darthun, dass er auch für die nächst höhere Anzahl

von Argumenten (für *ein* Argument *mehr*) dann gelten muss („Schluss von n auf $n+1$“ oder „Verfahren der vollständigen Induktion“).

Hinreichend wird dies erhellen, wenn wir es für zwei und drei Argumente durchführen.

Ist f der vorige Ausdruck, so kann man, denselben nach y anordnend, schreiben:

$$f = (ax + cx_1)\, y + (bx + dx_1)\, y_1.$$

Nach dem für *ein* Argument (y) bereits bewiesenen Satze muss also

$$abx + cdx_1 \mathrel{=\!\!\!\in} f \mathrel{=\!\!\!\in} (a+b)\, x + (c+d)\, x_1$$

sein, und kann f jeden zwischen diesen „*Grenzen*“ oder „*einschliessenden* Werten“ gelegenen Wert auch wirklich annehmen. Nach dem für *ein* Argument (x) bewiesenen Satze ist aber $ab \cdot cd$ der Minimalwert des Subjektes von f, links, und $(a+b)+(c+d)$ der Maximalwert seines Prädikates rechts (bei variablem x). Folglich kann f jeden zwischen $abcd$ und $a+b+c+d$ gelegnen Wert wirklich annehmen, q. e. d.

Sei $s = F(x, y, z)$ irgend eine Funktion von drei Argumenten und mögen a, b, c, d, e, f, g, h die Koeffizienten ihrer geordneten Entwickelung heissen, so ist nach z entwickelt:

$$s = F(x, y, 1)\, z + F(x, y, 0)\, z_1,$$

folglich

$$F(x, y, 1) \cdot F(x, y, 0) \mathrel{=\!\!\!\in} s \mathrel{=\!\!\!\in} F(x, y, 1) + F(x, y, 0),$$

d. h.

$$abxy + cdxy_1 + efx_1y + ghx_1y_1 \mathrel{=\!\!\!\in} s \mathrel{=\!\!\!\in} (a+b)\, xy + (c+d)\, xy_1 + (e+f)\, x_1y + (g+h)\, x_1y_1,$$

mithin s jedes Zwischenwertes zwischen dem Minimalwert $ab \cdot cd \cdot ef \cdot gh$ der linken und dem Maximalwert $(a+b)+(c+d)+(e+f)+(g+h)$ der rechten Seite, also zwischen $abcdefgh$ und $a+b+c+d+e+f+g+h$, fähig.

Man hätte auch zuerst nach x, y anordnen und die für *ein* und *zwei* Argumente schon bewiesenen Sätze in der umgekehrten Folge anwenden können. —

Um hiernach die Bedeutungen, welche einem Ausdruck für irgendwelche Werte einer bestimmten Gruppe von Buchstaben zukommen können, sofort zu überschauen, braucht man nur den Ausdruck nach ebendiesen Buchstaben zu entwickeln und alsdann das Th. 48) anzuwenden.

Zusatz zu Th. 48_+).

Jede Menge von arbiträren Gebietssymbolen, die in einer Funktion im identischen Kalkul *vorkommen, lässt sich stets durch ein einziges arbiträres Gebiet ersetzen.*

Behufs Beweises ist nur zu zeigen, dass man *zwei* arbiträre Gebiete u, v jeweils durch *eines* w vertreten lassen kann (ohne dass dies von Einfluss auf den Variabilitätsbereich des Ausdrucks wäre). Auf diese Weise wird man dann die Anzahl der vorkommenden arbiträren Symbole solange fortgesetzt um eins vermindern können, bis sie gleich eins geworden ist.

Denkt man sich aber den die arbiträren Gebiete u, v enthaltenden Ausdruck f nach diesen entwickelt, so wird er nach Th. 44_+) die („bi-")lineare homogene Form haben:

$$f = auv + buv_1 + cu_1v + du_1v_1,$$

und alle Werte, deren dieser Ausdruck fähig ist, sowie nur solche, können nach Th. 48_+) auch von dem folgenden Ausdruck angenommen werden:

$$f = abcd + w(a + b + c + d)$$

und umgekehrt, sodass dieser letztere für eine offen gelassene Bedeutung des Gebietes w gerade so allgemein ist, wie der vorhergehende für unbestimmte u, v.

Die Gesamtheit der Bedeutungen des erstern fällt zusammen mit der Gesamtheit der Bedeutungen des letzteren Ausdrucks, weshalb es gestattet war, *denselben* Buchstaben f zur Bezeichnung beider zu verwenden.

Exempel 1. Auf diese Weise, wenn immerfort u, v, w ganz willkürliche Gebiete vorstellen, vereinfacht sich der folgende Ausdruck linkerhand zu demjenigen rechterhand in der Gleichung:

$$aduv_1 + bcu_1v + v\{ad(b + c) + bc(a + d)\} = w(ad + bc).$$

Es stellt also die linke Seite unter allen Umständen, was immer auch u und v bedeuten mögen, einen Teil des Gebietes $ad + bc$ vor, und zwar jeden gewünschten.

Exempel 2. Es ist ganz allgemein:

$$\{a(u+b_1)+b(u_1+a_1)\}(v+c_1d_1)+\{c(u+d_1)+d(u_1+c_1)\}(v_1+a_1b_1)=a+b+c+d.$$

Die linke Seite ist hier trotz der Unbestimmtheit von u, v ein eindeutiger Ausdruck, sie ist konstant bezüglich u, v, wie man bereits durch die, der Anwendung unsres Zusatzes ohnehin voranzuschickende, *Entwickelung* der linken Seite nach u, v erkennt.

Hier, meinen wir einmal, ist der gemeine Verstand ohne die Technik des Kalkuls nicht ausreichend. Die intuitiv anschauliche Erkenntniss dürfte wol bei vorliegender Aufgabe die Rechnung nicht einholen. Man versuche doch einmal, auch nur für einen konkreten Fall das, was die Gleichung behauptet zu begreifen, indem man etwa

a = Kaufmann, b = Russe, c = Europäer, d = Grundbesitzer, u = gebildet, v = patriotisch
gelten lässt und beginnt, die Bedeutung der linken Seite unsrer Gleichung gemäss der in § 8 und 16 dargelegten Regeln in Worten zu beschreiben!

Man wende nicht ein, dass so komplizirte Ausdrücke nicht vorkommen, blos künstlich ersonnen seien. Solange die Mittel zu ihrer Handhabung und praktisch schon zu ihrer Einkleidung fehlen, solange Methoden und Wege dahin noch nicht einmal eröffnet sind, müssen ja Aufgaben, die solche Ausdrücke involviren könnten, natürlich unzugänglich bleiben. Sofern aber die Philosophie die Ausbildung solch' exakter Methoden verschmähte, müsste sie wol ewig im Phrasentum stecken bleiben, wobei es allerdings unbenommen bliebe, fort und fort in immer neuen Tonarten zu variiren, wie weit man es darin gebracht. Gleichwie vielmehr die reine Mathematik auf dem Zahlengebiete noch immer nicht auf die Höhe gelangt ist, solche Komplikationen zu bewältigen, wie sie die Anwendungen auf selbst verhältnissmässig noch ganz einfache Aufgaben der Physik und Technik ihr zumuten, so werden zweifelsohne auch bei den zu erhoffenden Anwendungen der geläuterten Methoden unsrer Logik auf die Probleme der „wahren Philosophie" (vergl. Descartes — S. 94) die Komplikationen jeder Art nicht ausbleiben.

Exempel 3. Es erweist sich auch nach unserm Zusatze:

$$abuv_1 + (a_1 + b_1)\, u_1 v + u\,(ab_1 + a_1 b) = w$$

als vollkommen unbestimmt oder willkürlich, unbeschränkt jedes Gebiet zu bedeuten fähig, man könnte sagen: geradezu als *„alldeutig"*. —

Die Aufgabe, eine Funktion nach ihren Buchstabensymbolen zu *entwickeln*, deckt sich nicht mit der Anforderung, dieselbe *auf ihren formell einfachsten* Ausdruck zu bringen — wohl aber kann das einschlägige Theorem 44) behufs Lösung der letzteren oft mit Vorteil zugezogen werden.

Während aber jene Aufgabe als eine vollkommen bestimmte sich erwies, so ist solches mit dieser nicht der Fall: es bleibt für eine Funktion zuweilen die Wahl zwischen mehreren gleich einfachen „einfachsten" Ausdrücken. Es genügt dies durch Beispiele zu belegen: so sind — vergl. meinen Operationskreis[2], p. 27, Z. 20 v. o. — die beiden äquivalenten Ausdrücke:

$$a\,(b + c_1) + a_1 b_1 = ab + (a_1 + c_1)\, b_1$$

gleich einfachen Baues und lassen doch sich nicht weiter reduziren; vergleiche auch ein schon in § 18 unter β_1) behandeltes Exempel (wo sich die Methode angegeben findet, die Nichtunterdrückbarkeit eines Operationsgliedes, wo sie vorliegt, nachzuweisen).

Auf diesem Umstande beruht es wol, dass zur Lösung der Auf-

gabe, einen Ausdruck auf seine einfachstmögliche Form zu bringen, eine unfehlbar zum Ziel führende einheitliche Vorschrift nicht bekannt ist, und eine solche sich auch schwerlich aufstellen liesse: vielmehr wird dabei immer Einiges der Willkür und dem analytischen Geschick des Rechners anheimgestellt bleiben.

Miss Ladd und Mr. McColl empfehlen zu dem genannten Zweck das *doppelte Negiren* des — wie wir unbeschadet der Allgemeinheit annehmen können, schon als ein Aggregat von Monomen — gegebenen Ausdrucks, wobei die erste Negation desselben durch Ausmultipliziren, unter Fortlassung verschwindender oder eingehender Terme, erst wieder in Aggreganten zu entwickeln ist, bevor man abermals negirt. Vergl. auch § 27.

Exempel zu dieser Methode von McColl. Gegeben:

$x = a + bc + a_1 b_1 d + a_1 c_1 d,$ also $x_1 = a_1 (b_1 + c_1)(a + b + d_1)(a + c + d_1),$

wo zunächst die beiden Terme a als unverträglich mit dem Faktor a_1 fortzulassen sind. Wir erhalten sonach

$x_1 = a_1 (b_1 + c_1)(bc + d_1) = a_1 (b_1 + c_1) d_1,$ und folglich: $x = a + bc + d$

als den auf seine einfachste Form gebrachten Ausdruck.

Anderes Exempel McColl's. Gegeben:

$$x = ab_1 c_1 + abd + a_1 b_1 d_1 + abd_1 + a_1 b_1 d,$$

also

$$x_1 = (a_1 + b + c)(a_1 + b_1 + d_1)(a_1 + b_1 + d)(a + b + d)(a + b + d_1) =$$

$$= \{a_1 + (b + c)(b_1 + d_1)(b_1 + d)\}(a + b) = (a_1 + b_1 c)(a + b) = a_1 b + ab_1 c,$$

darnach

$$x = (a + b_1)(a_1 + b + c_1) = ab + ac_1 + a_1 b_1 + b_1 c_1.$$

Von diesen vier Gliedern darf nun aber noch das zweite oder aber vierte unterdrückt werden, sodass

$$x = ab + ac_1 + a_1 b_1 = ab + a_1 b_1 + b_1 c_1$$

sich deckt mit dem oben beispielsweise angeführten zweierlei einfachste Darstellungen zulassenden Ausdrucke — vergl. § 18, β_1).

Als ein *bequemeres* Verfahren scheint mir indess die Anwendung von Th. 30_+) und 33_+) Zusatz den Vorzug zu verdienen, wonach man sogleich schliessen kann:

$$x = a\{b_1 c_1 + b(d + d_1)\} + a_1 b_1 (d_1 + d) = a(b_1 c_1 + b) + a_1 b_1,$$

d. h. einerseits

$= a(c_1 + b) + a_1 b_1,$ andrerseits $= ab + (ac_1 + a_1) b_1 = ab + (c_1 + a_1) b_1.$

Beim vorigen Exempel wäre zunächst der Faktor a_1 zu unterdrücken gewesen, hernach in $x = a + bc + (b_1 + c_1) d$ der Faktor $b_1 + c_1$ als die Negation von bc vorstellend.

Eilfte Vorlesung.

§ 20. Spezielle und allgemeine, synthetische und analytische Propositionen: Relationen und Formeln.

Schon von alters her werden in der Logik Urteile auch als „*Propositionen*" bezeichnet, namentlich, wenn sie als Glieder eines Theorems oder einer Beweisführung, Argumentation, auftreten. Wir werden uns dieses Namens auch hier, jedoch in einem ganz bestimmten noch näher zu erläuternden Sinne, bedienen.

Die kategorischen Urteile, mit deren Ausdruck in der Zeichensprache des Kalkuls wir uns *bisher* beschäftigten, erwiesen sich — in § 2 — in der Regel als Subsumtionen, zum Teil auch als Gleichungen, und so wird uns der Name „*Proposition*" *zunächst* herhalten als ein gemeinsamer Name für diese beiden Arten von Behauptungen, als ein kürzeres Wort für „*Subsumtion oder auch Gleichung*" — einerlei ob solche in der Wortsprache oder ob sie in der Zeichensprache des Kalkuls ausgedrückt erscheint, immerhin vorzugsweise im Hinblick auf letztere Darstellungsmöglichkeit.

Späterhin werden wir aber den Begriff der „Proposition" noch weiter fassen. Zu den erwähnten beiden Arten von Aussagen werden nämlich noch andere kommen, welche wie Unterordnungen, Überordnungen, Ungleichungen und anderes mehr, sich ebenfalls in unserer Zeichensprache formelartig darstellen.

Alle Beziehungen, welche denkbar sind zwischen Gebieten unsrer Mannigfaltigkeit, desgleichen also auch zwischen Klassen überhaupt sowie Begriffsumfängen insbesondere, soweit es dabei ankommt auf Vorhandensein oder Nichtvorhandensein gemeinsamer Elemente oder Individuen der unter sich verglichenen Gebiete oder Klassen — sagen wir kurz: alle „Umfangsbeziehungen", sollen, in Worten oder Zeichen statuirt, später schlechtweg *Propositionen* genannt werden. Ihre möglichen Arten zählen wir in § 34 .. 39 vollständig auf.

Als Vorbereitung für die wichtigen Untersuchungen zu denen wir im nächsten Paragraphen schreiten, müssen wir nun die Aufmerksamkeit des Lesers richten auf einige Unterscheidungen, welche sich bei

Betrachtung der Propositionen aufdrängen. Wir müssen uns — unter gewissen Gesichtspunkten — mit einer *Einteilung der Propositionen* beschäftigen. Was wir aber in diesem Betreff demnächst zu sagen haben im Hinblick auf die Subsumtionen und Gleichungen (denen eine Einführung in die Theorie bis jetzt allein zuteil geworden), wird es späterhin ein Leichtes sein auch auf die übrigen Arten von Aussagen zu übertragen, die unter den erweiterten Begriff der „Proposition“ noch fallen werden.

Zunächst zerfallen die Propositionen in *spezielle* und *allgemeine*.

„*Speziell*“ nennen wir eine Proposition, wenn sie als Subjekt und Prädikat, als linke und rechte Seite der Gleichung, überhaupt als Beziehungsglieder“ (der „Umfangsbeziehung“) sowie als Operationsglieder der diese etwa darstellenden Funktionen lediglich vollkommen bestimmte oder eindeutige Gebietsymbole, bestimmte wohldefinirte Klassen enthält — „eindeutig“ in der „abgeleiteten“ Mannigfaltigkeit oder Mn. der Gebiete, der Klassen — kurz: wenn sie nur von speziellen Gebieten oder Klassen handelt.

„*Allgemein*“, genauer: „von unbestimmtem oder allgemeinem Charakter“ nennen wir eine Proposition, wenn obiges *nicht* der Fall ist, wenn also auch Gebietsymbole in ihr vorkommen — sei es als Beziehungsglieder, sei es als Operationsglieder der drei identischen Spezies im Ausdrucke derselben — die von noch nicht völlig bestimmter, vielmehr von teilweise oder völlig unbestimmter, eventuell allgemeiner Bedeutung in der Mannigfaltigkeit der Gebiete resp. Klassen sind.

Beispielsweise sind $0 = 0$, $0 ⋹ 1$, $0 \cdot 1 = 0$, etc. desgleichen $a ⋹ b$, *falls* a und b etwa die in Fig. 1 dargestellten Kreisflächen bedeuten, lauter spezielle Propositionen; ebenso würden *dann* $0 ⋹ a$, $b ⋹ 1$, $ab ⋹ a$ solche exemplifiziren, nicht minder wie $a = ab$, und andere.

Auch die Urteile: „Die Neger sind von schwarzer Hautfarbe“ sowie „Alle schwarzen Krähen sind schwarz“, obwol in der logischen Terminologie als generelle, ja universale (zu deutsch „allgemeine“) *Urteile* zu bezeichnen, sind doch in unserm Sinne nur als *spezielle* Propositionen hinzustellen, und dürfen sie nicht etwa „allgemeine“ *Propositionen* genannt werden.

Man nimmt hier wieder einmal die Gefahren eines Doppelsinnes als naheliegende wahr, und fühlt die Unabweislichkeit einer genaueren Verständigung. Ich muss mich den Sprachreinigern zum Trotze hier gegen die Verdeutschung des Wortes „universal“ erklären, weil ich das Wort „allgemein“ hierselbst in wesentlich abweichendem Sinne — dem lateinischen „generalis“ näher kommend — zu gebrauchen mich genötigt sehe.

Das Subjekt „Neger“ war, als ein Gattungsname, ein vieldeutiger Term in der ursprünglichen, d. i. der Mannigfaltigkeit der *individuellen* (der mittelst Eigennamen darzustellenden) Objekte des Denkens. Es erscheint aber als

ein eindeutiger Term in der abgeleiteten, der Mannigfaltigkeit der *Klassen*, indem es unter den Klassen eine ganz bestimmte, individuelle Klasse vorstellt.

Als allgemeine Propositionen würden $a = ab$, sowie $a \Subset b$, $ab \Subset a$, etc. hinzustellen sein, wenn entweder a, oder b, oder beide Symbole unbestimmte Gebiete oder Klassen vorstellen sollten, wenn die Bedeutung dieser Symbole ganz oder teilweise offen gelassen wäre. Ebenso, wenn a *irgend ein* Gebiet vorstellt (desgleichen, wenn es ein beliebiges in einem bestimmten b enthaltenes Gebiet vorstellte), muss die Proposition $a \Subset 1$ als eine „allgemeine" bezeichnet werden. Etc.

Auf dem Felde der Arithmetik entsprechen unsern „speziellen" Propositionen die „*numerischen*" Gleichungen, welche nur mittelst Ziffern dargestellte individuelle Zahlen („numerische" oder „ziffrige", „digital numbers") enthalten, oder in denen wenigstens, falls Buchstaben in ihnen auftreten sollten, diese, wie $\pi = 3{,}14159 \cdots$, $e = 2{,}71828 \cdots$, $i = \sqrt{-1}$, schon eine konventionell feststehende Zahlenbedeutung haben. Unsern „allgemeinen" Propositionen dagegen entsprechen die „*literalen*" oder Buchstaben-Gleichungen, welche auch Buchstaben als „unbestimmte" oder „allgemeine" Zahlzeichen enthalten, Buchstaben, denen es uns noch freisteht verschiedene Zahlenwerte als Bedeutung unterzulegen.

Solch leicht erkennbares äusserliches Unterscheidungsmerkmal, wie das Auftreten oder Nichtauftreten von Buchstaben in der Arithmetik es bildete, können wir jedoch im identischen Kalkul der Unterscheidung beider Klassen von Propositionen nicht zugrunde legen, weil wir hier auch die speziellen Gebiete oder Klassen stets mit Buchstaben darzustellen pflegen und darzustellen genötigt sind — die beiden Gebiete 0 und 1 ganz allein ausgenommen. Was dort (in der Arithmetik bei i, π, e) als Ausnahme mitanzuführen war, bildet hier (im identischen Kalkul) die Regel!

Spezielle Propositionen erfreuen sich jeweils eines völlig bestimmten Sinnes, und darum ist eine spezielle Proposition immer entweder eine *richtige* oder eine *falsche*.

Die oben angeführten waren Exempel von richtigen speziellen Propositionen. Dagegen würden $1 \Subset 0$, $0 = 1$, und bei der durch Figur 1 erklärten Bedeutung von a und b die Subsumtion $b \Subset a$, die Gleichung $ab = b$, etc. eine falsche spezielle Proposition exemplifiziren; ebenso die verbalen Urteile: „Die Mohren sind weiss" sowie „Einige schwarze Krähen sind nicht-schwarz", und andere mehr.

Die (in unserm Sinne) „allgemeinen" Propositionen können *nicht* so, wie die der vorigen Abteilung, die speziellen, ohne weiteres in richtige und falsche eingeteilt werden, weil sie keinen völlig feststehenden Sinn besitzen. Die Beantwortung der Frage, ob sie als richtig oder falsch erscheinen, wird vielmehr häufig davon abhängen, *welche* Bedeutungen, Werte oder Wertsysteme man den in ihnen vorkommenden Buchstabensymbolen, für welche eine völlig bestimmte Bedeutung eben noch nicht ausgemacht ist (und die darum als „*unbe-*

stimmte" oder „*variabele*" eventuell als „*allgemeine*" Symbole hingestellt werden mögen) beigelegt denkt.

Wohl aber tritt auch hier bei einer Umschau ein grosser Gegensatz zutage:

Wir bemerken — schon unter den bisherigen — solche Propositionen, die richtig werden, *welche* Bedeutungen, Werte oder Wertsysteme man auch den in ihnen vorkommenden variablen Elementen beilegen mag, und solche, bei denen dies nicht der Fall ist.

Erstere nennen wir „*analytische*" Propositionen, die letzteren „*synthetische*".

Hierbei befinden wir uns in vollkommener Analogie mit dem Verfahren der numerisch rechnenden Mathematik, die ihre Buchstabengleichungen in analytische und synthetische einteilt.

Beispiele von „analytischen" Propositionen sind die Subsumtionen resp. Gleichungen:

$$a \Subset a, \quad 0 \Subset a, \quad a \Subset 1, \quad ab \Subset a, \quad a \Subset a + b, \quad a + ab = a,$$
$$aa_1 = 0, \quad a + a_1 = 1, \quad a(b + c) = ab + ac, \quad \text{etc.}$$

Überhaupt jede in den bisherigen Sätzen, d. i. Axiomen („Prinzipien") und Theoremen, als allgemeingültig hingestellte und eventuell bewiesene Subsumtion oder Gleichung wird als eine „analytische" Proposition zu bezeichnen sein.

Analytische Propositionen, in unsrer Zeichensprache dargestellt, heissen mit einem Worte auch „*Formeln*" im strengen Sinn dieses Wortes.

Der Sprachgebrauch mit seinen Inkonsequenzen verwendet freilich manchmal auch das Wort „Formel" als synonym mit (Buchstaben-)*Ausdruck* (expressio, compound term), doch ist diese Verwendung die weitaus seltenere, hat meist einen rhetorischen Beigeschmack und ist eigentlich als inkorrekt zu qualifiziren — so wenigstens für die Mathematik; ich habe nichts dagegen, wenn der Chemiker nicht nur von der Formel für einen chemischen Vorgang, sondern auch von der „Formel" einer Substanz als einer chemischen Verbindung spricht.

In der Mathematik ist die Formel jeweils eine Gleichung (eventuell auch Ungleichung) also eine wirkliche *Behauptung*, nicht aber blos ein Ausdruck, Term oder *Name* für eine Zahl, und analog soll es auch im identischen Kalkul gehalten werden.

Das charakteristische Merkmal der Formel schlechtweg ist demnach in ihrer Allgemeingültigkeit, ist darin zu erblicken, dass sie „erfüllt" ist, gilt, welche Wertsysteme (aus der zugrunde gelegten Mannigfaltigkeit) man auch den in ihr vorkommenden Buchstabensymbolen unterlegt.

Niemals, freilich, kann *hier* solche Allgemeingültigkeit empirisch

nachgewiesen werden, indem man etwa alle erdenklichen Werte und Wertsysteme durchprobirte, dieselben für unsre Buchstabensymbole einsetzend und das Einsetzungsergebniss auf seine Richtigkeit als spezielle Proposition in jedem Falle prüfend. Vielmehr steht uns, wenn wir eine allgemeine Proposition für eine Formel ausgeben, nur die Berufung auf das Gefühl der Evidenz zugebote, mit der wir sei es ihr Schema selbst, sei es dasjenige der Voraussetzungen aus denen sie abgeleitet wurde, sowie der Schlüsse die von da zu ihr hinführten, als denknotwendige erkennen.

Alle übrigen bisher vorgekommenen Propositionen (zunächst sofern die in ihnen auftretenden Buchstaben nicht durchweg ganz spezielle Bedeutungen hatten) sind Exempel von „synthetischen" Propositionen. So namentlich die in unsern Theoremen angeführten Subsumtionen oder Gleichungen, welche als Voraussetzungen oder Bedingungen, desgleichen diejenigen welche dann als Behauptung in dem Theorem hingestellt wurden. Ebenso, wenn zwei Propositionen als einander äquivalent hingestellt wurden, wo dann die eine von der andern und diese von jener bedingt wird, waren es allemal synthetische Propositionen.

Ein einfachstes Beispiel einer synthetischen Proposition ist insbesondere die Subsumtion $a \Subset b$. Diese gilt ja nicht als allgemeine Formel für beliebige Wertepaare oder Bedeutungen von a und b. Es gibt Fälle (illustrirt durch Fig. 1) in welchen sie richtig, andere (illustrirt z. B. durch Fig. 7..11) in welchen sie falsch ist. Ebenso die Gleichung $ab = a$, etc.

Wenn Prinzip II aussagte, unter den Voraussetzungen $a \Subset b$ und $b \Subset c$ gelte die Behauptung $a \Subset c$, oder wenn Th. 37) aussagte, die beiden Subsumtionen $a \Subset b$ und $b_1 \Subset a_1$ seien äquivalent, so waren alle diese Subsumtionen synthetische.

Um eine allgemeine Proposition als eine synthetische nachzuweisen, genügt es schon, ein einziges Wertsystem ausfindig zu machen, anzugeben, welches, für die Buchstaben in sie eingesetzt, eine falsche spezielle Proposition liefert.

So kann $a + b \Subset a$ nur eine synthetische Proposition sein, sowol wenn a und b unbestimmte Gebiete vorstellen, als auch, wenn eines derselben, z. B. b als ein spezieller Kreis gegeben sein sollte. Man braucht nämlich dem a nur die Bedeutung eines ausserhalb b liegenden Kreises beizulegen, um durch die Anschauung zu erkennen, dass alsdann sie falsch wird.

Von den synthetischen Propositionen kann man sagen, dass sie eine *Beziehung* zwischen den in sie eingehenden Gebieten ausdrücken oder etabliren, man kann sie mit einem Wort auch „*Relationen*" (im engeren Sinne) nennen.

So drückt die letztbetrachtete $a + b \Subset a$, wie leicht zu sehen, die Beziehung zwischen den Gebieten a und b aus, dass b in a enthalten ist, was kürzer auch $b \Subset a$ sagen würde. Die analytische Proposition oder Formel $ab \Subset a$ dagegen drückt *keine* Beziehung *zwischen a und b selbst*

aus (wenngleich sie allerdings die Beziehung der Einordnung *von ab in a* ausspricht und mit Recht behauptet); diese lässt sich nicht als eine „Relation" zwischen a und b hinstellen, da ihr alle Gebiete a und b schon so wie so genügen.

Auch die *richtigen speziellen* Propositionen werden „analytische" genannt, wenn sie durch Einsetzung spezieller Werte aus einer Formel, einer analytischen Proposition von allgemeiner Gültigkeit hervorgehen, wenn sie m. a. W. nur eine Formel exemplifiziren, partikulare Anwendungen, Paradigmata einer solchen, mithin von denknotwendigem Schema sind. Und andernfalles werden wir auch jene wieder „synthetisch" nennen; desgleichen mögen die *falschen speziellen* Propositionen mit zu den „synthetischen" gezählt werden.

Darnach ist z. B. jene Aussage: „Die schwarzen Pferde sind schwarz" zwar eine spezielle, gleichwol aber eine analytische Proposition zu nennen. Sie geht nämlich aus dem Th. $6_\times$) $ab \in a$ hervor, wenn man $a =$ schwarz und $b =$ Pferd bedeuten lässt, und gilt wie dieses mit Denknotwendigkeit. Die Aussage gibt uns auch keinerlei Belehrung über diese Klassen a und b, da sie *in unserer Disziplin* auch nicht einmal die Existenz des Subjektes, nämlich schwarzer Pferde unterstellt oder fordert. Ebenso bei: „Der weisse Schnee ist weiss", „Die runden Quadrate sind rund".

Dagegen das Urteil: „Die Mohren sind schwarz" ist eine synthetische spezielle Proposition (und zwar eine richtige); es belehrt über die Hautfarbe der Mohren, und hat zum Schema: $a \in b$, welches, wie erkannt nicht von allgemeiner und denknotwendiger Geltung ist. Definirten wir freilich die „Mohren" als „Menschen von schwarzer Hautfarbe" und setzten diesen Ausdruck für das Subjekt in unser Urteil ein, so würde dasselbe sich nunmehr als ein analytisches (dem obigen ähnlich) darstellen. Solange aber solche Einsetzung nicht geschehen, ist aus dem Urteil selbst seine Selbstverständlichkeit nicht zu erkennen und muss dasselbe immerfort synthetisch genannt werden, um so mehr, als der Begriff der „Mohren" schon anderweitig bekannt und auch durch andere Merkmale als das der schwarzen Hautfarbe definirt sein könnte.

Hienach zerfallen denn *alle* Propositionen wie einerseits in spezielle und allgemeine, so andrerseits in synthetische und analytische, sodass hieraus durch Kombination sich vier Unterklassen ergeben, als da sind die *synthetischen speziellen*, die *synthetischen allgemeinen*, die *analytischen speziellen* und die *analytischen allgemeinen* Propositionen.

Kennzeichen der *„analytischen"* Proposition ist somit die aus ihr selbst ersichtliche *„Selbstverständlichkeit"* derselben, ihre *denknotwendige Geltung* — einerlei, ob sie von allgemeinerem Charakter ist, oder von speziellem, nämlich aus allgemeingültigem Schema durch Einsetzen spezieller Werte für dessen Buchstabensymbole hervorgegangen.

Kennzeichen der *„synthetischen"* Propositionen ist, dass sie solcher *aus ihnen selbst erkennbarer denknotwendiger Geltung ermangeln.*

Den analytischen und den synthetischen Propositionen fällt eine gänzlich verschiedene Rolle in der Wissenschaft zu.

Erstere sind in Bezug auf die Gebiete oder Klassen, über welche sie etwas auszusagen *scheinen*, im Grunde vollkommen *„nichtssagend"*, sie liefern über diese selbst keinerlei Information. Dagegen stellen sie uns, wenn sie von allgemeinem Charakter, wenn sie Formeln sind, *Gesetze des Denkens* dar (und bringen, im Fall sie spezieller Natur, solche zur Anwendung); sie bringen uns Sätze, Theoreme der formalen Logik zum Ausdruck und zum Bewusstsein.

Indem sie als solche eventuell die Gleichheit, Identität zwischen allgemeinen Ausdrücken konstatiren, ermächtigen sie uns, jeden Ausdruck von der Form der linken Seite der Gleichung, wo immer es uns vorteilhaft erscheint, zu ersetzen durch einen andern, nach dem Schema ihrer rechten Seite konstruirten Ausdruck, oder auch umgekehrt (vergl. S. 283). Sie drücken so *fakultativ* anzuwendende *Rechenvorschriften* aus, *garantiren* uns gewisse *Freiheiten in der Umformung von Ausdrücken*, von welchen wir — geschickt, oder zur Unzeit — Gebrauch machen mögen in der Absicht, die Beschreibung von Klassen zu vereinfachen und an Zeichenaufwand, Ausdruckskapital und geistiger Arbeit Ersparnisse zu erzielen, überhaupt um irgendwelche Probleme zu lösen.

Und auch wenn unsere Formeln blos als Subsumtionen erscheinen, gewährleisten sie uns die Erlaubniss, gewisse Substitutionen, falls es uns passend erscheint, vorzunehmen, insbesondre den terminus minor derselben, wo er anderwärts als Prädikat auftritt, durch den major, ihren major, wo immer er als Subjekt auftritt durch ihren minor zu ersetzen; vergl. S. 173. Auch sie statuiren also Lizenzen für die *Umformung*, Transformation — zum wenigsten von Aussagen.

Wenn dann später durch den „Aussagenkalkul" auch solche Theoreme, welche gewisse Behauptungen von bestimmten Voraussetzungen abhängig hinstellen, in der Zeichensprache durch einen einzigen Ansatz, durch *eine* „Formel" darstellbar gemacht werden, so wird sich das zuletzt Gesagte auch auf den so erweiterten Begriff der Proposition und Formel übertragen. Es regeln diese *Formeln* den Übergang von einer Aussagenform zu andern; sie geben uns *allgemeine Schemata für denknotwendiges Folgern, deduktives Schliessen.*

Soviel über die Rolle, welche den analytischen Propositionen, und namentlich den Formeln zufällt, die, soferne sie in Worten dargestellt sind, auch „analytische Urteile" von der Philosophie genannt werden oder als „apriorische Wahrheiten" bezeichnet werden mögen. Vergl. ζ) unsrer Einleitung.

Ich kann mich bei dieser Gelegenheit eines Seitenblicks auf die „Wahrheiten der Mathematik" nicht entschlagen. Soferne diese *Zahlen* betreffen — einerlei ob ganze oder irrationale oder andere — so ist es erst in neuerer Zeit durch die scharfsinnigen Arbeiten namentlich von Hermann Grassmann und den Herrn Weierstrass, Georg Cantor und Dedekind ausser allen Zweifel gestellt worden, dass diese Wahrheiten durchaus nur den Charakter von „*analytischen*" haben (vergl. hiezu unsern § 51), dass mithin Kant's Frage: wie sind synthetische Urteile a priori möglich? wol eine gegenstandslose ist.

Dagegen erscheinen die Axiome der *Geometrie* als „*synthetische*" Propositionen, die eine denknotwendige Geltung nicht zu beanspruchen vermögen und in dieser Hinsicht auf einer Linie stehen mit den Axiomen oder Prinzipien der Mechanik, mit den Theorieen und Hypothesen aller übrigen Teile der Physik oder Naturlehre. Dermalen bildet dies allerdings noch eine, selbst unter den Mathematikern nicht völlig zum Austrag gebrachte Streitfrage. Für den Verfasser kann indess kein Zweifel bestehen, wohin der Sieg sich (vollends) neigen muss, und erscheint mir die Geometrie von hause aus als der erste Teil der Physik, als ursprünglich nur ein Zweig der induktiven und Naturwissenschaften, als solcher zunächst im Gegensatze stehend zur *reinen* Mathematik im engsten Sinne des Wortes, die als streng deduktive Disziplin nur Arithmetik*) und Logik zu umfassen hätte und für Denjenigen, der mit Dedekind die Arithmetik als einen Zweig der Logik ansieht, mit letzterer geradezu zusammenfiele.

Sofern nicht ihre Axiome als in der Natur des physikalischen Raumes begründete einst noch in Zweifel gezogen und modifizirt werden müssen, hat aber die Geometrie, gefolgt von der Geomechanik etc., ihr induktives Anfangsstadium längst schon verlassen und ist, einen rein mathematischen Charakter annehmend, in das deduktive Stadium übergetreten (vgl. S. 42). Sie mag, gleichwie die theoretische Mechanik, aber nicht ohne diese, zur (reinen) Mathematik (im weiteren Sinne) nunmehr gerechnet werden. —

Die *synthetischen* Propositionen, oder Relationen, geben eine Information über die Klassen oder Gebiete, von denen sie handeln; sie dienen also in erster Linie dazu, wirklich *etwas* auszusagen und die Mitteilungsbedürfnisse der Sprache zu befriedigen.

Sofern sie von speziellem Charakter sind, wird diese Information, wie erwähnt, entweder richtig oder unrichtig sein. In diesen Fällen haben alle Klassen, von denen in der Proposition die Rede ist, ihre Definition, Erklärung bereits anderweitig, vorher, oder wenigstens ausserhalb der Proposition, gefunden; die Proposition sagt nur über lauter „*bestimmte*" oder „*bekannte*" Klassen etwas aus.

Anders, wenn die Proposition von allgemeinem Charakter ist, wo sie auch *unbestimmte* Klassen oder deren Symbole enthält.

*) Ich gebrauche das Wort „Arithmetik" hier immer in seiner vollsten Bedeutung, als die Zahlentheorie Algebra, Analysis, Funktionenlehre etc. mitumfassend: als die gesamte Lehre von den Zahlen und ihren Funktionen.

Hier sind dann zweierlei Fälle zu unterscheiden.

Es kann sein, dass es gar keine speziellen Werte *gibt*, dass Gebiete oder Klassen gar nicht denkbar sind, welche, für jene unbestimmten Symbole in die Proposition eingesetzt, dieselbe „erfüllten", nämlich aus ihr eine richtige spezielle Proposition hervorgehn lassen würden.

Von solcher Art wären z. B. die Propositionen:

$$aa_1 = 1, \quad \text{sowie} \quad x + x_1 = 0.$$

Da nach Th. 30) für jede Klasse a, für jedes Gebiet x, doch $aa_1 = 0$, und $x + x_1 = 1$ sein muss, so würden diese Relationen auf die Forderung hinauslaufen, dass $1 = 0$ sein solle.

Dies würde nur zutreffen, wenn die Mannigfaltigkeit, auf die unsre Untersuchungen sich beziehen, von vornherein eine leere wäre, und dass solches auszuschliessen sei, haben wir bereits als ein diesen Untersuchungen zugrunde zu legendes Postulat hingestellt. Für uns wird also eine Gleichung:

$$1 = 0$$

als eine unbedingt zu verwerfende gelten, wir können sie geradezu als den Typus der „*Absurdität*" hinstellen.

Wer sie zugäbe würde auf jegliche Unterscheidung innerhalb der Mn. Verzicht leisten, wie wir schon S. 245 ausgeführt haben. Dem wäre alles „egal"; buchstäblich gälte für Den: „Es ist Alles nichts".

In solchem Falle nennen wir die synthetische Proposition eine „*absurde*".

Insofern sie zu gelten beanspruchte — und dies zu thun ist doch der Endzweck jeder Aussage oder Behauptung — würde die Proposition uns zumuten unter ihren Symbolen uns Gebiete zu denken, die gar nicht denkbar sind. Sie stellte damit an uns eine unerfüllbare Forderung. Auf jedem Felde ist es leicht, Forderungen aufzustellen, welche zu erfüllen unmöglich ist, und so auch auf dem Felde der Logik, auch im identischen Kalkul.

Zuweilen wird auch die Forderung selbst, z. B. die Gleichung

$$x + x_1 = 0,$$

eine „*unmögliche*" genannt; jedoch geschieht dies dann nicht in der suppositio nominalis, indem es ja leicht ist, dieselbe trotz allen Widersinnes behauptend auszusprechen, sondern in der suppositio realis: die Gleichung in Hinsicht dessen, was sie behauptet, als eine erfüllte oder geltende, ist unmöglich.

Eine synthetische Proposition wird demnach auch „absurd" zu nennen

sein, wenn sie mit Denknotwendigkeit — nach den Regeln des Kalkuls — auf die Gleichung $1 = 0$ hinausläuft.

Dass aber auch umgekehrt auf diese Gleichung jede im obigen Sinne absurde Proposition hinauslaufen muss, jede nämlich, die durch kein Wertsystem ihrer unbestimmten Symbole erfüllbar ist, werden wir im Aussagenkalkul sehen.

Der vorige Kontext lässt dann nebenher die Thatsache deutlich werden, dass sobald einmal *ein* Unsinn zugegeben wird, dann auch *jeder* Unsinn mittelst zwingender Schlüsse sich ableiten oder beweisen lässt — sofern wir nämlich als Schema solchen Unsinnes die Behauptung nehmen, dass zwei beliebig herausgegriffene verschiedene Dinge einerlei seien. Gelangten wir vom ersteren zu $0 = 1$, so liess sich auch von da zu $a = b$ fortschreiten.

Ist die allgemeine synthetische Proposition *nicht* absurd, so gibt es Werte oder Wertsysteme, deren Einsetzung in die Proposition (für die in ihr vorkommenden nicht schon anderweitig bestimmten Gebietsymbole) die Wirkung hat, dass eine richtige spezielle Proposition entsteht. Von solchen, die allgemeine in eine richtige spezielle Proposition „verwandelnden“ Wert(system)en sagt man, dass sie die Proposition *„erfüllen“*, derselben *„genügen“*, sie *„bewahrheiten“*.

Man nennt sie auch *„Wurzeln“*, beziehungsweise ein „System von Wurzeln“, dieser Proposition (Gleichung oder Subsumtion etc.) — entsprechend dem bei synthetischen Gleichungen in der Mathematik geltenden Sprachgebrauche.

Sobald die Proposition aber Geltung beansprucht, stellt sie uns vor die Aufgabe, uns unter ihren Buchstabensymbolen solche Gebiete oder Klassen vorzustellen, welche sie „erfüllen“, m. a. W., diese Symbole eben nur bedeuten zu lassen: ein System von „Wurzeln“ der Proposition. Und um dies für jedermann zu ermöglichen, müssen solche Wurzeln mit Hülfe der in der Proposition etwa sonst noch vorkommenden bestimmten oder *„gegebenen“* Gebiete, ihrer sogenannten „Parameter“, beschrieben, durch diese übrigen Gebiete ausgedrückt, *„berechnet“* werden.

Die Ausführung dieses Geschäftes heisst das *„Auflösen“* der Proposition nach den als ihre „Wurzeln“ zu bestimmenden Gebieten als *„Unbekannten“*. Damit sie als solche sogleich erkennbar seien, werden diese erst zu bestimmenden unbekannten Gebiete mit Vorliebe durch die Buchstaben x, y, z, ... dargestellt, im Gegensatz zu den mit den ersten Buchstaben des Alphabets zu bezeichnenden Parametern.

Und zwar erhält man eine „besondere“ oder *„partikulare“* Lösung der Proposition, wenn die Angabe von Wurzeln nur auf *eine* Weise er-

folgt, wenn nur *ein* System von Wurzeln (nach anderer, etwas weiterer Auffassung, wenn nur nicht jedes solche) ermittelt worden, während die *allgemeine* Lösung vorliegt, sobald alle möglichen existirenden Wurzeln(systeme) ermittelt sind, sich dargestellt finden.

Beides fällt zusammen, es liegt schon die „allgemeine Lösung" vor, und wird der Ausdruck „partikulare Lösung" dann besser ausser Kurs gesetzt, falls überhaupt nur *ein* System von Wurzeln existirt, falls also die Unbekannten sich durch die Proposition eindeutig bestimmt erweisen.

Um dies sogleich durch ein einfaches Exempel zu illustriren, so haben wir nach Th. 43) als Auflösung der Subsumtion $x \Subset b$ nach der Unbekannten x den Ansatz: $x = wb$, in welchem w ein willkürliches Gebiet vorstellt, und zwar gibt bei solcher Deutung von w dieser Ausdruck alle erdenklichen Lösungen, er stellt die allgemeine Lösung vor. Wurzel ist hier jedes zwischen 0 und b liegende Gebiet x. Als partikulare Lösungen oder spezielle Wurzeln ergeben sich z. B. durch die Annahmen $w = 0$ und $w = 1$ die Werte $x = 0$ und $x = b$ (hier Minimal- resp. Maximalwert der Wurzeln). Werden mehrere solche Wurzelwerte in einundderselben Untersuchung in Betracht gezogen, so pflegt man sie auch als x_1, x_2, ... unterscheidend zu bezeichnen. Alle Wurzeln fallen hier in *eine* $x = 0$ zusammen, und ist die Lösung eine eindeutig bestimmte, wenn von vornherein $b = 0$ bedeutete.

Dual entsprechend hat man analog $x = a + w$ als die allgemeine Lösung der Subsumtion $a \Subset x$, mit dem Minimalwerte $x_1 = a$ und dem Maximalwerte $x_2 = 1$, wobei für $a = 1$ wieder nur *eine* Wurzel $x = 1$ existiren wird.

Wir ersehen hieraus, wie die allgemeine synthetische Proposition fähig ist und wie ihr die Mission zufällt, gewisse Gebiete oder auch ganze Klassen von Gebieten (oder von Klassen, und Systemen solcher) — gewissen Anforderungen oder Bedingungen entsprechend — zu *„bestimmen"*, dieselben aus der Mannigfaltigkeit der überhaupt denkbaren Gebiete (resp. Klassen und Gebietsysteme) auszeichnend *hervorzuheben*.

Die analytische Proposition vermag nicht, solchem Zwecke dienstbar zu sein; wird z. B. verlangt, dass $xy \Subset x$ sei, so dürfen wir unter x und y uns noch jedes beliebige Paar von Gebieten vorstellen.

Es tritt darnach die Aufgabe an uns heran, uns nunmehr mit dem Problem der *Auflösung von* (synthetischen allgemeinen) *Propositionen* zu beschäftigen, welche Aufgabe wir im nächsten Paragraphen *in einer für den bisherigen Propositionsbegriff erschöpfenden Weise* erledigen werden.

Zum Schlusse geben wir noch rekapitulirend eine Übersicht über die vorstehend nötig gewordenen Unterscheidungen. Die Einteilung der Propositionen, zu der wir uns veranlasst gesehen, veranschaulicht das Schema:

Proposition					
spezielle			*allgemeine*		
wahre		*falsche,*	*synthetische*		*analytische,*
synthetische (Relation, Information)	*analytische* nichtssagend	zugleich *synthetische,* Proposition	*absurde,* unmögliche, *unbedingt falsche* Proposition	*auflösbare, nur bedingt wahre oder falsche* Prop. (Relation)	*unbedingt wahre* Proposition *(Formel)*

Bedeutet p = Proposition, b = speziell (erinnernd an besondere prop., aber nicht im Sinne von partikular), g = allgemein (erinnernd an generalis aber nicht im Sinne von universal),

α = analytisch, σ = synthetisch (Relation),

v = wahr (prop. vera), f = falsch (prop. falsa),

a = absurd, s = auflösbar (prop. solubilis),

so bestehen die Gleichungen resp. Subsumtionen:

$$p = b + g, \quad bg = 0, \quad p = \sigma + \alpha, \quad \sigma\alpha = 0,$$
$$vf = 0, \quad b \subseteq v + f \subseteq p, \quad g\sigma = a + s,$$
$$as = 0, \quad \alpha \subseteq v, \quad a \subseteq f, \quad f \subseteq \sigma.$$

Sonach ist:

$$g \subseteq \sigma + \alpha \quad \text{oder} \quad g = g\sigma + g\alpha,$$

ebenso

$$bv \subseteq \sigma + \alpha \quad \text{oder} \quad bv = bv\sigma + bv\alpha,$$
$$\sigma = bv\sigma + bf + a + s, \quad \alpha = bv\alpha + g\alpha,$$

dazu

$$f = bf + ga, \quad v = bv + g\alpha$$

indem hier nämlich auch

$$sv = sf = 0$$

zu gelten hat.

Nach dem Sprachgebrauch kann eine Relation, wenn sie irrtümlich als eine Formel hingestellt worden, auch als eine „falsche Formel“ qualifizirt werden. In logischer Hinsicht ist dies aber nicht korrekt, denn solche „falsche Formel“ oder „*vermeintliche* Formel“ ist überhaupt keine „Formel“; niemals ist ein Teil von $\sigma \subseteq g\alpha$. Man wird darum die Formeln auch nicht in richtige und falsche einteilen dürfen — so wenig wie etwa die lateinischen Deklinationen! Eine falsche Proposition dagegen ist wirklich eine Proposition, Aussage und Behauptung gewesen.

Auf die spezielle falsche Proposition

$$0 = 1$$

laufen übrigens wie schon angedeutet auch die „absurden“ wesentlich hinaus und werden wir zwischen beiden späterhin keinen Unterschied machen. —

§ 21. Das Auflösungsproblem bei simultanen Gleichungen und Subsumtionen. Das Eliminationsproblem bei solchen.

Um das Einfachste und Wichtigste vorweg zu erledigen, stellen wir an die Spitze den Satz:

49_+) Theorem. *Die Gleichung*

$$ax + bx_1 = 0$$

ist äquivalent einer jeden der beiden Doppelsubsumtionen:

$$b \subseteq x \subseteq a_1 \qquad \textit{resp.} \qquad a \subseteq x_1 \subseteq b_1,$$

d. h. ausführlicher gesprochen, dem Paare von Subsumtionen:

$$b \subseteq x, \quad x \subseteq a_1 \qquad \textit{resp.} \qquad a \subseteq x_1, \quad x_1 \subseteq b_1$$

mit welchem nebenher dem Prinzip II gemäss gegeben ist:

$$b \subseteq a_1 \qquad \textit{sowie} \qquad a \subseteq b_1.$$

Allemal ist also die Unbekannte *zwischen dem Koeffizienten ihrer Negation und der Negation ihres Koeffizienten gelegen.*

Beweis. Nach Th. 24_+) zerfällt die gegebene Gleichung ohne Einbusse an Inhalt in die beiden

$$ax = 0 \quad \text{und} \quad bx_1 = 0;$$

die letztere von diesen ist aber nach Th. $38_\times$) äquivalent der Subsumtion $b \subseteq x$ und die erste äquivalent der $x \subseteq a_1$, und damit ist die erste Doppelsubsumtion $b \subseteq x \subseteq a_1$ nicht nur bewiesen, sondern auch als mit der gegebnen Gleichung äquivalent erkannt.

Das Th. $38_\times$) lässt aber auf vorstehende zwei Gleichungen sich auch noch auf eine zweite Weise anwenden: indem man links, statt des einen, den andern Faktor isolirt; so ergeben sich auch direkt die beiden Subsumtionen $a \subseteq x_1$, $x_1 \subseteq b_1$ des andern Paares, welche zu einfacherer Schreibung sich in die zweite Doppelsubsumtion $a \subseteq x_1 \subseteq b_1$ zusammenziehen lassen.

Überdies folgen aber auch die beiden Subsumtionen des zweiten Paares durch „Konversion mittelst Kontraposition" nach Th. 37) — unter Berücksichtigung von Th. 31) — aus denen des ersten, und ebenso also auch die eine Doppelsubsumtion aus der andern.

Endlich kann man, nachdem die erste Doppelsubsumtion wie vorstehend bewiesen, als der Gleichung

$$ax + bx_1 = 0$$

äquivalent nachgewiesen ist, die zweite auch durch blosse Buchstaben-

vertauschung aus dem damit gewonnenen Satze ableiten. Vertauschung von x mit x_1 und zugleich von a mit b führt nämlich die Gleichung

$$ax + bx_1 = 0$$

nur in sich selbst über und ist darum gleichwie in dieser Prämisse, so auch in deren Konklusionen *gestattet.*

Wir werden im Verlauf der weiteren Untersuchungen erkennen, dass das Th. 49_+) die im Titel des Paragraphen genannten beiden Probleme schon vollständig löst, dass wir nämlich berechtigt sind, das erste Subsumtionenpaar als die „*Auflösung*" der Gleichung

$$ax + bx_1 = 0$$

nach der Unbekannten x hinzustellen, und ebenso das zweite Subsumtionenpaar als deren „Auflösung" nach der Unbekannten x_1 (der Negation der vorigen). Und ferner wird die nebenher mit diesen Subsumtionenpaaren gegebene Relation $a \mathrel{\substack{=\\\in}} b_1$, oder, was damit nach Th. 37) äquivalent sein muss: $b \mathrel{\substack{=\\\in}} a_1$, oder endlich nach Th. $38_\times$) in symmetrischer Fassung angeschrieben:

$$ab = 0,$$

als die „*Resultante*" der Elimination von x (nebst x_1) aus der Gleichung $ax + bx_1 = 0$ zu bezeichnen sein.

Auflösung nebst Resultante fasst die Doppelsubsumtion übersichtlichst zusammen.

Um alles dies zu erkennen, müssen wir uns aber jetzt in einige Betrachtungen von nicht mehr ganz so einfacher Natur vertiefen; wir müssen namentlich noch mit einer andern Form der „Auflösung" Bekanntschaft machen, welche demjenigen, was man in der Mathematik unter der Auflösung, „Wurzel" einer Gleichung versteht, näher kommt, und, wenn sie auch nicht so bequem, wie die (angeblich) im obigen Theoreme dargestellte, mit Worten zu interpretiren sein wird, doch für die Zwecke der Rechnung gewisse Vorzüge beansprucht.

Als mit einer — wie man später übersehen wird — im Grunde nur neuen Fassung des vorigen Theorems müssen wir uns auch mit dem folgenden Theoreme befreunden.

50_+) Theorem. *Die Gleichung*

$$ax + bx_1 = 0$$

ist äquivalent dem Gleichungenpaare:

$$ab = 0 \quad und \quad x = bu_1 + a_1u,$$

worin u ein unbestimmtes Gebiet vorstellt.

Der **Beweis** besteht aus mehreren Teilen.

Im ersten Teile gilt es zunächst zu zeigen, dass $ab = 0$ aus der vorausgesetzten Gleichung folgt. Dies findet sich bereits oben auf eine erste Weise bewiesen. Ich will dafür aber noch einen zweiten Beweis geben:

α) Gilt für gewisse Werte von a, b, x die erste Gleichung, so kann man dieselbe beiderseits einmal mit a, ein andermal mit b multipliziren und die so sich ergebenden Gleichungen überschiebend addiren. Dadurch erhält man:

$$ax + abx_1 + abx + bx_1 = 0\,.$$

Aber die beiden äussersten Glieder linkerhand geben nach der Voraussetzung (zusammen) null. Deshalb vereinfacht sich unser Ergebniss zu:

$$ab(x_1 + x) = 0\,, \quad \text{oder} \quad ab = 0\,,$$

womit gezeigt ist, dass die zweite Gleichung aus der ersten folgt.

Sollte nun also diese zweite Gleichung $ab = 0$ — wir mögen sie etwas vorgreifend schon die *„Resultante"* nennen — von den Koeffizienten a und b der ersten *nicht* erfüllt sein, so kann auch die erste unmöglich gelten, sie kann dann durch keinen Wert von x erfüllt werden — denn, wenn sie für ein gewisses x richtig wäre, so müsste, wie gezeigt, auch die zweite Gleichung gelten, entgegen der soeben gemachten Annahme.

β) Nehmen wir sonach die Gleichung $ab = 0$ als erfüllt an, so muss ferner — was auch immer für ein Gebiet unter u verstanden werden möge — der durch die dritte Gleichung gegebene Ausdruck $bu_1 + a_1u$, für x in die erste Gleichung eingesetzt, dieselbe erfüllen, d. h. jedes durch die dritte Gleichung dargestellte Gebiet x ist dann eine richtige *„Wurzel"* unsrer ersten Gleichung. Denn *die Probe stimmt:* ist

$$x = bu_1 + a_1u,$$

so folgt

$$x_1 = b_1u_1 + au$$

nach Th. 46_+) und 31), und die erstere Gleichung mit a, die letztere mit b durchmultiplizirt liefert beim Addiren:

$$ax + bx_1 = abu_1 + abu = ab(u_1 + u) = ab \cdot 1 = ab = 0$$

wie behauptet worden.

Man sieht jedoch, dass die Probe für das Erfülltsein der Gleichung durch die angebliche Lösung nur insofern stimmt, als die Resultante

eben erfüllt ist, denn durch die Einsetzung verwandelte sich die Gleichung zunächst in jene Resultante.

Ohne Rücksicht auf das Erfülltsein oder Nichterfülltsein dieser letzteren könnte man daher mit Herrn Voigt definiren:

„Lösung" (oder „Wurzel") einer Gleichung nennen wir einen Ausdruck, welcher, für die Unbekannte in die Gleichung eingesetzt, dieselbe auf ihre Resultante reduzirt (genauer: auf die Resultante der Elimination jener Unbekannten aus ihr).

γ) Umgekehrt lässt aber auch jedes die (erste) Gleichung

$$ax + bx_1 = 0$$

erfüllende x sich durch den Ausdruck $bu_1 + a_1u$ darstellen, indem es z. B. genügt, unter u sich x selbst vorzustellen, um die Gleichung

$$x = bu_1 + a_1u$$

zu einer analytischen oder richtigen Identität zu machen.

Alsdann wird auch u_1 durch x_1 zu ersetzen sein. Nach der Annahme ist aber, wie unter Th. 49_+) bereits erwähnt, auch schon für sich: $ax = 0$ und $bx_1 = 0$; sonach folgt, wenn für bx_1 erst 0, für 0 dann ax geschrieben wird (mit ähnlichem Kunstgriff, wie S. 425):

$bu_1 + a_1u = bx_1 + a_1x = 0 + a_1x = ax + a_1x = (a + a_1)x = 1 \cdot x = x,$

was zu zeigen war und auch nach Th. 49_+) mittelst Buchstabenvertauschung auf das Hülfstheorem zu Th. 47_+) hätte zurückgeführt werden können.

Wir sind hienach berechtigt den Ausdruck, welchen die dritte Gleichung

$$x = bu_1 + a_1u$$

für die Unbekannte liefert (oder auch diese Gleichung selber) als *„die allgemeine Lösung"* der Gleichung hinzustellen.

Hiermit ist dargethan, dass wenn die erste Gleichung gilt, dann auch die zweite gelten muss (vergl. α) und die dritte wenigstens für ein gewisses u (vergl. γ), woneben unter β) gezeigt ist, dass wenn die zweite Gleichung nebst der dritten (für irgend ein u) gilt, dann auch die erste Gleichung gelten muss.

D. h. das ganze Theorem ist bewiesen, und mag man merken: Die Gleichung ist stets äquivalent ihrer allgemeinen Lösung *nebst* der Resultante.

Jener Satz ist das Haupttheorem der bisherigen Theorie. Er lehrt (noch unmittelbarer wie der vorige) bezüglich irgend einer Unbekannten x die im Titel dieses Paragraphen angedeuteten Probleme lösen. Bei der Wichtigkeit desselben müssen wir noch einige Zeit bei seiner Betrachtung verweilen.

In früher geschilderter Weise lässt nämlich jedes System von gleichzeitig geltenden oder zu erfüllenden Gleichungen (oder nach Belieben auch Subsumtionen) sich zusammenziehen *in* und ersetzen *durch* eine einzige Gleichung mit der rechten Seite 0, die „vereinigte Gleichung" des Systemes.

Kam in dem Systeme neben irgend welchen andern Gebietsymbolen ein Gebiet x vor, so wird die linke Seite der vereinigten Gleichung eine „Funktion" von x sein (und auch wenn jenes *nicht* der Fall war, würde sogar sie als Funktion von x sich doch ansehen lassen). Diese Funktion lässt sich nach Th. 44_+) durch x und x_1 linear und homogen darstellen in der Form $ax + bx_1$, sodass die erste Gleichung in unserm Theoreme die Stelle vertritt des allgemeinsten Systemes von simultanen Gleichungen und eventuell Subsumtionen, in welchen neben vielleicht noch andern eine Unbekannte x vorkommt.

Eine „Unbekannte" mögen wir das Gebiet x nennen auch dann, wenn es bekannt sein sollte, indem man doch immer die Frage aufwerfen kann, welche Werte sich dem x noch beilegen lassen würden, ohne dass die Propositionen des Systems zu gelten aufhören, indem man, m. a. W. die Forderung stellen kann, die vereinigte Gleichung, somit auch jenes System simultaner Propositionen nach x *„aufzulösen"*, und zwar sie *vollständig* aufzulösen, mithin sämtliche „Wurzeln" derselben anzugeben. Durch den einen vielleicht schon bekannten Wert von x ist jene Frage doch im Allgemeinen noch nicht von vornherein erledigt.

Die Auflösung einer Gleichung oder eines Systems setzt die Vorfrage nach deren Auflösbarkeit als erledigt voraus. Der Vernünftige wird ja nichts Unmögliches unternehmen.

Unter α) ist aber dargethan, dass in Bezug auf die Auflösung der vereinigten Gleichung $ax + bx_1 = 0$ nach x diese Frage bald zu bejahen, bald zu verneinen ist:

δ) *Die Gleichung ist auflösbar*, es gibt Werte, welche für x eingesetzt, dieselbe erfüllen, d. h. sie besitzt Wurzeln *immer dann, wenn* zwischen den Koeffizienten derselben die Relation $ab = 0$ besteht, d. h. wenn *ihre Koeffizienten disjunkt sind; aber auch nur dann.*

Denn wenn diese zweite Gleichung unsres Theorems nicht erfüllt ist, haben wir gesehen, kann auch die erste Gleichung für keinen Wert von x bestehen, sie hat dann überhaupt keine Wurzeln und ist dieselbe, sowie das ihr äquivalente System von Propositionen in diesem Falle „unauflösbar" und „absurd" zu nennen. Unter den Propositionen des Systems werden dann sich entweder solche finden, die für sich allein schon „absurd" und durch kein x erfüllbar sind, oder die Pro-

positionen sind wenigstens *„unvereinbar"*, *„inkonsistent"*, sie vertragen sich nicht miteinander.

Die Forderung, die vereinigte Gleichung aufzulösen, überhaupt, sie für irgend eine Bedeutung des Symboles x als gültig anzuerkennen, bleibt es hier unmöglich, zu erfüllen.

Die Gleichung $ab = 0$ erscheint hienach als das *Kennzeichen für die Auflösbarkeit* der Gleichung $ax + bx_1 = 0$ nach der Unbekannten x.

Nicht auflösbar war beispielsweise die Gleichung $1 \cdot x + 1 \cdot x_1 = 0$; sie selbst sowol als ihre „Resultante" lief auf die *absurde* Forderung $1 = 0$ hinaus; der Ansatz einer solchen Gleichung $x + x_1 = 0$ ist ganz und gar *unzulässig*.

Nicht nur ist $ab = 0$ *eine* unerlässliche, *notwendige* Bedingung sondern auch *die hinreichende* Bedingung für diese Auflösbarkeit.

Ist sie nämlich erfüllt, so gibt die dritte Gleichung unsres Theorems: $x = bu_1 + a_1 u$ für jede Bedeutung des u eine richtige Wurzel und für ein von 0 bis 1 (im Klassenkalkul von „nichts" bis „alles") variirendes u die sämtlichen Wurzeln der ersten Gleichung an.

Diese hat hienach, falls sie auflösbar ist, im Allgemeinen *unendlich viele* (eine unbegrenzte Anzahl oder Menge von) *Wurzeln;* ihre Lösung nach x ist (unendlich-) *vieldeutig.* Geleistet wird die verlangte Auflösung der ersten Gleichung dann also durch die dritte Gleichung des Theorems, und zwar ausschliesslich und vollständig, indem dieselbe für x einen allgemeinen Ausdruck angibt, welcher sämtliche Wurzeln der erstern und nur solche umfasst.

Als die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Unbekannte x überhaupt einen Wert oder Werte habe, könnte man die Gleichung $ab = 0$ füglich auch die *„Wertigkeits"*- oder *„Valenzbedingung"* für x nennen. Nur wenn sie erfüllt war, konnte es ein die Gleichung $ax + bx_1 = 0$ erfüllendes Gebiet x geben, war x eines Wertes fähig, und wenn sie erfüllt ist, musste es auch ein solches (eventuell mehrere solche) Gebiete geben, denn im letzteren Falle erwies sich jedes durch den Ausdruck $bu_1 + a_1 u$ dargestellte Gebiet als eines von der verlangten Eigenschaft.

ε) In Anbetracht, dass diese Gleichung $ab = 0$ den Namen x der Unbekannten überhaupt nicht enthält, kann man sie aber, wie schon eingangs angedeutet, auch noch unter einen andern Gesichtspunkt bringen: man kann sie bezeichnen als *„Resultante der Elimination* des x aus der ersten Gleichung $ax + bx_1 = 0$" unsres Theorems.

So oft nämlich eine Gleichung oder überhaupt ein System von Propositionen gegeben ist, in welchen eine Gruppe $x, y, \ldots$ von Sym-

bolen eventuell vorkommt („eventuell“, d. h. nicht notwendig durchaus, vielleicht sogar überhaupt nicht), und man leitet daraus durch logische Schlüsse solche (eventuell neue) Propositionen ab, welche jene Symbole $x, y, \ldots$ *nicht* enthalten, in welchen deren Name gar nicht vorkommt, so nennt man diese letztern Propositionen (sowol sie einzeln, als auch das System derselben) *„ein Ergebniss der Elimination von* x, $y, \ldots$ *aus* jenem gegebenen Propositionensysteme“. Man sagt: man habe die Symbole $x, y, \ldots$ aus dem Systeme *herausgeworfen* oder *„eliminirt“*.

Es gibt hienach im Allgemeinen *mehrere* Eliminationsergebnisse für das nämliche Propositionensystem und in Bezug auf die nämlichen Symbole $x, y, \ldots$ als zu eliminirende Gebiete oder *„Eliminanden“*.

In unserm Falle würde z. B. auch $abc = 0$ ein solches sein, was immer c bedeuten mag.

Doch ist zu bemerken, dass man diejenigen von den durch die Elimination gewonnenen Propositionen, welche etwa sich als „analytische“ Propositionen herausstellen sollten, fallen lässt, und sie endgültig, definitiv dem Eliminationsergebnisse nicht zuzuzählen pflegt aus dem Grunde, weil man sonst immer eine unbegrenzte Menge von „nichtssagenden“ Propositionen mit in's Auge zu fassen hätte. So dürften beispielsweise die analytischen Propositionen $0 \not\in a$, $b \not\in 1$, $ab \not\in a$, $(ab)_1 = a_1 + b_1$, etc. unserem Eliminationsergebniss $ab = 0$ nicht zugezählt werden, obwol auch sie sich als Aussagen über a, b darstellen, die x nicht enthalten. M. a. W.:

Gleichwie bei dem als *„Basis“ der Elimination* dienenden Systeme von gegebenen Propositionen diese nur in Betracht kommen, sofern sie Relationen darstellen, dagegen beiseite zu lassen sein werden, sobald sie etwa analytische Propositionen sein sollten, so fallen auch als Eliminationsergebnisse nur Relationen in's Gewicht.

Es ist nun eine gelegentlich sehr wichtige Frage, welche Relationen etwa, *unabhängig* von den Werten der Symbole $x, y, \ldots$ *zwischen den übrigen* im gegebenen Propositionensysteme vorkommenden Gebietsymbolen bestehen werden, sobald dieses System gilt, m. a. W. welche Relationen diese übrigen Symbole erfüllen, zu einander eingehen müssen, damit das Propositionensystem überhaupt bestehen könne — für irgend ein Wertsystem der Eliminanden.

Ein solches Eliminationsergebniss, durch welches diese Frage *„vollständig“* beantwortet wird (in sogleich noch näher präzisirtem Sinne), heisst *„das volle Eliminationsergebniss“* oder schlechtweg *„das* Eliminationsresultat“, und sofern es nicht als ein System von Rela-

tionen sich darstellt, vielmehr in eine einzige Relation zusammengezogen ist, auch *„die Resultante der Elimination"*. Dass die Anwendung des bestimmten Artikels hiebei gerechtfertigt ist, wird demnächst erhellen.

Es bezeichne B kurz das als Basis der Elimination von $x, y, \ldots$ gegebene System von Propositionen (und zwar Relationen), ebenso bezeichne R ein Eliminationsergebniss. Dasselbe wird hienach ein System von Relationen sein (oder auch eine einzige Relation), das aus B folgt, jedoch die in B (vielleicht) vorkommenden Symbole x, $y, \ldots$ nicht enthält; R kann nur andere, in B ebenfalls vorkommende Symbole, wie $a, b, \ldots$ enthalten (nebst vielleicht noch ganz neuen Symbolen, die auch in B nicht vorgekommen waren, wie es zum Beispiel unbestimmte Parameter sein würden).

Nach der beabsichtigten Erklärung ist R dann „ein volles Eliminationsergebniss" zu nennen, wenn, sobald R erfüllt ist, es sicher mindestens *ein* Wertsystem von $x, y, \ldots$ gibt, für welches auch B erfüllt sein muss.

Ist nun auch R' „ein volles Eliminationsergebniss" in diesem Sinne, so erkennt man leicht, dass die beiden Ergebnisse R und R' logisch äquivalent sind, dass sie einander gegenseitig bedingen müssen: wann R erfüllt ist, wird auch R' erfüllt sein und ebenso folgt umgekehrt aus der Geltung von R' auch die von R; der Fall, dass zwar eines von den beiden Ergebnissen, aber nicht das andere, erfüllt ist, kann nicht vorkommen.

Denn wäre zum Beispiel R erfüllt, während R' *nicht* erfüllt ist, so gäbe es aus dem erstern Grunde ein Wertsystem der $x, y, \ldots$ für welches auch B erfüllt ist. Da für dieses nun also B gilt, so muss auch R' gelten, indem laut Voraussetzung R' als ein Eliminationsergebniss aus B *folgte*. Das Erfülltsein von R' widerspräche also der soeben gemachten Annahme seines Nichterfülltseins, welche hienach unzulässig war, zu verwerfen ist. Etc.

Wir sind darum berechtigt, R' eine blosse Umschreibung von R zu nennen; zu sagen R und R' seien wesentlich *dasselbe* Eliminationsergebniss — vielleicht nur in verschiedenen Formen oder Ausdrucksweisen. Wir dürfen R (sowie auch R') als *„das* Resultat der Elimination" schlechthin bezeichnen.

In dem besonderen Falle, wo das Propositionensystem B die Eliminanden $x, y, \ldots$ gar nicht enthalten sollte, wo von vornherein kein einziger von diesen in ihm vorkäme, ist leicht zu sehen, dass B selber das Resultat der Elimination von $x, y, \ldots$ aus ihm sein muss; es fällt

dann mit R zusammen und ist *seine eigene Eliminationsresultante.* Denn erstens ist es „ein“ Eliminationsergebniss, weil es $x, y, \ldots$ nicht mehr (genauer: ohnehin nicht) enthält und doch „aus B folgt“, nämlich seine Geltung mit der von B gegeben ist (Wenn B gilt, so gilt B — vergl. Prinzip I im Aussagenkalkul); und zweitens ist es das *volle* Ergebniss, indem, sobald es erfüllt ist, sonach B gilt, es auch Wertsysteme von $x, y, \ldots$ geben muss, „für welche B gilt“, dann nämlich B ohnehin gelten muss, welche Wertsysteme man auch immer unter $x, y, \ldots$ verstehen mag. — Es versteht sich, dass in solchem Grenzfalle von Eliminiren nur in uneigentlichem Sinne zu sprechen ist, sofern man Jemanden, der gar nicht da ist, auch nicht hinauswerfen kann.

Aber auch wenn B von vornherein die Eliminanden $x, y, \ldots$ oder wenigstens einige derselben enthielt, kann es doch mit der Eliminationsresultante R logisch äquivalent sein — und dies bildet noch eine zweite Art von besondern Fällen bemerkenswerten Charakters.

Trifft solches zu, sodass also nicht nur R aus B folgt, sobald B nur für irgend ein Wertsystem der $x, y, \ldots$ erfüllt ist, schlechthin gilt, sondern auch, wenn R gilt, B unbedingt gelten muss, mithin gelten muss *für jedes beliebige* Wertsystem der Eliminanden $x, y, \ldots$, so sagt man, dass letztere *„von selbst aus B herausfallen“*. Dann kann ja in der That B durch R ganz und gar ersetzt werden. —

Ist die volle Resultante zu einer Gleichung (Basis) nur eine analytische, Formel oder Identität, wie $0 = 0$, so wird man nach dem unter ε) Bemerkten auch sagen dürfen: die Gleichung liefere, oder habe, *keine* Resultante.

Zu allen diesen vorerst theoretisch als möglich erkannten Vorkommnissen wird uns die Praxis Beispiele liefern.

Durch die *Elimination* entlastet sich der Geist, indem er auf seine Kenntnisse in Hinsicht der Eliminanden zeitweilig verzichtet, dieselben fallen lässt, von ihnen absieht, abstrahirt, jeweils von solchen Erkenntnisselementen, welche für die Verfolgung bestimmter Erkenntnisszwecke unwesentlich, belanglos erscheinen und deren Beibehaltung also ihn hiebei nur als ein Ballast zu beschweren vermöchte.

ζ) Kehren wir nach diesen allgemeinen, nämlich auf jedes System von Propositionen, Aussagen und jede Gruppe von Symbolen anwendbaren (in gleicher Weise auch auf die Relationen der numerischen Mathematik übertragbaren) Betrachtungen, durch welche der Begriff des Eliminationsresultates festgelegt ist, zurück zu unserm Theorem 50_+).

Hier wird in der That die Gleichung $ab = 0$ nun als die volle

Resultante der Elimination von x aus der Gleichung $ax + bx_1 = 0$ zu bezeichnen sein, sintemal, wenn jene erfüllt ist, es nach β) auch immer Werte von x gibt welche diese erfüllen.

Die erste Gleichung des Theorems exemplifizirt das B, die zweite das R der obigen allgemeinen Betrachtungen.

Sollte die vereinigte Gleichung das x gar nicht enthalten, so wird sie, wenn wir a ihre linke Seite nennen, die Form $a = 0$ haben. Nach Früherem können wir ihr Polynom gleichwol nach x „entwickeln", wodurch sie wird:

$$ax + ax_1 = 0,$$

und wenn wir jetzt x wieder regelrecht eliminiren, so ergibt sich $aa = 0$ oder $a = 0$ als die Resultante — somit in der That wiederum die ursprüngliche Gleichung in Bestätigung des oben Gesagten.

Ungeachtet der durchgängigen Übereinstimmung der Begriffe von „Elimination", „Resultante", „Wurzeln" und „Auflösung" in Bezug auf Gleichungen des arithmetischen, wie auf Propositionen des identischen Kalkuls gestaltet sich die Anwendung dieser Begriffe in beiden Disziplinen doch sehr verschieden!

In der Arithmetik erweist sich das Eliminationsproblem sowol als das Auflösungsproblem in bestimmter Weise *abhängig von der Anzahl* der zur Verfügung stehenden („von einander unabhängigen") Gleichungen in ihrem Verhältniss zur Anzahl der zu eliminirenden, beziehungsweise als Unbekannte zu berechnenden Zahlgrössen. Im identischen Kalkul, in Bezug auf Gebiete, ist dieses, wie sich zeigte, *durchaus nicht der Fall.*

In der Arithmetik kann man aus *einer* Gleichung überhaupt nichts eliminiren — sofern die Resultante wieder eine Gleichung werden soll. [Allerdings liesse sich z. B. im Gebiet der positiven Zahlen eine Ungleichung, wie $a > b$, auch als die Resultante der Elimination des x aus der Gleichung $a = b + x$ hinstellen.]

Man ist nicht im stande, aus einer (synthetischen) Gleichung eine andre abzuleiten, welche eine oder mehrere Buchstabenzahlen, die in der erstern vorkamen, nicht mehr enthält, wofern diese nicht nach den Regeln der Arithmetik von selbst aus ihr herausfallen.

Damit Elimination möglich sei, dürfen erstens die gegebenen Gleichungen einander nicht widersprechen und muss zweitens die Anzahl der „unabhängigen" Gleichungen (d. h. solcher von welchen keine aus den übrigen folgt), um eins grösser sein als die Anzahl der Eliminanden.

Um eine Grösse zu eliminiren sind also in der Arithmetik mindestens zwei Gleichungen erforderlich, für n Grössen mindestens $n + 1$ Gleichungen.

Im identischen Kalkul kann schon aus *einer* Gleichung jedes beliebige Gebietsymbol eliminirt werden, und gleichwie eines, so auch mehrere nacheinander oder auch a tempo, auf einmal (eine Aufgabe die wir noch zu betrachten haben werden). *Hier ist das Eliminationsproblem ganz allgemein lösbar.* Aus jeder beliebigen Menge von Propositionen lässt sich eine beliebige Gruppe von Symbolen jederzeit eliminiren. Nur wird die Resul-

tante nicht immer eine Relation sein, sondern manchmal nur eine analytische Proposition, eine Identität.

Soll in der Arithmetik ein System von Gleichungen nach einem System von Unbekannten auflösbar sein, so darf die Anzahl der unabhängigen Gleichungen nicht grösser sein, als die Anzahl der Unbekannten und dürfen auch keine den andern widersprechende Gleichungen mit vorliegen.

Im identischen Kalkul darf sie beliebig gross sein.

Eine Ähnlichkeit zwischen beiden Disziplinen erblicken wir aber darin, dass hier wie dort das Auflösungsproblem nicht unbedingt, nicht in allen Fällen lösbar ist.

In der Arithmetik erscheinen durch die Gleichungen die Unbekannten nicht völlig bestimmt, sie bleiben teilweise willkürlich, die Auflösungen sind vieldeutige, jedenfalls dann, wenn (Auflösbarkeit vorausgesetzt) die Anzahl der Gleichungen kleiner ist, wie die der Unbekannten.

Im identischen Kalkul ist die Auflösung in der Regel eine mehrdeutige, auch schon bei einer Gleichung ersten Grades mit *einer* Unbekannten, und mit andern Problemen als mit *einer* Gleichung *ersten Grades* können wir hier zunächst überhaupt nicht zu thun haben.

η) Um für die Anwendungen das Th. 50_+) sich einzuprägen, merke man (einerseits):

Die Resultante der Elimination eines Symbols, *einer Unbekannten* x, *aus einer* rechts auf 0 gebrachten links nach dieser entwickelten *Gleichung ergibt sich, indem man das Produkt der Koeffizienten* von dieser Unbekannten und ihrer Negation *gleich* 0 *setzt.*

Man kann aber — auf zwei Arten — der Gleichung eine solche Form geben, dass *die Elimination sich schon vollzieht, indem man einfach den Eliminanden und seine Negation ausstreicht, unterdrückt.*

Einmal nämlich trifft dies zu, wenn man die linke Seite der Gleichung als Produkt schreibt, sie in ihre „letzten Faktoren“ zerlegt. So wird sie:

$$(a + x_1)(b + x) = 0$$

und unterdrückt man hier die zweiten Glieder der Binome, so ergibt sich in der That die Resultante:

$$ab = 0.$$

Ebenso trifft es zu, wenn man, *die linke Seite wie früher entwickelt lassend, die Gleichung rechts auf* 1 *bringt* — vergl. Th. 32).

Für $ax + bx_1 = 0$ haben wir dann zu sagen:

$$a_1 x + b_1 x_1 = 1$$

und wird durch Löschen von x und x_1 hier in der That entstehen:

$$a_1 + b_1 = 1,$$

eine Gleichung die mit der Resultante $ab = 0$ nach Th. 32 und 36) äquivalent ist.

Stellte man aber, während die Gleichung rechts auf 1 gebracht ist, zugleich auch die linke Seite als Produkt dar, schriebe man also:

$$(a_1 + x_1)(b_1 + x) = 1,$$

so träfe die letzte Regel nicht mehr zu, ebensowenig, wie es bei der ursprünglichen Form der Gleichung

$$ax + bx_1 = 0$$

der Fall war — indem ja nach derselben fälschlich $a_1 b_1 = 1$, resp. $a + b = 0$ entstehen würde. —

Ein bequemeres Eliminationsverfahren als das Fortlassen, *Auslöschen*, die Tilgung der Eliminanden ist nun überhaupt nicht denkbar.*)

Es ist deshalb bei Eliminationsaufgaben mitunter vorteilhaft zu operiren mit rechts auf 1 (anstatt auf 0) gebrachten Gleichungen (indem man links Aggregate, nach wie vor, Produkten vorzieht). Besonders wird dies — auch noch aus einem andern Grunde: der Interpretation halber — im Aussagenkalkul sich empfehlen.

ϑ) Lautet

$$f(x) = 0$$

eine nach x aufzulösende Gleichung, so entsteht durch Entwickelung des Polynoms derselben nach x gemäss Th. 44_+):

$$f(1) \cdot x + f(0) \cdot x_1 = 0$$

und ist daher:

$$f(0) \cdot f(1) = 0$$

die Resultante der Elimination von x und zugleich die Bedingung für die Auflösbarkeit der Gleichung nach x und für ihre mögliche Geltung.

Die Auflösung selbst würde heissen:

$$x = f(0) \cdot u_1 + f_1(1) \cdot u.$$

ι) Von praktischem Nutzen ist noch diese Bemerkung. Wir setzten beim Eliminiren bisher das Polynom der Gleichung als bezüglich des Eliminanden x (durch Entwickelung nach demselben) *homogen* gemacht voraus. Von dieser Voraussetzung ist es vorteilhaft, sich unabhängig zu machen. Ist nämlich:

$$ax + bx_1 + c = 0$$

die Gleichung, aus welcher x zu eliminiren ist, wo die linke Seite als nicht homogene lineare Funktion jetzt ein Absolutglied c enthält, so würde diese Gleichung, homogen gemacht, lauten:

$$(a + c)x + (b + c)x_1 = 0$$

und gäbe nach der Regel:

*) Die Bemerkung ist wol, unter Leitung von Mr. Peirce, zuerst von Miss Ladd gemacht und von Mr. Mitchell noch weiter ausgedehnt worden.

$$(a + c)(b + c) = 0$$

als die Resultante. Diese vereinfacht sich aber zu:

$$ab + c = 0 \quad \text{oder} \quad c + ab = 0\,.$$

Daher kann man merken: *Das Absolutglied* (Aggregat der Glieder welche x und x_1 nicht zum Faktor haben) *geht jeweils unverändert in die Resultante über;* es braucht demselben nur noch das Produkt *der* Koeffizienten hinzugefügt zu werden, mit welchen x und x_1 ursprünglich behaftet sind.

$\varkappa$) Ist nun bei einer Gleichung $ax + bx_1 = 0$ die Bedingung für ihre Zulässigkeit oder Auflösbarkeit, die Valenzbedingung für x oder Resultante seiner Elimination, erfüllt, so handelt es sich auch noch darum, den allgemeinsten Ausdruck für die Unbekannte oder Wurzel x der Gleichung jederzeit richtig herstellen zu können. Es ist zu dem Ende nicht praktisch, etwa nur die Formel

$$x = bu_1 + a_1 u$$

auswendig zu lernen, schon weil in einer solchen die für die Unbekannte (x), die Koeffizienten (a, b) und den Parameter (u) zugrunde gelegte Bezeichnung sehr häufig kollidirt, in Konflikt gerät, nicht stimmt mit denjenigen Bezeichnungen welche *gegeben* sind in den Problemen auf die der Satz angewendet, für welche er verwertet werden soll. Es empfiehlt sich deshalb, dass man die durch die Formel der Auflösung (allerdings am kürzesten) ausgedrückte Regel sich obendrein in Worten einpräge, und merke man darum (andrerseits):

Um nach einer Unbekannten eine Gleichung aufzulösen, nachdem dieselbe rechts auf 0 gebracht, links nach der Unbekannten entwickelt und als auflösbar erkannt ist, *setze man die Unbekannte gleich der Negation ihres Koeffizienten multiplizirt mit einem unbestimmten Gebiete, plus dem Koeffizienten ihrer Negation mal der Negation dieses Gebietes.*

Für die Gleichung

$$ax + bx_1 = 0, \quad \text{wo} \quad ab = 0$$

ist, hat man also die Wurzeln x, neben welchen auch deren Negation angegeben werden mag:

$$\varkappa) \qquad x = a_1 u + bu_1\,, \qquad x_1 = au + b_1 u_1\,,$$

worin man wegen der Willkürlichkeit von u natürlich auch u und u_1 hätte vertauschen können.

λ) Die Auflösungen lassen sich nun aber auch noch in folgenden Formen schreiben:

$$\lambda) \qquad x = b + a_1 u = a_1(b + u)\,, \qquad x_1 = b_1(a + u_1) = a + b_1 u_1\,,$$

welche dadurch bemerkenswert sind, dass sie ein Operationsglied weniger enthalten, mithin einfacher erscheinen.

Um zunächst diese beiden neuen Formen für x *aufeinander* zurückzuführen, bemerke man, dass wegen $ab = 0$ hier

$$b = 1 \cdot b = (a + a_1)b = ab + a_1 b = 0 + a_1 b = a_1 b,$$

oder auch rückwärts: $a_1 b = b$ sein muss; und ähnlich auch, dass $ab_1 = a$.

Mit der vorhergehenden nach u homogenen Form $\varkappa$) bringt man sodann die Darstellung λ), z. B. $x = b + a_1 u$ in Zusammenhang, indem man rechts nach u entwickelt, wodurch sich ergibt:

$$x = b(u + u_1) + a_1 u = bu_1 + (b + a_1)u.$$

Nach Th. 33_+) Zusatz ist aber jetzt $b + a_1 = a_1 + ab = a_1 + 0 = a_1$ — wie denn überhaupt wegen $a \subseteq b_1$ oder $b \subseteq a_1$ hier:

$$ab_1 = a, \qquad a_1 b = b, \qquad a_1 + b = a_1, \qquad a + b_1 = b_1$$

schon nach Anm. 2 zu Th. 43) folgt — und erhalten wir die frühere Form

$$x = bu_1 + a_1 u$$

aus der letzten durch Einsetzung jenes Wertes a_1 für $b + a_1$. Umgekehrt erhält man aus dieser jene, indem man a_1 durch das wegen $ab = 0$ ihm gleiche $a_1 + b$ ersetzt und darnach die Glieder mit b zusammenzieht, d. h. die eben vollzogene Umformung nun rückwärts ausführt.

μ) Nach *allen* in ihr vorkommenden Symbolen rechterhand entwickelt lautet unsre Lösung:

$$\mu) \begin{cases} x = (ab + a_1 b)u_1 + (a_1 b + a_1 b_1)u = a_1 bu_1 + (a_1 b + a_1 b_1)u, \\ x_1 = (ab_1 + a_1 b_1)u_1 + (ab + ab_1)u = (ab_1 + a_1 b_1)u_1 + ab_1 u, \end{cases}$$

wie sich aus $\varkappa$) leicht nach Th. 44_+) ergibt, am bequemsten aber direkt, indem man in $\varkappa$) den einen (mit b nicht behafteten) Term mit $b + b_1$ den andern (von a noch freien) Term mit $a + a_1$ multiplizirt. Die Ausdrücke μ) könnten hinwiederum auch in:

$$\nu) \begin{cases} x = a_1 b + a_1 b_1 u = a_1(b + ub_1), \\ x_1 = ab_1 + a_1 b_1 u_1 = b_1(a + u_1 a_1) \end{cases}$$

zusammengezogen werden, wobei sie nach a, b noch entwickelt blieben.

ξ) Einen *heuristischen* Beweis, eine „*Herleitung*", der die Auflösung leistenden Formel λ) — somit auch $\varkappa$) — habe ich in meinem Operationskreis[2] gegeben wie folgt.

Soll $ax + bx_1 = 0$ sein, während die Bedingung $ab = 0$ für den Bestand und die Auflösbarkeit dieser Gleichung erfüllt ist, so muss, wie schon unter 49_+) erwähnt, für sich:

$$ax = 0 \quad \text{und} \quad bx_1 = 0$$

sein. Der ersten Forderung genügt man nach Th. 43) Zusatz auf die

allgemeinste Weise, indem man $x = va_1$ setzt, wo v ein unbestimmtes Gebiet bedeutet. Darnach folgt dann

$$x_1 = v_1 + a, \qquad bx_1 = bv_1 + ab = bv_1 + 0 = bv_1$$

und um nun auch noch die zweite Forderung zu erfüllen, braucht man nur mehr v_1 so zu bestimmen, dass $bv_1 = 0$ ist. Darnach folgt in gleicher Weise:

$$v_1 = wb_1, \qquad v = w_1 + b,$$

wo w_1 ebenso, wie ursprünglich w, ein unbestimmtes Gebiet vorstellt. Hiermit ist gefunden:

$$x = (w_1 + b)a_1$$

und dies ist die eine der unter λ) für die Lösung angegebenen Formen, wenn man noch den Namen w_1 des unbestimmt bleibenden Gebietes durch den Namen u ersetzt. Für dieses $x = a_1(u + b)$ stimmt nun, wie schon (indirekt) erkannt (und auch wieder direkt leicht nachweisbar wäre) die Probe: es erfüllt die aufzulösende Gleichung bei beliebigem u.

Das Ergebniss muss darnach die vollständige Auflösung darstellen. Denn jede Wurzel x der Gleichung muss wie erkannt diese Form haben, und jedes x von dieser Form ist eine Wurzel der Gleichung.

Übrigens ist zu bemerken, dass unser Th. 50_+) obwol in den vorliegenden Gestalten erst von mir ausgesprochen, hergeleitet und bewiesen, im Grunde doch nichts anderes ist, als das Haupttheorem im Boole'schen Werke[4], nur gereinigt von allen arithmetischen Beimengungen und von der spezielleren Boole'schen mitausgedehnt über die allgemeinere Jevons'sche Addition, demgemäss auch nicht unerheblich vereinfacht.

Im Gegensatz zu noch andern eventuell zu besprechenden Methoden zur Bewältigung des Auflösungs- und Eliminationsproblemes werde ich daher die auseinandergesetzte (nach einem auch schon von andern Seiten vorliegenden Vorgange) „die von mir modifizirte Boole'sche Methode" nennen („Boole's method, as modified by Schröder"). Bezüglich dessen unmodifizirter Methode vergleiche § 25, Ende.

o) Beabsichtigen wir Anwendungen des Theorems 50_+) im *Klassenkalkul*, so muss noch näher erwogen werden, *wie daselbst der unbestimmte Parameter u zu interpretiren*, wie also die Formel der Auflösung:

$$x = bu_1 + a_1u \qquad \text{oder} \qquad x = b + ua_1$$

in der Wortsprache darzustellen sein wird.

Jene Formel unmittelbar in diese zu übertragen, gemäss den in § 8 und 16 erörterten Regeln, erscheint misslich, in Anbetracht, dass u allemal einen unbestimmten Bruchteil: „nichts, oder einiges (etwas), oder das ganze (alles)" von der mit ihm multiplizirten Klasse heraus-

schneiden wird. Ein Ausdruck wie: „was b und nicht etwas Gewisses oder auch nicht a aber gleichzeitig jenes Gewisse ist" entbehrt doch wol der wünschenswerten Durchsichtigkeit. Auch passen Subsumtionen sich bequemer der Wortsprache an, als wie Gleichungen.

Dem Mangel wird leichtlich abgeholfen, indem man auf die Form 49_+) des Theorems 50_+) zurückgeht.

Jenes Theorem statuirte, dass die Gleichung

$$ax + bx_1 = 0$$

auch äquivalent ist dem Paare der Subsumtionen:

$$b \Subset x \quad \textit{und} \quad x \Subset a_1,$$

oder — noch einfacher geschrieben — der Doppelsubsumtion:

$$b \Subset x \Subset a_1 .$$

Demnach *werden die beiden zusammengültigen Aussagen:*

„Alle b sind x, und kein x ist a"

mit Worten die „Auflösung" der Gleichung $ax + bx_1 = 0$ nach der Unbekannten x leisten.

In der That erscheint in diesen Aussagen die Unbekannte x *auf der einen Seite*, als Prädikat resp. Subjekt einer Subsumtion, *isolirt*, während auf deren andrer Seite nur bekannte Terme, gegebene Klassen stehen — und dieses muss als das Charakteristikum der „Auflösung" für die Wortsprache angesehen werden.

Auch wenn wir eine *Gleichung* für die Wurzel haben — wir mögen sie für den Augenblick kurz mittelst $x = c$ darstellen — könnte dieselbe ja mit Worten nur in Gestalt der beiden Subsumtionen $c \Subset x$ und $x \Subset c$ — vergl. Def. (1) der Gleichheit — ausgedrückt werden, welche wesentlich von dem eben beschriebenen Charakter sind. [Diese würden sich auch wieder in eine Doppelsubsumtion $c \Subset x \Subset c$, oder auch $x \Subset c \Subset x$, zusammenziehen lassen.]

Allerdings wäre hier die „andre" Seite, das aus den bekannten Klassen zusammengesetzte Subjekt oder Prädikat der Subsumtionen, *beidemal das nämliche: c,* was vorhin nicht der Fall war. Es wird sich aber im Hinblick auf den obigen Satz 49_+) oder o) empfehlen, bei dem Begriff der „verbalen Auflösung" von dieser Anforderung Umgang zu nehmen, ja den Begriff der „Auflösung" überhaupt eben dadurch zu erweitern.

Zu demselben Ergebnisse kann man auch von den Formeln $\varkappa$) oder λ) aus, d. h. auf dem Umwege über diese Darstellungen der Wurzeln, vermittelst des Theorems 48) gelangen.

Darnach in der That muss $x = bu_1 + a_1u$ zwischen dem Produkte und der Summe seiner Koeffizienten liegen, und sich in Gestalt von:

π) $$x = a_1 b + w(a_1 + b)$$

auch darstellen lassen — vergl. Th. 47), zweite Form; m. a. W. die Gleichung ist äquivalent dem Subsumtionenpaare:

$$a_1 b \neq\!\!\!\in x\,, \qquad x \neq\!\!\!\in a_1 + b\,.$$

Wegen $ab = 0$ haben wir aber, wie bereits gezeigt:

$$a_1 b = b \quad \text{und} \quad a_1 + b = a_1,$$

also wieder

$$b \neq\!\!\!\in x \neq\!\!\!\in a_1\,, \quad \text{q. e. d.}$$

Ebenso sieht man dem Ausdruck $x = b + ua_1$ augenblicklich an, dass er zwischen b und $b + a_1$ irgendwie gelegen, welches letztere sich aber da, wo $ab = 0$ ist, in a_1 selbst zusammenzieht.*)

ϱ) Es erübrigt, dass wir uns noch vollends über die „Determination" des Auflösungsproblems orientiren, vor allem, dass wir uns über die Frage klar werden, wann die Gleichung nur *eine* Wurzel besitzt, wann dagegen mehrere; in welchen Fällen sie gar keine Wurzel hat, wurde bereits festgestellt.

Wenn ein Gebiet x durch eine gegebene Gleichung

$$ax + bx_1 = 0$$

ausschliesslich bestimmt ist, wenn an x keine andern Anforderungen gestellt werden, als dass es eben diese Gleichung erfülle, m. a. W. wenn x geradezu definirt erscheint als die Wurzel dieser Gleichung, dann bleibt in unsrer Formel für die Auflösung:

$$x = a_1 u + bu_1,$$

das unbestimmte Gebiet u vollkommen beliebig oder *arbiträr.*

Die Wurzel x ist dann in der Regel nicht *ein* Gebiet, sondern — kann man sagen — eine ganze *Klasse* von Gebieten, die sich eben aus unsrer Formel ergeben, indem man dem u alle möglichen Bedeutungen (in der Mannigfaltigkeit der Gebiete) beilegt.

σ) Je nachdem die Werte der gegebenen Koeffizienten a, b beschaffen sind; kann indess auch der Fall eintreten, dass alle Werte dieser Klasse zusammenfallen, sich auf einen einzigen reduziren.

*) In den Formen $b \neq\!\!\!\in x \neq\!\!\!\in a_1 + b$ habe ich in meinem Operationskreis[2] die Lösung bei den Boole'schen Problemen jeweils mit Worten gedeutet, jedoch dieses Schema selbst als eine „auf die Interpretation bezügliche Bemerkung" — vergl. p. 24 — dort nicht mitgeteilt, da ich mich in jener Schrift immer nur der Gleichheitszeichen bediente. Ich wüsste demnach kaum zu sagen, wem nun das Th. 49_+) eigentlich zuzuschreiben wäre. Von spätern Schriftstellern kommt ihm McColl am nächsten, indem er nach seiner in § 27 dargelegten Methode die Lösung in Gestalt der beiden Subsumtionen: $b \neq\!\!\!\in x$, $a \neq\!\!\!\in x_1$ gewinnen müsste. —

Sicher tritt dies, weil nach Th. 49_+) x zwischen b und a_1 gelegen, ein, wenn

$$b = a_1, \quad \text{somit auch} \quad a = b_1,$$

ist, oder, da diese Bedingung, rechts auf 0 gebracht, als

$$ab + a_1 b_1 = 0$$

sich darstellt, wenn nicht nur die Auflösbarkeitsbedingung $ab = 0$, sondern auch daneben noch die Bedingung $a_1 b_1 = 0$ erfüllt ist.

Wir haben in diesem Falle:

$$x = a_1 b = b = b + a_1 = a_1$$

als die einzige Wurzel der aufzulösenden Gleichung, deren verschiedene Ausdrucksformen der Leser mit Rücksicht auf die angeführten Relationen, soweit es nicht bereits geschehen, leicht auf einander zurückführen wird. In der That fällt dann aus allen Formeln für die Wurzel x das unbestimmte Gebiet u von selbst heraus, wie auch direkt bei einer jeden von ihnen — am leichtesten bei ν) — zu sehen ist.

Jene Bedingung $b = a_1$ ist aber nicht nur hinreichend für das Zusammenfallen sämmtlicher Wurzeln, sondern auch notwendig für dieses. Soll nämlich $x = bu_1 + a_1 u$ unabhängig sein von u, so muss es insbesondre für $u = 0$ auch denselben Wert annehmen wie für $u = 1$, d. h. es muss $b = a_1$, sonach da ab ohnehin $= 0$ ist, auch $a_1 b_1 = 0$ sein. Also:

*Notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Gleichung eine und nur eine Wurzel habe ist: dass die Koeffizienten Negationen von einander seien.**)

Ihre Wurzel ist dann eindeutig bestimmt, die Unbekannte nämlich gleich dem Koeffizienten ihrer Negation (oder der Negation ihres Koeffizienten) in der Gleichung.

Für diesen Fall kommt in der That die Gleichung

$$ax + a_1 x_1 = 0 \quad \text{oder} \quad b_1 x + b x_1 = 0$$

nach Th. 39) auch direkt auf $x = a_1 = b$ hinaus. —

In jedem andern Falle ist die Wurzel durch die Gleichung nicht vollkommen bestimmt, vielmehr die Auflösung (unendlich) vieldeutig („unendlich“ nur in dem Falle nicht, wo die Klasse, das Gebiet $a_1 b$ aus einer begrenzten Menge von Individuen, Punkten bestünde).

τ) Wir erwähnten bereits, wann u arbiträr bleiben wird.

---

*) Man könnte auch sagen: $a_1 b_1 = 0$ ist die Bedingung dafür, dass *nicht mehr als eine* Wurzel, sowie $ab = 0$ die Bedingung dafür, dass *nicht weniger als eine* (dass nicht gar keine) Wurzel existire.

Sobald hingegen ausser der Gleichung $ax + bx_1 = 0$ über x noch anderweitige Information vorliegt, so wird die Variabilität von u gewissen Einschränkungen unterliegen.

Erledigen wir noch die Frage, *welche Werte dem u zugeteilt werden dürfen, wenn* x einen bekannten Wert hat oder *einen gegebenen Wert erhalten soll*, der jedoch immerhin der Gleichung $ax + bx_1 = 0$ genügt.

Die Antwort ergibt sich, indem man unter letzterer Voraussetzung die Gleichung $bu_1 + a_1u = x$ nach der Unbekannten u auflöst. Zu dem Ende hat man diese Gleichung rechts auf 0 zu bringen — cf. Th. 39) und 46):
$$x(b_1u_1 + au) + x_1(bu_1 + a_1u) = 0,$$
links nach u zu ordnen:
$$(ax + a_1x_1)u + (b_1x + bx_1)u_1 = 0$$
und nunmehr das Th. 50) selbst anzuwenden.

Als Resultante der Elimination des u ergibt sich:
$$(ax + a_1x_1)(b_1x + bx_1) = ab_1x + a_1bx_1 = 0,$$
und ist diese wegen der vorausgesetzten Relationen $ax = 0$ und $bx_1 = 0$ von selbst erfüllt. Darnach berechnet sich:
$$u = (b_1x + bx_1)v_1 + (a_1x + ax_1)v, \quad u_1 = (bx + b_1x_1)v_1 + (ax + a_1x_1)v,$$
wo nun v ein arbiträres Gebiet bleibt.

Machen wir mit diesen Ausdrücken die Probe der Auflösung, von der nicht ganz leicht zu sehen ist, dass sie wirklich stimmt.

Zunächst ist zu bemerken, dass man durch Tilgung der Terme ax und bx_1 schon die aufzulösende Gleichung hätte vereinfachen können zu:
$$a_1x_1u + b_1xu_1 = 0,$$
und dass ebenso bei u der zweite, bei u_1 der dritte von den vier Termen in Klammer wegfällt.

Indem man diese vereinfachte Gleichung gemäss Th. 50) nach der Unbekannten u auflöste, ergäben sich für u und u_1 die noch einfacheren Ausdrücke:

$$v) \qquad u = b_1xv_1 + (a + x)v, \qquad u_1 = (b + x_1)v_1 + a_1x_1v$$

welche auch aus den vorigen durch einen Kunstgriff ableitbar, indem man z. B. oben bei u in der zweiten Klammer den Term ax, der ja 0 ist, zufügt und Th. 33_+) anwendet.

Nun wird:
$$a_1u + bu_1 = a_1b_1xv_1 + a_1xv + bv_1 + a_1bx_1v,$$
von welchem Ausdruck wir einzusehen haben, dass er (bei beliebigem v) gleich x sein muss.

Wegen $bx_1 = 0$ fällt zunächst der letzte Term fort, und für den vorletzten können wir ebendeshalb schreiben:

$$bv_1 = bv_1(x + x_1) = bv_1x + v_1bx_1 = bv_1x + 0 = bv_1x.$$

Alsdann tritt x als gemeinsamer Faktor heraus, und sein Koeffizient wird:

$$(a_1b_1 + b)v_1 + a_1v = (a_1 + b)v_1 + a_1v = (a_1 + ab)v_1 + a_1v = a_1v_1 + a_1v = a_1,$$

da ja $ab = 0$ ist.

Hiemit ist denn gefunden:

$$a_1u + bu_1 = a_1x,$$

und bleibt nun blos noch in Betracht zu ziehen, dass wegen $ax = 0$ in der That:

$$a_1x = a_1x + ax = (a_1 + a)x = 1 \cdot x = x$$

sein muss.

Die Probe mit den Ausdrücken v) stimmte also für jede Bedeutung von v.

Der Parameter u der Auflösung $x = a_1u + bu_1$ unsrer Gleichung $ax + bx_1 = 0$ *ist* hienach *bei gegebenem* x im Allgemeinen *weder vollkommen beliebig noch vollkommen bestimmt.* Vielmehr ist aus den Darstellungen v) für denselben zu ersehen, dass er zwischen b_1x und $a + x$ liegen muss, in Formeln, dass:

$$\varphi) \qquad b_1x \subseteq u \subseteq a + x$$

und dazwischen kann er auch jeden Wert zugeteilt erhalten, wie man durch Anwendung des Th. 47) auf die Funktion, welche u hier von v ist, erkennt.

χ) *Völlig beliebig* könnte bei gegebnem x der Parameter u nur werden, wenn $b_1x = 0$ und $a + x = 1$ wäre. Bilden wir aber aus diesen Relationen und der vorausgesetzten $ax + bx_1 = 0$ die vereinigte Gleichung, so erhalten wir:

$$(a + b_1)x + (a_1 + b)x_1 = 0,$$

woraus durch Elimination von x entsteht:

$$(a + b_1)(a_1 + b) \quad \text{oder} \quad ab + a_1b_1 = 0,$$

d. h. $a = b_1$, sowie $b = a_1$, womit wir auf den schon unter σ) behandelten Fall verwiesen werden, in welchem die Wurzel x vollkommen bestimmt war.

ψ) *Völlig bestimmt* könnte dieser Parameter u nur sein, wenn

$$b_1x = a + x, \quad \text{d. h.} \quad a_1x_1 \cdot b_1x + (a + x)(b + x_1) = 0,$$

oder $ax_1 + bx = 0$ noch wäre, im Ganzen also, d. h. im Verein mit der ursprünglichen Gleichung, wenn:

$$ax + bx_1 + ax_1 + bx = 0,$$

oder

$$(a + b)(x_1 + x) = a + b = 0,$$

mithin sowol $a = 0$, als $b = 0$ wäre.

In diesem Falle würde durch die aufzulösende Gleichung:

$$0 \cdot x + 0 \cdot x_1 = 0$$

offenbar x vollkommen unbestimmt gelassen, und müsste in der That $u = x$ selbst genommen werden, falls hier die Formel

$$x = bu_1 + a_1 u = 0 \cdot u_1 + 1 \cdot u$$

noch die Auflösung darstellen sollte.

Augenscheinlich ist jedoch dieser Fall nur ein Grenzfall von sehr speziellem Charakter und untergeordneter Wichtigkeit, der wol kaum besonders gemerkt zu werden braucht.

ω) *Jedenfalls ist*, wie aus φ) nochmals und schon aus γ) ersichtlich, *die Annahme* $u = x$ *selber* für den unbestimmten Parameter *genügend, um einen gegebenen Partikularwert* x *aus dem allgemeinen Ausdruck der Wurzeln hervorgehen zu lassen.*

§ 22. **Fortsetzung, auch für mehrere Unbekannte.**

Nachdem vorstehend das Auflösungs- sowie das Eliminationsproblem für *eine* Unbekannte erledigt ist (insoweit als gegebene Propositionen nur Subsumtionen und Gleichungen in Betracht kommen), fassen wir den Fall in's Auge, wo *mehrere* Unbekannte vorliegen.

Diese werden, wenn sie in einem Propositionensysteme vorkamen, in der Regel auch in dessen vereinigter Gleichung auftreten. Wenn nicht — so fallen sie aus dem System von selbst heraus, da mit diesem ja die vereinigte Gleichung logisch äquivalent ist. Wird diese stehen bleibende Gleichung sich als „falsch“ herausstellen, so war das ganze Auflösungsproblem unmöglich; andernfalles aber bleiben die herausfallenden Unbekannten vollkommen *unbestimmt*, und, sofern nicht noch anderweitige Bestimmungen für sie hinzutreten, *willkürlich*. Es bleibt dann nur noch die Frage nach den Wertsystemen der nicht herausfallenden Unbekannten zu beantworten.

Seien $x, y, z, \ldots$ die in der vereinigten Gleichung auftretenden Unbekannten. So wird die linke Seite derselben sich nach jeder einzelnen von diesen, sowie nach allen zusammen entwickeln lassen.

Man kann nach der (vollständigen) Resultante der Elimination irgend einer von ihnen, oder einer Gruppe derselben, oder auch von allen miteinander fragen.

Hier gilt nun der Satz:

Zusatz 1 zu Th. 50). *Die Resultante der Elimination sämtlicher Unbekannten wird erhalten, indem man das Produkt der Koeffizienten*

des nach denselben entwickelten Polynoms der Gleichung gleich 0 *setzt.* [Ausdehnung von η) des § 21.]

Wir beweisen den Satz zunächst für irgend zwei Unbekannte x, y. Nach diesen entwickelt hat die Gleichung die Form:

α) $$axy + bxy_1 + cx_1y + dx_1y_1 = 0,$$

oder nach x geordnet:

β) $$(ay + by_1)x + (cy + dy_1)x_1 = 0,$$

desgleichen nach y geordnet:

γ) $$(ax + cx_1)y + (bx + dx_1)y_1 = 0,$$

wobei die Koeffizienten a, b, c, d nun noch die übrigen Unbekannten $z, \ldots$ als Argumente enthalten können.

Eliminirt man x allein, so kommt nach schon bekannter Regel:

β') $$(ay + by_1)(cy + dy_1) = 0 \quad \text{oder} \quad acy + bdy_1 = 0,$$

und wenn hieraus jetzt y eliminirt wird:

$$acbd = 0.$$

Eliminirte man aber zuerst y, so käme

γ') $$(ax + cx_1)(bx + dx_1) = 0 \quad \text{oder} \quad abx + cdx_1 = 0$$

woraus durch Elimination von x entsteht:

$$abcd = 0$$

— das ist wesentlich dasselbe wie vorhin.

δ) *Es ist* also zunächst *gleichgültig, ob man erst x, dann y, oder ob man erst y, dann x eliminirt.*

Die gefundene Relation $abcd = 0$ muss nun aber auch die volle Resultante bei Elimination des Paars von Gebieten x, y sein. Denn wenn sie erfüllt ist, so gibt es jedenfalls (mindestens) ein Gebiet x, welches die vorhergehende Gleichung erfüllt — vergl. δ) des § 21). Weil diese aber die Resultante der Elimination von y aus der ersten Gleichung vorstellte und somit (für das gedachte x) erfüllt ist, so gibt es (zu diesem) nun auch ein y, welches die erste Gleichung erfüllt. Sonach gibt es, sobald die Relation $abcd = 0$ erfüllt ist, sicherlich ein Wertepaar von x, y, für welches die ursprüngliche Gleichung richtig wird, d. h. diese Relation ist die (volle) Resultante der Elimination von x und y zugleich.

In dieser Weise kann man weiter schliessen. Bezüglich dreier Unbekannten x, y, z entwickelt hat die Gleichung die Form:

$$axyz + bxyz_1 + cxy_1z + dxy_1z_1 + ex_1yz + fx_1yz_1 + gx_1y_1z + hx_1y_1z_1 = 0$$

und gibt die Elimination von z:

$$(axy + cxy_1 + ex_1y + gx_1y_1)(bxy + dxy_1 + fx_1y + hx_1y) = 0,$$

oder:

$$abxy + cdxy_1 + efx_1y + ghx_1y_1 = 0.$$

Hieraus aber folgt durch Eliminiren von y nebst x nach der vorstehend schon bewiesenen Regel sogleich:

$$abcdefgh = 0,$$

und dasselbe würde (nur mit umgestellten Faktoren) sich auch ergeben haben, hätte man zuerst x nebst y, hernach z eliminirt.

Man schliesst nun, wie vorhin, dass diese Relation die volle Resultante der Elimination von x, y, z sein muss. Denn ist sie erfüllt, so gibt es mindestens *ein* Wertepaar von x, y, für das die vorhergehende Gleichung und zu diesem dann auch einen z-Wert, zusammen also ein Wertetripel von x, y, z, für welches die erste Gleichung erfüllt ist.

Man könnte auch zuerst z und y auf einmal eliminiren; so ergäbe sich:

$$(ax + ex_1)(bx + fx_1)(cx + gx_1)(dx + hx_1) = 0$$

oder

$$abcdx + efghx_1 = 0,$$

woraus dann durch Elimination des x wiederum dieselbe Resultante folgte — desgleichen, falls man etwa in umgekehrter Ordnung erst x, hernach y und z miteinander eliminirte.

ε) *Es ist* also *auch gleichgültig, ob man die Gruppe x, y und ausserdem z, oder ob man x für sich, und die Gruppe y, z auf einmal eliminirt.*

Man sieht: *das Eliminiren von Symbolen ist in Bezug auf diese* — nach δ) — *eine kommutative und* — nach ε) — *auch eine assoziative Operation.*

Wollte man vollkommen gründlich sein, so hätte man auf dieselbe alle in Anhang 3 über die Multiplikation angestellten Betrachtungen zu übertragen — ähnlich, wie dies auch in Bezug auf das Entwickeln der Fall war — vergl. § 19 Zus. 1 zu Th. 44). Und diese Übertragung unterläge auch nicht der geringsten Schwierigkeit, indem die erwähnten Betrachtungen einfach Geltung behalten, falls man nur unter ab, anstatt ein Produkt, vorübergehend versteht: das Ergebniss einer Elimination von a, b — aus irgend einer bestimmten Eliminationsbasis — resp. der Entwickelung nach a, b von irgend einer bestimmten Funktion.

Aber auch schon darum, weil in unsrer resultirenden Relation keine Unbekannte hinsichtlich ihres Koeffizienten (oder desjenigen ihrer

Negation) bevorzugt erscheint (desgleichen keine Gruppe von Unbekannten und Negationen solcher, kein Konstituent der Entwickelung), m. a. W. schon aus der *Symmetrie* dieser Relation (in Bezug auf die den verschiedenen Konstituenten zugeordneten Koeffizienten) ist zu ersehen, dass die *Reihenfolge und Gruppirung*, in welcher die Eliminanden beseitigt werden, dass die ganze *„Anordnung des Eliminationsprozesses“ gleichgültig* sein muss für die zu erwartende Resultante. Genauer:

Zusatz 2 zu Th. 50). *Es ist für das Ergebniss ohne Belang, in welcher Reihenfolge man aus einer Gleichung die verschiedenen Unbekannten, sei es einzeln, sei es in beliebigen Gruppen eliminirt, auch einerlei, in welchen Gruppen, und ob man sie successive oder ob man sämtliche Unbekannte auf einmal eliminirt.*

Da das Entwickeln nach vielen Symbolen zugleich S. 416 eine ermüdende Operation ist, bei welcher leicht auch Versehen mitunterlaufen, so wird man behufs Elimination einer Gruppe von solchen am besten so verfahren, dass man erst eine Unbekannte allein eliminirt, z. B. x. Die Resultante wird nur noch die übrigen Unbekannten y, $z, \ldots$ enthalten. Aus dieser wird man hernach eine zweite von den Unbekannten eliminiren, z. B. y, aus der so gewonnenen neuen Resultante eine dritte z, und so weiter fortschreitend nach und nach die sämtlichen Unbekannten.

ζ) Auf Grund des Zusatzes 1 zu Th. 50) wäre — in Erweiterung der unter η) des § 21 gemachten Bemerkungen — leicht zu zeigen, dass *wenn die vereinigte Gleichung rechterhand auf* 1 *gebracht ist,* auch hier (bei beliebig vielen Eliminanden) wieder die Resultante erhalten wird, indem man einfach die *Konstituenten* des nach den Eliminanden entwickelten Polynoms der Gleichung (mithin diese Eliminanden selbst samt ihren Negationen) *durchweg auslöscht.*

War z. B. $f(x, y) = 0$ die Gleichung nach zweien von den Unbekannten entwickelt, so wird sie nun

$$f_1(x, y) = 1 \quad \text{oder} \quad a_1 xy + b_1 xy_1 + c_1 x_1 y + d_1 x_1 y_1 = 1\,,$$

und gibt durch Ausstreichen der Konstituenten:

$$a_1 + b_1 + c_1 + d_1 = 1,$$

was mit $abcd = 0$ äquivalent ist. Etc.

η) Anmerkung zum Zusatz 2 des Th. 50).

Im Gegensatz zu vorstehendem ist es aber *nicht gleichgültig*, welches Verfahren man beim Eliminiren einschlägt in folgender Hinsicht.

Hat man ein *System* von Propositionen (wir können ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit sagen: Gleichungen, da sich ja auch die Subsumtionen stets als Gleichungen darstellen liessen) — also: Hat man ein System von Gleichungen, so kann man ein Symbol (oder auch eine Gruppe von solchen) aus diesen, indem man sie *getrennt* lässt — mithin aus jeder Gleichung für sich — eliminiren und schliesslich die Resultanten zu einem einzigen Ausspruch zusammenfassen.

Oder man kann auch die Gleichungen des Systems zuerst in eine einzige zusammenziehen und aus dieser „vereinigten" Gleichung alsdann das Symbol (resp. die gedachte Gruppe der Symbole) eliminiren.

Auf letzterem Wege ergab nach unsern Regeln sich die volle Resultante der Elimination.

Auf dem *erstern* Wege jedoch erhält man im Allgemeinen ein *weniger umfassendes* Resultat, zwar wol ein richtiges, aber nicht das volle Eliminationsergebniss — wie dies schon an einfachen Beispielen nachweisbar ist.

Wird z. B. das Symbol x aus den beiden Gleichungen des Systems:

$$ax + bx_1 = 0, \quad cx + dx_1 = 0$$

einzeln eliminirt, so lautet die vereinigte Gleichung der beiden Ergebnisse:

$$ab + cd = 0$$

geradeso, wie sie auch lauten würde, wenn man aus den Gleichungen:

$$ax + bx_1 = 0, \quad cy + dy_1 = 0$$

das Paar x, y eliminirt hätte. [Offenbar kam hiebei nicht zur Geltung, nicht zum Ausdruck, dass die Unbekannte y der zweiten Gleichung *die nämliche* sein sollte, wie die der ersten, dass beide Gleichungen für *denselben* Wert des Eliminanden erfüllt seien.]

Dagegen ist die Resultante der Elimination von x aus der vereinigten Gleichung:

$$(a + c)x + (b + d)x_1 = 0$$

(von jenen) nun:

$$(a + c)(b + d) = ab + ad + bc + cd = 0$$

— sonach umfassender als das vorige Eliminationsergebniss, indem sie, ausser $ab = 0$ und $cd = 0$, auch noch besagt — was daraus allein nicht folgen würde — dass auch $ad = 0$ und $bc = 0$ sein muss!

Behufs Gewinnung des vollen Eliminationsergebnisses muss man also *erst vereinigen, dann eliminiren.*

Gegen diese Vorschrift kann man freilich zuweilen auch ohne Schaden sündigen — im obigen Exempel insbesondre dann, wenn die dabei ver-

lornen Terme von selbst oder analytisch verschwinden, wie dies z. B. eintreten würde, wenn sich *ad* als von der Form $\alpha\beta_1 \cdot \alpha_1\beta$ und *cd* als von der Form $\alpha\beta \cdot \alpha_1\beta_1$ oder vielleicht $\gamma\delta \cdot \varepsilon\delta_1$, und dergleichen, herausstellte. Es haben durch solchen Verstoss einzelne meiner amerikanischen Mitarbeiter auf dem Feld der logischen Algebra bei der Behandlung spezieller Aufgaben einen Vorsprung vor mir gewonnen, indem sie allerhand Weitläufigkeiten des Druckes ersparten und mit einfacherem Formelansatz zum Ziel kamen, als wenn sie nach den von mir empfohlenen Schemata streng systematisch zuwerke gegangen wären. Solchen Vorsprung muss ich aber als einen illegitimen bezeichnen, sofern sich die dabei befolgte Taktik bei andern Gelegenheiten rächen müsste.

Durch die vorstehenden Überlegungen wurde das Eliminationsproblem für eine beliebige Menge von Eliminanden erledigt.

ϑ) Es frägt sich noch, wie das Auflösungsproblem bei einer *Mehrzahl* von Unbekannten sich gestaltet.

Im Gegensatz zur numerisch rechnenden Mathematik muss das Problem der Auflösung eines Propositionensystems nach *mehreren* ebenso wie schon nach *einer* Unbekannten allemal mit der Elimination eben dieser Unbekannten verbunden werden in der Art, dass diese Elimination der eigentlichen Auflösung jeweils vorauszuschicken ist. Und ferner scheint das Auflösen nach mehrern Unbekannten für die Logik nicht die entsprechende Wichtigkeit zu besitzen, wie für die Arithmetik.

Die Unbekannten mögen $x, y, z, \ldots$ heissen. Eliminirt man (aus der vereinigten Gleichung des Problemes) sie sämtlich — z. B. *successive in der umgekehrten Ordnung als wie sie angegeben sind* — so ergibt sich als Resultante eine Gleichung, in der nur noch bekannte Gebiete $0, 1, a, b, c, d, \ldots$ vorkommen werden.

Die Resultante — $R = 0$ möge sie heissen — *kann* eine *analytische* Identität sein, wie es namentlich der Fall sein wird, wenn sie auf die Gleichung $0 = 0$ sich zusammenzieht, während auch umgekehrt, nachdem sie rechts auf 0 gebracht ist, die linke Seite R derselben auf Grund der Regeln des Kalkuls dann ebenfalls identisch 0 sein wird. In diesem Falle wird die Aufgabe der Berechnung von $x, y, z, \ldots$ unbedingt lösbar sein für alle denkbaren Wertsysteme der Parameter oder Symbole $a, b, \ldots$

Oder aber: die Resultante $R = 0$ ist selbst eine *synthetische* Gleichung, eine *Relation*.

Ist dieselbe von den gegebenen Symbolen $a, b, \ldots$ *nicht* erfüllt, indem sich für ihre linke Seite R eben ein gemäss den Voraussetzungen des Problems *von* 0 *verschieden* zu denkender Wert herausstellt (und

wie es namentlich vorliegen wird, sobald die Resultante etwa auf die Gleichung $1 = 0$ sich zusammenzieht), so wird unsre Aufgabe unlösbar, unmöglich sein, nicht etwa, weil man alsdann die Werte der Unbekannten nicht sollte zu entdecken vermögen, sondern weil es dann gar keine solchen Werte geben kann, welche die aufzulösende Gleichung erfüllen.

Ist dagegen die resultirende Relation $R = 0$ von den gegebenen Gebieten $a, b, \ldots$ erfüllt, so ist die Aufgabe lösbar, die Auflösung möglich, und kann man alsdann gleichwie im ersten Falle schreiten zur Ermittelung der „Wurzeln", d. h. der (aller derjenigen) Wertsysteme, welche für $x, y, z, \ldots$ eingesetzt die vereinigte Gleichung erfüllen.

ι) Häufig sind auch die Parameter $a, b, c, \ldots$ nicht speziell gegeben, sondern selbst noch unbestimmte, *als gegeben blos zu denkende* Gebiete; sie werden etwa, da man in der Wissenschaft sogleich möglichst allgemeine Probleme zu lösen bestrebt ist, uns *allgemeine* Gebiete von vornherein vorzustellen haben.

In solchem Falle kann man nach der gleichen Methode, die wir hinsichtlich $x, y, z, \ldots$ noch auseinanderzusetzen haben, die Parameter $a, b, \ldots$ zuerst selbst als Unbekannte so bestimmen, dass sie jene Resultante $R = 0$ auf die allgemeinste Weise befriedigen. Alsdann ist in der That auch kein Unterschied mehr vorhanden zwischen gegebenen und gesuchten Gebieten; wir mögen dann sämtliche Buchstabengebiete, welche in die vereinigte Gleichung eingehen, gleichmässig als „Unbekannte" bezeichnen und erlangen den Vorteil, dass das Auflösungsproblem nun stets lösbar wird, sofern die Gleichung nicht geradezu auf die Absurdität $1 = 0$ hinausläuft.

Denken wir uns nämlich alle Buchstaben eliminirt, bis auf *einen* a, so kann die Resultante nur eine von folgenden vier Formen haben:

$0 \cdot a + 0 \cdot a_1 = 0$, d. h. $0 = 0$, wo a dann unbestimmt bleibt,

$1 \cdot a + 0 \cdot a_1 = 0$, wo dann $a = 0$ sich bestimmt,

$0 \cdot a + 1 \cdot a_1 = 0$, d. h. $a_1 = 0$, wo sich $a = 1$ bestimmt,

$1 \cdot a + 1 \cdot a_1 = 0$, d. h. $1 = 0$, was (für jedes a) unmöglich —

— in Anbetracht, dass ja ausser a keine Buchstaben mehr in der Resultante vorkommen werden, sonach das Polynom der letztern, nach a entwickelt, als Koeffizienten nur 0 oder 1 aufweisen kann.

Im ersten Fall war die Resultante als eine analytische Gleichung erfüllt, hier fiel a mit den übrigen Buchstaben von selbst heraus und bleibt es willkürlich.

Im zweiten und dritten Falle erwies sich a ($= 0$ oder aber 1) als absolut bestimmt; man wird diesen seinen ermittelten Wert in die vereinigte Gleichung einsetzen unter Vereinfachung derselben in der dadurch bedingten Weise, und wird es fortan ausser Betracht lassen um sich nur noch mit der Aufgabe zu beschäftigen diese vereinfachte Gleichung aufzulösen, so als wenn sie die ursprünglich gegebene gewesen wäre; dieselbe enthält dann mindestens einen Buchstaben weniger.

In allen drei Fällen haben wir dann eine Unbekannte weniger, weil auch im ersten a als willkürlich bleibend erkannt, gefunden ist.

Im vierten Falle wird man das Problem als unzulässig verlassen. Da die Resultante aus der vereinigten Gleichung *folgte*, so wird auch diese schon absurd sein, für keinen Wert von a und für kein Wertsystem der Buchstabensymbole — kurzum überhaupt nicht — zu bestehen vermögen.

Liegt dieser vierte Fall nun *nicht* vor, so kann auch bei keiner ferneren Elimination irgend einer Buchstabengruppe die absurde Gleichung $1 = 0$ mehr vorkommen. Denn da diese letztere auch a nicht enthält, so kann sie jedenfalls als „ein Ergebniss der Elimination des a“ auch angesehen werden, und müsste also, entgegen der Annahme, in der *vollen* Resultante der Elimination von a schon enthalten gewesen sein — und eben die volle Resultante hatten wir ja beim Eliminiren jederzeit gebildet.

Wir hätten nunmehr jetzt zur Elimination und Berechnung von $b, c, \ldots$ zu schreiten in der Weise wie es für $x, y, \ldots$ des weitern auseinandergesetzt wird.

$\varkappa$) Aus der *vor*letzten Eliminationsresultante $R(x) = 0$, welche beim Einhalten der oben empfohlenen Anordnung des Eliminationsprozesses von den Unbekannten nur noch x enthalten kann, berechne man x gemäss Th. 50_+). Dies ist möglich, weil die Bedingung für ihre Auflösbarkeit ja eben das Erfülltsein der (letzten) Resultante $R = 0$ war. Im Ausdruck für die Wurzel x wird ein willkürlicher Parameter u auftreten.

Für jeden Wert der somit gefundenen Wurzel x wird dann die Gleichung $R(x) = 0$ erfüllt sein, weil die Probe für die Auflösung, wofern sie richtig vollzogen war, doch sicher stimmt.

Diese Gleichung $R(x) = 0$ war aber selbst die Resultante der Elimination von y aus der *dritt*letzten Eliminationsresultante

$$R(x, y) = 0,$$

welche von den Unbekannten ausser x nur noch y enthielt (da die folgenden Unbekannten bereits eliminirt waren). Das Erfülltsein dieser Resultante $R(x) = 0$ ist die Bedingung für die Auflösbarkeit der Gleichung $R(x, y) = 0$ nach der Unbekannten y.

Setzt man in letztere den für die Wurzel x gefundenen Wert für x ein, so enthält sie ausser der Unbekannten y nur noch die bekannten Gebiete $a, b, \ldots$ nebst dem willkürlichen Parameter u, und ist sicher nach y auflösbar. Ihre Auflösung gemäss Th. 50) liefert uns nun auch diese zweite Wurzel, deren Ausdruck noch einen neuen willkürlichen Parameter v enthalten wird.

Die gefundenen Wertepaare x, y befriedigen jetzt die drittletzte Resultante $R(x, y) = 0$, welches die Bedingung war für die Auflösbarkeit nach z der *viert*letzten Resultante $R(x, y, z) = 0$, die ausser

diesen als Argumente angeführten drei Unbekannten keine andern enthält. Nach Einsetzung der gefundenen Wurzelwerte von x, y wird man daher durch Auflösung gemäss Th. 50) jetzt die dritte Wurzel z erhalten deren Ausdruck einen neuen arbiträren Parameter w in sich schliesst.

Und so kann man augenscheinlich fortfahren bis alle Unbekannten gefunden sind, welche dann auch die (zuletzt nach der letzten Unbekannten aufgelöste, das ist die) ursprünglich gegebene vereinigte Gleichung erfüllen werden.

λ) Wir wären hiemit zu Ende, wenn nicht noch eine beim successiven Eliminiren von .. z, y, x zuweilen eintretende Möglichkeit zu berücksichtigen wäre, die wir mit Stillschweigen übergangen haben: Es kann bei diesem successiven Eliminiren — eventuell zu verschiedenen Malen — vorkommen, dass beim Eliminiren einer bestimmten Unbekannten *mit dieser zugleich noch mehrere andere*, dass eine ganze Gruppe von solchen auf einmal herausfällt.

Fällt z. B. beim Eliminiren von y auch x zugleich heraus, so wird die der definitiven Resultante $R = 0$ unmittelbar vorangehende *vor*letzte Resultante jetzt nicht $R(x) = 0$ sondern $R(x, y) = 0$ zu nennen sein. Fallen unterweges mit z zugleich schon x und y heraus, so ist die *vor*letzte Resultante von der Form $R(x, y, z) = 0$, etc.

Man kann erstlich solchen Fall beseitigen, indem man — im ersten Beispiel — zwischen die allerletzte $R = 0$ und die vorletzte $R(x, y) = 0$ die Gleichung

$$R \cdot x + R \cdot x_1 = 0$$

als nunmehrige *vor*letzte unter $R(x) = 0$ zu verstehende Resultante einschiebt — eine Gleichung, die sich aus $R = 0$ durch „Entwickelung" der linken Seite nach x ergab.

Im zweiten Beispiel, indem man zwischen $R(x\,y\,z) = 0$ und $R = 0$ als drittletzte und vorletzte Resultante die Gleichungen einschiebt:

$$R \cdot xy + R \cdot xy_1 + R \cdot x_1y + R \cdot x_1y_1 = 0$$

als dermaligen Stellvertreter des im Text erwähnten $R(x, y) = 0$ und wieder $R \cdot x + R \cdot x_1 = 0$ als Stellvertreter von $R(x) = 0$ — und so fort.

Zur Erledigung des Falles genügt dann der Hinweis darauf, dass sofern *eine* Unbekannte aus der nach ihr aufzulösenden Gleichung von selbst herausfällt, dieselbe (wie bereits erkannt) unbestimmt bleibt, hier also, wo sie durch die Gleichung allein bestimmt werden sollte, als willkürlich oder arbiträr zu bezeichnen sein wird.

Zweitens erkennt man aber auch ganz direkt, dass wenn beim Eliminiren einer Unbekannten auch die übrigen mit herausfallen, diese alle bis auf *eine* willkürlich bleiben müssen, welche letztere sich durch die übrigen ausdrücken lässt.

Gibt z. B. die Gleichung $R(x\,y\,z) = 0$ beim Eliminiren von z sogleich eine Resultante $R = 0$, die auch x und y nicht mehr enthält, so ist — das Erfülltsein der letzteren vorausgesetzt — die erstere nach z schon *not-*

wendig auflösbar (also: welche Werte auch immer unter y und x verstanden werden mögen; es bleiben somit x und y arbiträr, und lässt sich durch Auflösung der Gleichung $R(x, y, z) = 0$ nach z nunmehr dieses durch die beliebigen x und y ausdrücken).

Wir mögen hienach als

Zusatz 3 zu Th. 50) den Satz registriren: *Auch nach jedem System von Unbekannten kann jedes System von Subsumtionen und Gleichungen bequem aufgelöst werden, sobald* dieselben nur überhaupt zulässig und miteinander verträglich sind, was daran zu erkennen, dass *die Resultante der Elimination dieser Unbekannten erfüllt ist.*

Sobald es nur Wertsysteme der Unbekannten gibt, welche eingesetzt in die Propositionen des Systems dieselben erfüllen, sind solche auch immer leicht vollständig aufzufinden.

Für die allgemeinste Gleichung mit zwei Unbekannten — α) dieses Paragraphen wollen wir die Auflösung nach x, y wirklich ausführen. Dies lässt sich auf zwei Arten bewerkstelligen. Unter Voraussetzung, dass die Resultante der Elimination von x und y:

$$abcd = 0$$

erfüllt sei, kann erst y eliminirt und aus der Resultante γ') das x berechnet werden, hernach aber y aus γ); oder umgekehrt mittelst β') und β). Ersteres gibt:

$$\mu) \qquad x = cdu_1 + (a_1 + b_1)u, \qquad x_1 = (c_1 + d_1)u_1 + abu$$

und dies in γ) eingesetzt:

$$\{(a + d_1)cu_1 + (b_1 + c)au\}\, y + \{(b + c_1)du_1 + (a_1 + d)bu\}\, y_1 = 0$$

woraus sich endlich berechnet:

$$\mu') \quad \begin{cases} y = \{(b + c_1)du_1 + (a_1 + d)bu\}\, v_1 + \{(a_1 d + c_1)u_1 + (bc_1 + a_1)u\}\, v, \\ y_1 = \{(b_1 c + d_1)u_1 + (ad_1 + b_1)u\}\, v_1 + \{(a + d_1)cu_1 + (b_1 + c)au\}\, v. \end{cases}$$

Letzteres gibt:

$$\nu) \qquad y = bdv_1 + (a_1 + c_1)v, \qquad y_1 = (b_1 + d_1)v_1 + acv,$$

was in β) eingesetzt liefert:

$$\{(a + d_1)bv_1 + (b + c_1)av\}\, x + \{(b_1 + c)dv_1 + (a_1 + d)cv\}\, x_1 = 0$$

und aufgelöst:

$$\nu') \quad \begin{cases} x = \{(b_1 + c)dv_1 + (a_1 + d)cv\}\, u_1 + \{(a_1 d + b_1)v_1 + (b_1 c + a_1)v\}\, u, \\ x_1 = \{(bc_1 + d_1)v_1 + (ad_1 + c_1)v\}\, u_1 + \{(a + d_1)bv_1 + (b + c_1)av\}\, u. \end{cases}$$

Die Wurzeln x, y werden hienach durch die Ausdrücke μ, μ') oder nach Belieben auch ν, ν') vollständig oder in allgemeinster Weise dargestellt, wobei u, v jedes denkbare Gebietepaar vorzustellen haben.

Es könnten nebenbei auch die Faktoren u, u_1, v, v_1 zur einen Hälfte unterdrückt werden, nämlich bei x in μ) der u_1, bei x_1 der u, etc.

Man bemerkt die Verschiedenartigkeit und Unsymmetrie, der für die einen und für die andern Wurzeln sich ergebenden Darstellungen je nachdem man die eine oder die andere Reihenfolge bei dem Auflösungsverfahren einhält. Diese Wahrnehmung wird uns noch eigenartige Forschungen in § 24 auszuführen anregen.

$\mathfrak{x}$) Von grösserer Wichtigkeit als die vorstehend erledigte sind die Aufgaben, bei welchen nicht nach den Werten der verschiedenen Unbekannten $x, y, z, \ldots$ selber, je für sich, sondern sogleich *nach dem Werte einer bestimmten Funktion* $f(x, y, z, \ldots)$ dieser letzteren gefragt wird.

Sind die Unbekannten bereits selber sämtlich ermittelt, so brauchte man ihre Ausdrücke nur in den gegebenen Ausdruck dieser Funktion einzusetzen, um auch diese Aufgabe gelöst zu haben. Das Resultat würde so eine ganze Reihe arbiträrer Parameter $u, v, w, \ldots$ enthalten, die behufs Vereinfachung desselben nun noch gemäss Th. 48) Zusatz durch einen einzigen solchen ersetzt werden müssten.

Dies wäre unbequem; zudem würde den Unbekannten je nach der Reihenfolge, in der man sie beim Auflösen ermittelt, wiederum eine verschiedenartige Behandlung zuteil werden, die einen sozusagen vor den andern bevorzugt erscheinen. Überhaupt aber wäre die angegebene Art, das Problem zu lösen, obwol scheinbar als die am nächsten liegende sich darbietend, doch als ein Umweg zu bezeichnen, in Anbetracht dass eine sehr viel einfachere und in Hinsicht sämtlicher Unbekannten symmetrisch zuwerke gehende Lösungsweise der Aufgabe möglich ist.

Es ist bemerkenswert, dass ohne die Werte der Unbekannten x, $y, z, \ldots$ irgend selbst zu kennen man die Berechnung von $f(x, y, z, \ldots)$ doch unmittelbar zu leisten vermag:

Zusatz 4 zu Th. 50). Mit den einfachen Mitteln des Th. 50) sind wir schon im stande, *wenn ein beliebiges System von simultanen Gleichungen und Subsumtionen gegeben ist, irgend eine verlangte Funktion* $f(x, y, z, \ldots)$ *einer Gruppe von („unbekannten“) Gebieten — falls es gewünscht wird: ohne Rücksicht auf die Werte einer zweiten Gruppe* $m, n, p, q, r, \ldots$ *— durch die Symbole einer dritten Gruppe, nämlich durch alle übrigen* $a, b, c, \ldots$ *auszudrücken*, resp. im identischen Kalkul zu „berechnen“.

Man füge einfach dem gegebenen Systeme von Propositionen die neue Gleichung

$$t = f(x, y, z, \ldots)$$

hinzu — indem man eben für die gesuchte Funktion einen einfachen

Namen, als welchen wir t gewählt haben, einführt. Man bilde nun erst die vereinigte Gleichung des also vergrösserten Systemes, eliminire aus dieser sowol die Symbole $m, n, p, q, r, \ldots$ der zweiten als auch die $x, y, z, \ldots$ der ersten Gruppe, so wird man eine Resultante erhalten, die ausser dem gesuchten t nur noch die Gebiete $a, b, c, \ldots$ der dritten Gruppe enthält. Und diese nach der Unbekannten t gemäss Th. 50_+) aufgelöst führt zur Erledigung unsrer Aufgabe.

Den vorliegenden Fingerzeig hat schon Boole gegeben.

Exempel siehe in § 25 unter Aufgabe 24, .. 26 und anderwärts.

Hinsichtlich der „Determination" auch dieses Problems, seine eventuelle Unzulässigkeit, Bestimmtheit oder Unbestimmtheit, sind wiederum verschiedene Vorkommnisse möglich, welche sich aber der Leser nach dem Vorangegangenen leicht selber zurecht legen wird, und die zum Teil auch durch die Beispiele illustrirt werden.

Wenn — wie dies wol meist beabsichtigt sein wird — die Symbole $m, n, p, q, r, \ldots$ in dem Ausdruck $f(x, y, z, \ldots)$ nicht vorkommen, so kann man natürlich auch aus der vereinigten Gleichung des noch unvergrösserten Propositionensystems erst einmal die $m, n, p, q, \ldots$ eliminiren und die so gewonnene Resultante dann noch mit der Gleichung $t = f(x, y, z, \ldots)$ oder also

$$t f_1(x, y, z, \ldots) + t_1 f(x, y, z, \ldots) = 0$$

„vereinigen", um jetzt nur mehr $x, y, z, \ldots$ zu eliminiren. Bei dieser Anordnung des Verfahrens wird man alsdann mit weniger komplizirten Relationen zu thun haben, als bei der Anordnung nach dem allgemeineren Schema. —

Man sieht: auf unserm bisherigen Standpunkte, wo wir als „Propositionen" nur erst Subsumtionen und Gleichungen kennen, hat der identische Kalkul den seltenen Vorzug, die allgemeinsten Aufgaben, die innerhalb seines Rahmens überhaupt erdacht werden können, auch wirklich zu lösen.

Dass immerhin auch hier noch etwas zu thun bleibt, dass fernere Fortschritte der Disziplin noch möglich und anzustreben sind, werden wir in § 24 sehen, wo an die Art und Weise der Lösung obiger Aufgaben — z. B. in Hinsicht ihrer „Symmetrie" bezüglich gewisser Symbolgruppen — noch weitere Anforderungen gestellt werden.

Auch in Anhang 6 eröffnen sich Perspektiven auf noch fernere Probleme. Man kann von diesem Anhang grösstenteils schon jetzt — noch besser nach § 24 Kenntniss nehmen. —

Zwölfte Vorlesung.

§ 23. Die inversen Operationen des Kalkuls: identische Subtraktion und Division als Exception und Abstraktion. Die Negation als gemeinsamer Spezialfall beider.

Eine erste Anwendung des Haupttheorems 50) wollen wir — mehr im theoretischen Interesse — machen, um über die zur Addition und Multiplikation entgegengesetzten oder inversen Operationen des Kalkuls Klarheit zu gewinnen.

In jeder Disziplin die überhaupt von Subtraktion und Division handelt, werden diese Operationen definirt als diejenigen, welche eine Aufgabe lösen, die in der Beziehung der *Umkehrung* steht zur Aufgabe der Addition resp. Multiplikation.

Bei den letztern Aufgaben, denjenigen also der beiden direkten Operationen, werden die Summanden resp. Faktoren a, b als gegeben angenommen, und kommt es darauf an, deren Summe resp. Produkt:

α) $x = a + b$ | $x = a \cdot b$

herzustellen, zu bilden — oder, wenn man die in der Arithmetik gebräuchliche, hier nicht mehr ganz passende Ausdrucksweise in unsre Disziplin herübernehmen will: sie zu „berechnen". Eine zu der eben geschilderten „umgekehrte" oder „*inverse*" Aufgabe liegt vor, wenn der bei der vorigen gesucht gewesene Term gegeben ist und einer der beiden vorhin bekannt gewesenen Terme als Unbekannte gesucht wird, während auch der andere nach wie vor als bekannt gilt. Diese Aufgabe tritt also an uns heran, wenn gefragt wird nach demjenigen Terme, welcher mit einem gegebenen additiv resp. multiplikativ verknüpft ein gegebenes Resultat liefert, eine gegebene Summe, resp. ein gegebenes Produkt gibt.

Eine Operation, welche zwei Operationsglieder thetisch verknüpft, lässt im Allgemeinen zweierlei Umkehrungen, zu ihr inverse oder lytische Operationen zu, je nachdem bei bekanntem Knüpfungsergebnisse das eine oder das andere jener Operationsglieder als Unbekannte gesucht wird. Wegen der Kommutativität der identischen Addition

resp. Multiplikation — vergl. Th. 12) — kann man aber den zweiten Term einer Summe resp. Faktor eines Produkts allemal zum ersten machen; es ist darum gleichgültig, ob es das erste oder ob es das zweite Operationsglied war, nach welchem gefragt wurde, und fallen die beiden Umkehrungen der Operation hier jeweils in *eine* zusammen.

Bezeichnen wir abermals die bekannten Terme mit a und b, den gesuchten Term mit x, so wird es sich nun also darum handeln, dasjenige Gebiet, oder diejenigen Gebiete x zu ermitteln, welche die Gleichung erfüllen:

β) $\quad x + b = a, \quad | \quad x \cdot b = a,$

m. a. W. es wird diese Gleichung nach der Unbekannten x aufzulösen sein. Als

„identische *Differenz*“: a *minus* b, aus dem „Minuenden“ a und dem „Subtrahenden“ b | „identischen *Quotienten*“: a (geteilt) *durch* b, aus dem Dividenden (Zähler) a und dem Divisor (Nenner) b

werden wir zu definiren haben: die Wurzel der vorstehenden Gleichung β) — falls sie nämlich eine solche besitzt, falls die Gleichung β) überhaupt auflösbar ist nach x.

Die Bedingung hiefür ergibt sich aber nach Th. 50), indem wir die Gleichung zunächst rechterhand auf 0 bringen — nach Th. 39) wird sie:

γ) $\quad a_1(b + x) + ab_1x_1 = 0 \quad | \quad a_1bx + a(x_1 + b_1) = 0$

— und indem wir nunmehr die Unbekannte x aus ihr eliminiren. Die Resultante lautet:

δ) $\quad a_1b = 0, \text{ somit } b \subseteq a \quad | \quad ab_1 = 0 \text{ sive } a \subseteq b.$

Und diese Relation drückt die Anforderung aus, welche von den gegebenen Termen (Gebieten, Klassen) a, b erfüllt sein muss, wenn es überhaupt ein Gebiet oder Gebiete x geben soll für welche die aufzulösende Gleichung besteht. Sie ist unerlässliche Bedingung für die mögliche Geltung der Gleichung, die notwendige und hinreichende Bedingung für die Auflösbarkeit derselben und die Existenz einer „Wurzel“ (oder von Wurzeln). Identische Subtraktion und Division sind hiernach *keine unbedingt ausführbaren* Operationen; ihre Ausführbarkeit ist vielmehr an die Bedingung δ) geknüpft.

Ist diese Relation *nicht* erfüllt, so kann vernünftigerweise überhaupt nicht von einer Differenz „a minus b“ resp. einem Quotienten „a durch b“ gesprochen werden; die letzteren bleiben *sinnlose Namen*

und in gewisser Hinsicht von demselben Charakter, wie die nächste beste Silbenzusammenstellung.*) Es gibt dann eben nichts, was dem Namen als seine Bedeutung entspricht. (Auch die Null, das „Nichts" unsrer *ursprünglichen* Mannigfaltigkeit bleibt als solche Bedeutung ausgeschlossen.)

Als Bedingung dafür, dass gedachter Differenz, gedachtem Quotienten eine Bedeutung, ein Wert überhaupt zukomme, mögen wir sie auch die „Valenzbedingung" für letztere nennen. Diese Bedingung müssen wir, so oft im folgenden von Differenzen oder Quotienten gesprochen wird, jeweils als erfüllt voraussetzen.

Ist jene Wertigkeitsbedingung δ) erfüllt, so vereinfacht die aufzulösende Gleichung sich zu:

ε) $\qquad a_1 x + a b_1 x_1 = 0 \qquad | \qquad a_1 b x + a x_1 = 0$

und kann man nun zur Auflösung derselben nach der Unbekannten x schreiten.

Aus dem allgemeinen Theorem 50), nach dessen Schema die Auflösung stattzufinden hat, wissen wir aber bereits, dass es nicht blos *eine* Wurzel geben wird, sondern unendlich viele (im Allgemeinen von einander verschiedene). Einen Ausdruck, der sämtliche Wurzeln und nur solche liefert, werden wir erhalten, indem wir die gegebenen Terme a, b mit einem willkürlichen Gebiet u in bestimmter Weise verknüpfen.

Diesen Ausdruck wollen wir die „*volldeutige* Differenz", resp. den „*volldeutigen* Quotienten" nennen, oder auch den „*Generalwert* der Differenz, des Quotienten" im Gegensatz zu einem nachher hervorzuhebenden besondern Wert derselben (desselben), den wir als deren „*Prinzipal-* oder *Hauptwert*" zu bezeichnen Anlass finden und auch die „*eindeutige* Differenz", den „*eindeutigen* Quotienten" nennen mögen.

Ich will mir das gewöhnliche Subtraktions- und Divisionszeichen zur Darstellung von letzteren reserviren, und müssen wir dann, um nicht Missverständnisse herauszufordern, für die volldeutigen Ausdrücke unterscheidende Zeichen wählen. Als solche habe ich schon[2] das ein Kolon durchsetzende Minuszeichen für die Subtraktion und ein doppeltes Kolon für die Division angewendet.

Als die allgemeinste Wurzel der Gleichung β) oder ε) erhalten wir nun also:

---

*) Sagen wir etwa: „Kangerdluksuatsiak-Ikerasaksuat." — Ich nahm dabei an, dass der Leser nicht Grönländisch verstehe; denn eigentlich waren dies ein paar grönländische Ortsnamen, ursprünglich besagend: „Ort, wo Leute wohnen" und dergleichen.

$\zeta)$ $x = a \mathbin{\dot{-}} b$ | $x = a :: b$,

wo die rechte Seite den Ausdruck bedeutet:

$\eta)$ $a \mathbin{\dot{-}} b = ab_1u_1 + au = = a(b_1 + u) = = ab_1 + ub = ab_1 + uab$, | $a :: b = au_1 + (a + b_1)u = = a + ub_1 = = ab + ua_1b_1$,

in welchem u ein *willkürliches* Gebiet vorstellt.*)

Natürlich stimmt nun auch die Probe der Auflösung, welche darin besteht, dass man den Ausdruck $\eta)$ oder $\zeta)$ für x in die Gleichung $\beta)$ einträgt und sich überzeugt, dass dieselbe auf Grund der Voraussetzung $\delta)$ erfüllt ist — und zwar für *jede* Bedeutung des u. In der That muss sein:

$\vartheta)$ $(a \mathbin{\dot{-}} b) + b = a$ | $(a :: b)b = a$,

d. h. *jeder Wert*

der Differenz, zu dem Subtrahenden addirt gibt den Minuenden | *des Quotienten, mit dem Divisor multiplizirt liefert den Dividenden.*

Bei dem Nachweise ist schon die Valenzbedingung $\delta)$ unentbehrlich, indem man als Wert der linken Seite in $\vartheta)$ zunächst erhält:

$a + b$ | ab

was erst auf Grund von $\delta)$ sich in a zusammenzieht — vergl. Th. $\bar{2}0$). —

In § 21 und 22 gelang es uns, die allgemeinsten Eliminations- und Auflösungsprobleme der bisherigen Theorie schon ohne jegliche Kenntniss von den hier betrachteten inversen Operationen des identischen Kalkuls zu lösen. In dieser Thatsache hauptsächlich ist die Bestätigung zu erblicken für eine früher schon einmal gemachte Andeutung: dass die identische Subtraktion und Division ohne Schaden oder Einbusse aus der ganzen Disziplin des Kalkuls sich ausmerzen lassen. Auch die gegenwärtige Studie hat die Tendenz dies vollends zu erhärten.

Die hier gebrauchten Bezeichnungen sind deshalb auch als provisorische, nur dem augenblicklichen Bedarf zu dienen bestimmte anzusehen, und aus diesem Grunde ist es auch sehr gleichgültig, wie man etwa die volldeutigen Operationszeichen in $a \mathbin{\dot{-}} b$, $a :: b$ zur Unterscheidung von den eindeutigen in $a - b$, $a : b$ verbatim lesen mag. Da es immerhin misslich erscheint, häufig Zeichen lesen zu müssen ohne einen Fingerzeig darüber und eine bestimmte Gewöhnung, wie dieselben auszusprechen seien, so mag man für jene etwa „voll-minus“ und „voll-durch“ sprechen.

Beachtenswert erscheint noch folgendes. Wir haben vorstehend x er-

*) Die angegebenen verschiednen Ausdrucksformen für die Wurzel sind in § 22 schon implicite aufeinander zurückgeführt. Um die Zurückführung direkt zu leisten, genügen, im Hinblick auf die Valenzbedingung $\delta)$, die Theoreme $30_+)$ und $33_+)$ Zusatz, oder auch „Entwickelung“ nach a, b, u.

klärt als die allgemeinste Lösung der Gleichung β), als den Generalwert der Wurzel. Dieser ist eigentlich nicht *ein* Wert, sondern stellt gleichwie die Ausdrücke η) eine ganze Gattung oder Klasse von Werten vor, die man erhalten wird, indem man daselbst das u von 0 bis 1 variirt (vergl. S. 426 sq.). Die Gleichungen ζ) bis ϑ) sowie die noch weiterhin folgenden auf volldeutige Differenzen und Quotienten bezüglichen sind darum auch nicht, wie zumeist die früheren, zu deuten als Gleichungen zwischen Gebieten, sondern als solche zwischen Klassen von Gebieten — die allerdings, wie in ϑ) rechts, sich unter Umständen auch in ein einziges Gebiet zusammenziehen mögen. Sie sollen aussagen, dass (nicht etwa jedes einzelne, sondern) die Gesamtheit der Gebiete links einerlei ist mit der Gesamtheit der Gebiete welche rechts vom Gleichheitszeichen dargestellt erscheinen. Die Gleichheitszeichen sind also wirksam nicht in der ursprünglichen, sondern in der aus ihr abgeleiteten Mannigfaltigkeit, in der Mn. der Klassen von Gebieten, und sinken dieselben nur in Ausartungsfällen, wie ϑ), in die erstere Mn. zurück.

Will man jedoch x als ein eindeutiges Gebietsymbol aufgefasst wissen, mithin darunter nur ein spezielles die Gleichung β) erfüllendes Gebiet, eine partikulare Wurzel dieser Gleichung verstehen, so ist es nicht mehr zulässig die Angaben ζ) als Gleichungen beizubehalten. Wie wir schon anderwärts ausgeführt haben, darf das Individuum seiner Gattung nicht etwa *gleich* gesetzt werden. Für ζ) müsste alsdann korrekt geschrieben werden:

$$x \mathrel{=\!\!\!\in} a \mathbin{-\!:} b \qquad\qquad | \qquad\qquad x \mathrel{=\!\!\!\in} a :: b$$

— wobei im Allgemeinen die Unterordnung gilt und Gleichheit nur in den (nachher auch zu betrachtenden) Grenzfällen eintreten *kann*, wo die rechte Seite eindeutig wird, die Gleichung β) nur *eine* Wurzel zulässt, in diesen Fällen aber auch eintreten *muss*.

Auch diese Subsumtionszeichen wären aber als solche der *abgeleiteten* Mannigfaltigkeit zu interpretiren, und nicht als solche der ursprünglichen. Die Subsumtion besagte hier nicht, das Gebiet x sei *als Teil* enthalten in einem rechts angeführten Gebiete, sondern nur, es sei *als Individuum* enthalten in der rechts stehenden Klasse von Gebieten.

Gerade in jenen Grenzfällen aber, wo die Klasse $a \mathbin{-\!\!:\!\!-} b$ rechts selbst nur *ein* Gebiet umfasst, müsste das Subsumtionszeichen Missverständnisse nahe legen, indem es Einordnung (als Teil) mitzuzulassen scheint, wo, wie erwähnt, nur Gleichheit gelten kann. Zur Vermeidung solcher (und ähnlicher schon in § 9 unter ψ) charakterisirter Misstände müsste man eigentlich *zweierlei Subsumtionszeichen* verwenden für die *ursprüngliche* und für die *abgeleitete* Mannigfaltigkeit.

Die Nötigung hiezu lässt sich indess vermeiden und sie pflegt glücklich vermieden zu werden, indem man die Lösungen:

$$x = a(b_1 + u) \qquad\qquad | \qquad\qquad x = a + ub_1$$

auch jetzt wieder als Gleichungen schreibt, dafür aber dem u eine andere Deutung gibt. Statt wie bisher es als ein *willkürliches* Gebiet gelten zu lassen, dem alle erdenklichen Bedeutungen innerhalb der ursprünglichen Mn. mit gleichem Rechte zukommen, braucht man es jetzt nur hinzustellen

als ein „*unbestimmtes*“ Gebiet, das vielleicht noch seiner näheren Bestimmung harrt. Man wird es jetzt, wo x eindeutig sein soll, nur „ein gewisses“ Gebiet bedeuten lassen [oder irgend eines von jener sub τ) des § 21 bestimmten Klasse von Gebieten] und dadurch hinbringen, dass beiderseits vom Gleichheitszeichen eindeutige Gebietsymbole stehen zwischen denen die Behauptung der Gleichheit wieder zulässig ist.

Demgemäss werden wir es fortan auch wie bisher vermeiden, mit unsern Betrachtungen über die ursprüngliche Mn. solche zu vermengen, in welchen das Subsumtionszeichen anders als für diese selbst gedeutet werden müsste.

Unter allen Gebieten, welche wir als die Partikularlösungen der Gleichung β) in η) zusammengefasst, der Gebieteklasse also, welche wir als „volldeutige“ Differenz resp. Quotienten daselbst angegeben haben, sind besonders zweie hervorhebenswert, nämlich: die beiden *einschliessenden Gebiete* oder „*Grenzen*“, zwischen welchen (sie selbst mitzugelassen) alle Gebiete der Klasse $a \div b$ resp. $a :: b$ liegen müssen. Aus unsern Formeln η) ergibt sich das eine als das umfassendste Punktgebiet oder die *weiteste* unter den Bedeutungen, welche der Differenz, dem Quotienten von a und b eindeutig untergelegt werden können, bei der Annahme $u = 1$, das andre als die *engste* dieser Bedeutungen für $u = 0$ — wobei indessen nicht zu übersehen ist, dass der Dualismus erfordert, der Annahme $u = 1$ bei der einen die $u = 0$ bei der andern Operation, und umgekehrt, gegenüberzustellen.

Wir erhalten (für $u = 1$ resp. 0) als den

Maximalwert der identischen *Differenz:*	*Minimalwert des* volldeutigen *Quotienten:*
ι) $(a \text{ minder } b) = a$.	$(b \text{ in } a) = a$.
Der *höchste unter den Werten der Differenz* ist darnach der *Minuend* selber	Der *niederste* unter den *Quotientenwerten* ist der *Dividend* oder Zähler

und bei dieser Auffassung erscheinen unsre inversen Operationen als völlig *wirkungslos* an dem passiv mit ihnen affizirten Operationsgliede. Es ist demnach müssig, etwa noch nach formalen Gesetzen dieser eindeutigen „Maximalsubtraktion“ und „Minimaldivision“ zu fragen, auch nicht angezeigt, deren Ergebniss für den Hauptwert zu erklären.

Desgleichen verlohnt es nicht, eigene Knüpfungszeichen für diese Operationsweisen einzuführen, weshalb wir uns in ι) mit einem charakteristischen Wortausdruck für die Andeutung ihres Ergebnisses begnügten.

Bei der andern Annahme ($u = 0$ resp. 1) dagegen stellt sich heraus als der

Minimalwert der volldeutigen *Differenz:*

$\varkappa$) $$a - b = ab_1$$

Maximalwert des volldeutigen *Quotienten:*

$$a : b = a + b_1 = \frac{a}{b}$$

und indem wir für diese hiermit die gewöhnlichen Subtraktions- und Divisionszeichen einführen, bezeichnen wir sie auch als den eindeutigen oder *Hauptwert*, d. i. als Differenz und Quotient schlechtweg. „Eindeutige" Subtraktion resp. Division nennen wir die zu ihrer Bildung dienenden Operationen. Auch diese Operationen sind nur „ausführbar", es haben $a - b$ und $a : b$ nur einen Sinn, wenn die Valenzbedingung δ) erfüllt ist.

Aus den Definitionen η) und $\varkappa$) sind als besondere Fälle hervorzuheben:

$$\lambda)\;\begin{cases} a \div a = ua, \quad a - a = 0 & a :: a = a + u, \quad a : a = 1 = \frac{a}{a} \\ 1 \div 1 = u, \quad 1 - 1 = 0 & 0 :: 0 = u, \quad 0 : 0 = 1 = \frac{0}{0} \\ 0 \div 0 = 0 = 0 - 0 & 1 :: 1 = 1 = 1 : 1 = \frac{1}{1} \\ a \div 0 = a = a - 0 & a :: 1 = a = a : 1 = \frac{a}{1} \\ 1 \div 0 = 1 = 1 - 0 & 0 :: 1 = 0 = 0 : 1 = \frac{0}{1} \\ 1 \div a = a_1 + u, \quad 1 - a = a_1 & 0 :: a = ua_1, \quad 0 : a = a_1 = \frac{0}{a} \end{cases}$$

wo die Valenzbedingung (für die angegebenen Differenzen und Quotienten) jeweils analytisch, von selbst erfüllt ist, weshalb von ihr abgesehen werden kann, den Formeln λ) unbedingte Geltung zukommt. Die Subtraktion einer Klasse von sich selbst sowie von der 1 ist unbedingt ausführbar, etc.

Die Symbole $1 \div 1$ und $0 :: 0$ sind hienach vollkommen unbestimmt oder *„alldeutig"* zu nennen; sie stellen die ganze aus der ursprünglichen Punktmannigfaltigkeit „abgeleitete" oder ableitbare Mannigfaltigkeit der Gebiete vor, indem uns eben u schlechthin *jedes* Gebiet zu bedeuten hat.

Die letzten Formeln unter λ) aber:

μ) $$1 - a = a_1 = \frac{0}{a} \text{ oder } 0 : a$$

lassen erkennen, *dass die Negation weiter nichts als ein gemeinsamer Spezialfall der* (eindeutigen) *Subtraktion und Division ist: a* negiren heisst, es von 1 abziehen oder es in die 0 hineindividiren.

Mit diesem Spezialfall der beiden inversen Operationen aber kommt,

wie wir gesehen haben, der identische Kalkul — als mit seiner „dritten Spezies" — schon völlig aus.

Zieht man auch die beiden inversen Operationen mit unter den Gesichtspunkt des Dualismus, so werden natürlich zugleich mit Addition und Multiplikation auch Subtraktion und Division ihre Rollen auszutauschen haben. Alsdann kann man sagen, dass die hiemit gegebene Gleichung:

$$\nu) \qquad 1 - a = \frac{0}{a}$$

zu sich selbst dual ist.

Und das gleiche gilt auch von den noch durch ihre Kombination mit sich selbst entstehenden Gleichungen wie:

$$1 - (1 - a) = \frac{0}{\left(\frac{0}{a}\right)}, \qquad \frac{0}{1 - a} = 1 - \frac{0}{a}$$

etc. Die p. 31 meines Operationskreis[2] gemachte Angabe, dass diese erwähnten die einzigen zu sich selbst dualen Formeln des identischen Kalkuls seien, beruhte jedoch auf einem Übersehen, ist eine zu weit gehende gewesen, wie wir denn in der That schon in § 18 unter φ) auch noch andre Formeln solchen Charakters kennen gelernt haben. —

Mit Rücksicht auf μ) hätten die fundamentalen Theoreme 30) und 31) nun auch in folgenden Formen angeschrieben werden können, in deren einigen (den durch die Beisetzung der Chiffre hervorgehobenen) es nützlich ist, sie gesehen zu haben:

$$\xi)\begin{cases} 30_+) \quad a + (1 - a) = 1 & \qquad a \cdot \frac{0}{a} = 0 \\ \qquad a + \frac{0}{a} = 1 & 30_\times) \quad a(1 - a) = 0 \\ 31) \quad 1 - (1 - a) = a, & \qquad \frac{0}{\left(\frac{0}{a}\right)} = a \\ \qquad \frac{0}{1 - a} = a, & \qquad 1 - \frac{0}{a} = a \end{cases}$$

Die 31) zeigt, dass nicht $-(-a) = a$ oder $0 - (0 - a) = a$, sondern $1 - (1 - a) = a$ das wahre arithmetische Analogon des logischen Satzes von der doppelten Verneinung ist — worauf wir uns schon S. 306 beriefen.

Beachtenswert erscheint, dass der Ausdruck $\varkappa$), mit x bezeichnet bezüglich die Auflösung ist des folgenden Paares von Gleichungen:

$$o) \qquad x + b = a, \quad xb = 0 \qquad\qquad xb = a, \quad x + b = 1$$

durch welches also

$$\varkappa) \qquad x = a - b \qquad\qquad x = a : b = \frac{a}{b}$$

vollkommen eindeutig bestimmt wird.

Man erkennt dies leicht, indem man systematisch zuwerke geht, zu-

erst also die vereinigte Gleichung des Gleichungenpaares o) herstellt, aus dieser dann x eliminirt, wodurch sich abermals die Valenzbedingung δ) und nur diese ergibt, endlich jene nach der Unbekannten x auflöst. Als Auflösung ergibt sich der völlig bestimmte Wert:

$$x = ab_1 \quad | \quad x = a + b_1;$$

und umgekehrt ist leicht nachzuweisen, dass dieser letztere Ansatz zusammen mit der Valenzbedingung δ) auch das Gleichungenpaar o) nach sich zieht, nämlich dieselbe vereinigte Gleichung liefert mit welcher dieses äquivalent sein muss. Sobald man also die in der Voraussetzung π) doch sicher miteingeschlossene Annahme gelten lässt, dass die daselbst gegebenen Ausdrücke einen Sinn haben, wird die Gleichung π) auch ihrerseits das Gleichungenpaar o) zu ersetzen im stande sein.

Links vom Mittelstriche z. B. ist aus dieser Betrachtung zu lernen, *dass man im identischen Kalkul einen Summanden* (b) *von der einen Seite der Gleichung wenigstens dann (jedoch auch nur dann) von dieser Seite als einen Subtrahenden* (mit dem Minuszeichen) *auf die andere Seite werfen darf, wenn er mit dem andern Summanden* (x, resp. mit allen übrigen Gliedern der vorausgesetzten Summe) *disjunkt ist,* wenn also die binomische Summe eine *reduzirte* war.

Während aus einer Gleichung $x + b = a$ im Allgemeinen nur zu schliessen ist, dass x *einer von den Werten* der volldeutigen Differenz $a \div b$ sein müsse, folgt $x = a - b$ ausschliesslich dann, wenn nebenher bekannt ist, dass $xb = 0$ sei.

Dagegen darf ein Subtrahend immer als Summand über das Gleichheitszeichen hinübergeschafft, transponirt werden, m. a. W. aus einer Gleichung $x = a - b$ ist es immer zulässig den Schluss zu ziehen: $x + b = a$, in Anbetracht, dass die Probe einer richtig vollzogenen Subtraktion doch sicher stimmen wird.

Im Hinblick darauf z. B., dass $b + 0 = b$ nebst $b \cdot 0 = 0$ gilt, wird es darnach insbesondre gestattet sein, eine Gleichung $a = b$ (oder $a = b + 0$) in die Form $a - b = 0$ umzusetzen, dieselbe mithin auch nach demselben Schema, welches in der Arithmetik geläufig ist, rechterhand auf 0 zu bringen. In der That sagt der Ansatz $a - b = 0$ nach $\varkappa$) aus, dass $ab_1 = 0$ sei, wozu aber noch die Valenzbedingung $a_1 b = 0$ tritt, und dieses läuft nach Th. 24) und 39) zusammen auf $a = b$ hinaus. Wie den Gebrauch der inversen Operationen überhaupt, so wird man aber auch die Schreibweise $a - b = 0$ in unsrer Disziplin besser vermeiden.

Unberechtigt würde es aber beispielsweise sein, aus der Gleichung $a + 0 = a$, die allgemein gilt, den Schluss zu ziehen, dass $0 = ua$ sein müsse bei *beliebigem* u, nämlich dass 0 dem Generalwert von $a \div a$, nach dem Schema η, λ) gebildet, gleichzusetzen sei. Es gilt dies, da der Term 0 ein vollkommen bekannter, notwendig nur für *gewisse* u ($= va_1$, z. B. für $u = 0$); es darf nur geschlossen werden, u sei *einer* von den im General-

wert zusammengefassten Werten, und weil $a \cdot 0 = 0$, so ist es hier der Hauptwert selber: $0 = a - a$.

Es erübrigt noch, auch Ausdrücke von den folgenden Formen einmal in's Auge zu fassen:

$$\varrho)\left\{\begin{array}{ll|ll} a \;:\; 1, & a - 1 & a :: 0, & a : 0 = \frac{a}{0} \\ 0 \;{-\!\!:\!\!-}\; a, & 0 - a & 1 :: a, & 1 : a = \frac{1}{a} \end{array}\right.$$

von welchen die Valenzbedingung zeigt, dass sie im Allgemeinen sinnlose, „uninterpretable" sind, falls nämlich nicht gerade a gleich

$$\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}$$

bezüglich bedeutet.

Führte man hier das Zeichen ∞ *(„unendlich")* als Symbol der Absurdität, des Unsinns ein, so könnte man — falls nur nicht gerade die eben genannte Voraussetzung zutrifft — diese Ausdrücke samt und sonders gleich ∞ setzen, und speziell wäre zuverlässig:

$$\sigma) \qquad 0 \;{-\!\!:\!\!-}\; 1 = \infty = 1 :: 0 \quad \text{sowie} \quad 0 - 1 = \infty = 1 : 0 = \frac{1}{0}$$

— letzteres wie in der Arithmetik [wobei nun auch die Gleichung $0 - 1 = \frac{1}{0}$ als zu sich selbst dual erscheinen würde].

Es ist in der That unverfänglich, die verschiedenen absurden Ausdrücke, wie $0 - 1$ und $1 : 0$, *einander gleich zu setzen. Alles was unsinnig ist, darf für einerlei uns gelten.* Gäbe man überhaupt auch nur den allergeringsten Unsinn zu, so würde ja durch vollkommen logische Schlüsse auch jeder gewünschte „noch so grosse" Unsinn sich beweisen lassen — ähnlich wie bekanntlich in der Arithmetik, so auch im identischen Kalkul.

Speziell hier: Lässt man zu, dass es ein $x = \frac{1}{0}$ gebe von der Eigenschaft, dass $x \cdot 0 = 1$ ist, so ist leicht zu zeigen, dass auch für ebendieses x gilt: $x + 1 = 0$ nebst $x \cdot 1 = 0$, dass also auch $x = 0 - 1$ anzuerkennen ist. Wegen $x \cdot 0 = 0$ folgte nämlich aus der Annahme, dass $0 = 1$, und hieraus durch beiderseitiges Multipliziren mit x auch $0 = x$, sodann $x + 1 = x + 0 = x = 0$ und $x \cdot 1 = 0 \cdot 1 = 0$. —

Das Symbol ∞ *kann* aber *nicht*, wie seinerzeit das Symbol 0, *als ein „uneigentliches" Gebiet der Mannigfaltigkeit unsrer Gebiete zugeschlagen, adjungirt werden;* vielmehr vertritt es die Null der „abgeleiteten" Mn., Mn. der Gebieteklassen.

Es müsste nämlich seine Hinzuziehung, Zulassung als „Gebiet" die Folge haben, dass die Prinzipien unsres Kalkuls, wenn sie in voller Allgemeingültigkeit aufrecht erhalten würden, sich selbst aufhöben, uns nach allen Seiten in Widersprüche verwickelten [wie wir denn nach der Definition $\infty = \frac{1}{0}$ nun $\infty \cdot 0 = 1$ hätten im Widerspruch mit $a \cdot 0 = 0$ bei der Annahme $a = \infty$, etc.] — dass sie andernfalles ihre Allgemeingültigkeit verlören und mit lästig zu beobachtenden Ausnahmen behaftet würden,

wodurch es nahegelegt erschiene, den Eindringling ∞ aus der Mannigfaltigkeit der Gebiete wieder auszustossen. —

Durch die Koexistenz der Gleichungen π) und o) findet sich unsre Definition von eindeutiger Differenz und Quotient, die wir oben durch Partikularisiren der volldeutigen gewannen, noch einmal selbständig ausgedrückt. Z. B. links: Weiss man von einem Gebiete x nur das eine, dass seine Summe mit einem gegebenen b ein anderes a liefert, so ist x noch nicht vollständig bekannt. Wohl aber ist der gesuchte Summand vollkommen bestimmt, wenn man ferner weiss, dass er den andern b ausschliesst, dass also bx gleichzeitig 0 ist. Etc.

Und ähnlich auch für *Klassen.* Für letztere besitzt die in $a - b = ab_1$ (während $a_1 b = 0$ gedacht wird) vorgeschriebene logische Operation einen sehr geläufigen sprachlichen Ausdruck in Gestalt jener verbalen Formen, mittelst welcher eine *Ausnahme* statuirt wird.

Es kann das Minuszeichen geradezu mit der Partikel *„ausgenommen"*, *„ohne"* in die Wortsprache übersetzt werden, indem die Differenz $a - b$ die *Klasse der a mit Ausschluss der b* vorstellen wird (von welchen die Valenzbedingung die Voraussetzung ausspricht, dass sie ganz in jener enthalten seien).

Bedeutet z. B. $a =$ Metall, $b =$ Edelmetall, so stellt $a - b = ab_1$ die Metalle vor, welche nicht Edelmetalle sind, also die Metalle *ohne* die Edelmetalle, die Metalle *mit Ausnahme der* Edelmetalle.

Umgekehrt jedoch *darf* ein sprachlicher Ausdruck von der Form *„die a ohne die b"*, *„a ausgenommen b"* in unsre Zeichensprache in der Regel *nicht mit $a - b$ ohne weiteres übertragen werden, sondern nur mit* $a - ab = a(ab)_1 = a(a_1 + b_1) = ab_1$ (wo dann in der That $a_1 \cdot ab = 0$ ist). Die Wortsprache setzt es nämlich als selbstverständlich voraus, dass man aus einer Klasse nur solche Individuen ausschliessen könne und auszuschliessen beabsichtige, welche in ihr enthalten sind — und diese stillschweigende Forderung muss der hier ausdrucksvollere Kalkul ausdrücklich darstellen. Sagt man „die a *ohne* die b", so meint man sicherlich nur „die a ohne diejenigen b, welche a sind".

Wird z. B. berichtet, im untergegangenen Schiffe seien alle Passagire (a) ertrunken, ausgenommen die Frauen (b), welche gerettet worden, so ist, wenn b die Klasse der Frauen schlechtweg, somit im ganzen Menschengeschlechte, bedeutet, die Klasse der ertrunkenen Personen offenbar nur $a - ab = ab_1$ nicht aber $a - b$, welcher Ansatz gar keinen Sinn haben würde, indem hier die Valenzbedingung $b \Subset a$ nicht erfüllt wäre. Für $a - ab$ hier $a - b$ schreiben hiesse: von den Passagiren des Schiffes auch die in ruhiger Sicherheit auf dem Festlande lebenden Frauen ausschliessen zu wollen.

Sagen wir ebenso: „die Europäer ohne die Russen", so heisst dies vollständiger ausgedrückt: die Europäer ohne die europäischen Russen, und kann es uns nicht einfallen, auch die asiatischen Russen von den Europäern ausschliessen zu wollen.

Ungeachtet dessen, dass nun also hier die Wortsprache einem geringeren Zwange unterworfen ist, in ihren Ausdrucksformen eine grössere Freiheit, Licenz geniesst, wie unsere Zeichensprache, sind wir doch berechtigt, die Subtraktion im Klassenkalkul als eine Ausschliessung zu erklären, sie auszugeben für die *Exception*.

Für die eindeutige Division hat die Sprache keinen entsprechenden oder adäquaten Ausdruck. Unter der Voraussetzung, dass $a \not\Subset b$ sei, bedeutete $\frac{a}{b} = a + b_1$ dasjenige was a oder nicht-b ist. Es liegt im gewöhnlichen Gedankenverlaufe wol selten eine Veranlassung vor, eine derartige Klasse zu bilden, und dieser Umstand war Beweggrund für uns, der identischen Subtraktion den Vortritt vor der Division zu geben.

Unter denjenigen Operationen zwar, welche unter dem Namen der *volldeutigen* Division zusammengefasst sind, ist immer eine, welche im Klassenkalkul, im Kalkul mit Begriffsumfängen oder -Inhalten hinzustellen ist als eine *Abstraktion*.

Ist bei bekannten x nämlich $x \cdot b = a$, so ist x selbst sicherlich einer von den Werten des volldeutigen Quotienten $a :: b$ und muss man, um von dem Produkte a zu diesem seinem Faktor x überzugehen, dabei *absehen*, abstrahiren von den für den andern Faktor b charakteristischen Merkmalen.

Z. B. seien a, b, x die Klassen: $a =$ „Rappe", $b =$ „schwarz", $x =$ „Pferd", so gibt der Begriff „Rappe", befreit, abgesehen vom Merkmal der schwarzen Farbe, den Begriff „Pferd".

Die eindeutige Division liefert uns aber in Gestalt von $\frac{a}{b}$ nicht gerade jenen besonderen Faktor x, sondern einen andern, der ebenfalls mit b multiplizirt, determinirt, a liefert. Als Quotienten der Klasse „Rappe" geteilt durch die Klasse „schwarz" stellt sie vielmehr hin: alles, was entweder ein Rappe, oder nicht schwarz ist. Unter diesen „nicht-schwarzen" Dingen sind auch die übrigen Pferde noch mit enthalten.

Es mag der Psychologie überlassen bleiben, zu erklären, weshalb das duale Gegenstück zur Einschränkung, Ausnahmebildung im natürlichen Denken keine Stätte zu finden scheint, jedenfalls hier nicht die

entsprechende Rolle spielt. Uns genügt es hier, von der Thatsache Notiz zu nehmen. —

In den Figuren 20 finden sich für die Kreisflächen a und b zunächst die Gebiete $a - b = ab_1$ und $\frac{a}{b} = a + b_1$ mittelst *schräger* Schraffirung hervorgehoben; zugleich sind für eine bestimmte Annahme von u als dritten Kreis durch *wagrechtes* Schraffiren die bei η) in Betracht kommenden Flächen ub resp. ub_1 sichtbar gemacht, und damit auch die Generalwerte $a \div b$ und $a :: b$ soweit möglich (nämlich exemplificando) veranschaulicht.

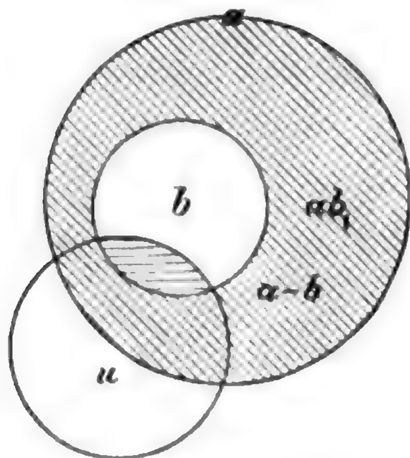


Fig. 20_+.

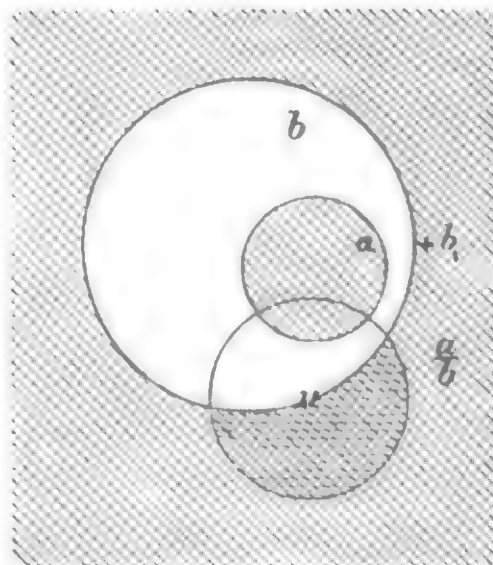


Fig. $20_\times$.

Wie wir gesehen, liesse sich der *Subtraktion* wol noch einige Wichtigkeit für die Technik des identischen Kalkuls zuerkennen, indem bei den Übersetzungen aus Wort- in Zeichensprache, oder umgekehrt — namentlich also bei der Einkleidung von Textaufgaben behufs ihrer rechnerischen Behandlung, sodann bei der Interpretation der Rechnungsergebnisse mittelst Worten — diese Operation in Betracht kommen wird, wo immer *Ausnahmen* zu konstatiren sind oder gefordert werden.

Aus diesem Grunde, dessengleichen bei der Division nicht vorliegt, wollen wir nun der Subtraktion noch einige Betrachtungen widmen (dem Leser es überlassend, sich das dual Entsprechende bezüglich der Division gewünschtenfalles selbst zum Bewusstsein zu bringen).

Von den *Gesetzen der eindeutigen Subtraktion* ist vor allem das „*Distributionsgesetz*" (derselben) zu beachten:

$$\tau) \qquad a(b - c) = ab - ac \quad \text{oder} \quad (b - c)\,a \mathrel{\dot{=}} ba - ca,$$

von welchem auch in den Diskussionen des gemeinen Lebens allgemein Gebrauch gemacht wird.

Z. B. Der europäische ohne den russischen Handel ist der europäische Handel ohne den russischen Handel. Die geflügelten Tiere mit Ausnahme der Insekten sind die geflügelten Tiere mit Ausnahme der geflügelten Insekten und vice versā. Etc.

Der Beweis des Satzes ergibt sich am einfachsten, indem man die beiden Seiten der Formel nach dem Schema $\varkappa$) evaluirt. In der That hat die linke Seite derselben die Bedeutung $a(b-c)=abc_1$ mit der Valenzbedingung $b_1c=0$; und die rechte Seite der Formel hat den Wert:

$$ab - ac = ab(ac)_1 = ab(a_1 + c_1) = abc_1$$

mit der Valenzbedingung

$$(ab)_1 ac = (a_1 + b_1) ac = ab_1 c = 0.$$

Unter der Voraussetzung also, dass die Ausdrücke zu *beiden* Seiten der Formel nur überhaupt einen Sinn haben — eine Voraussetzung, die man füglich als eine „*selbstverständliche*“ bezeichnen kann — werden diese beiderseitigen Ausdrücke das Nämliche (nämlich abc_1) bedeuten und ist die Gültigkeit der Formel unanfechtbar. Bedingung dafür ist die vereinigte Gleichung der beiderseitigen Valenzbedingungen, welche im vorliegenden Falle aber auf die erste, die linkseitige Valenzbedingung sich reduzirt, indem diese, nämlich $b_1c=0$, schon von selber auch die andre $ab_1c=0$ zur Folge hat.

Immerhin ist nicht zu übersehen, dass die Valenzbedingungen für die beiden Seiten der Gleichung τ) *verschiedene* sind, dass die linke Seite, um einen Sinn zu haben, *mehr* verlangte, als die rechte. Man kann daher durch unbedachte Anwendung des Satzes in Fehler verfallen, und es ist z. B. $aa-a$ oder $a \cdot a - a \cdot 1$ *nicht* $= a(a-1)$, weil die Valenzbedingung für die Differenz $a-1$, das wäre $a_1=0$, im allgemeinen nicht erfüllt ist, während andrerseits $aa-a$ sehr wohl einen Sinn, nämlich den Wert 0 hat.

Im übrigen kann auf Grund von τ) der Satz des Widerspruchs oder die Formel $30_\times$) sub ξ) $a(1-a)=0$ jetzt aufgelöst werden in $a-aa=0$ und erscheint er darnach als eine blosse Umschreibung des Tautologiegesetzes $14_\times$) $aa=a$ — eine Auffassung, welche besonders Boole betonte.

Für die Wortsprache ist die Ausserachtlassung der Verschiedenartigkeit jener beiderseitigen Valenzbedingungen *nicht* verfänglich und zwar wegen der oben erwähnten Licenz, deren sie sich beim Statuiren von Ausnahmen erfreut. Ein Beispiel wird dies deutlich machen.

Es möge $a=$ betrunken, $b=$ Heide, $c=$ Grönländer bedeuten. Nehmen wir an, dass es betrunkene Grönländer gar nicht gibt, sintemal man auf Grönland nur in Leberthran kneipt, so wird der Satz anzuerkennen sein, dass die betrunkenen Heiden ohne die Grönländer einerlei sind mit den betrunkenen Heiden ohne die betrunkenen Grönländer, das ist $ab-ac$, welches wegen $ac=0$ sich in ab zusammenzieht! Keineswegs dürfte aber $a(b-c)$ hiefür geschrieben werden, in Anbetracht, dass nicht alle Grönländer Heiden zu sein brauchen oder wirklich sind, man

daher von den Heiden b exakt auch nicht die Grönländer c subtrahirend ausnehmen kann, sondern nur die grönländischen Heiden bc. Es würde darnach der Ausdruck $b - c$ schon jeglichen Sinnes baar sein, und wäre es nur zulässig die Klasse $b - bc = b(1 - c) = bc_1$ zu bilden.

Um uns auch über die sonstigen Gesetze der logischen Subtraktion möglichst rasch zu orientiren, will ich zunächst in übersichtlicher Formelzusammenstellung die fundamentalen Sätze der arithmetischen Subtraktion zur Vergleichung hersetzen.

Soweit dieselben auf nicht mehr als drei allgemeine Zahlen Bezug haben, können letztere — vergl. meine Schriften [1] und [2] — in folgende vier Gruppen gebracht werden:

$$v_1)\quad (a - b) + b = (a + b) - b = b - (b - a) = a,$$

$$v_2)\begin{cases}(a + b) - c = a + (b - c) = a - (c - b) = \\ \qquad = (a - c) + b = b - (c - a),\end{cases}$$

$$v_3)\begin{cases}a - (b + c) = (a - b) - c = \\ \qquad = (a - c) - b,\end{cases}$$

$$v_4)\begin{cases}a - b = (a + c) - (b + c) = (a - c) - (b - c) = \\ \qquad = (c - b) - (c - a) = (a - c) + (c - b), \\ a + b = (a + c) + (b - c) = (a + c) - (c - b) = \\ \qquad = (a - c) + (b + c) = (b + c) - (c - a).\end{cases}$$

Nach dem Schema $\varkappa$) können wir nun für jeden der hier verglichenen Ausdrücke den Wert angeben, der demselben im identischen Kalkul beizulegen ist. Desgleichen vermögen wir nach dem Schema δ) auch seine Valenzbedingung anzusetzen, oder, wo mehrere Minuszeichen in dem Ausdruck vorkommen, seine sämtlichen Valenzbedingungen, welche wir dann zu einer einzigen Gleichung vereinigen mögen. Mit Rücksicht auf diese seine Valenzbedingung (schlechtweg) können wir endlich jeden Ausdruck nötigenfalls entwickeln nach den Symbolen, a, b, (c), aus welchen er aufgebaut ist.

Sonach ist es dann weiter keine Kunst, zuzusehen, ob (und unter welchen Bedingungen) die in der Arithmetik gleichwertigen Ausdrücke auch im identischen Kalkul übereinstimmen und um welche Terme sie sich andernfalles unterscheiden.

Es stellt sich heraus, dass von den in der Arithmetik geltenden Gleichungen so ziemlich die *Hälfte* auch im identischen Kalkul Geltung besitzt unter der Voraussetzung, dass die Ausdrücke beiderseits gleichzeitig einen Sinn besitzen, d. h. unter den aus dem Anblick der beiden Seiten selbst ersichtlichen Valenzbedingungen.

Unter Zugrundelegung derselben Annahme (der „vereinigten“ Valenzbedingung der Gleichung) bedarf die andere Hälfte der Gleichungen, um im identischen Kalkul gültig zu werden der Hinzufügung eines *Korrektionsgliedes* auf der einen Seite derselben — eines additiven oder subtraktiven Gliedes, welches eines allgemeinen Ausdrucks selber fähig ist.

Es würde zu weit führen, wenn wir für alle Kombinationen der vorstehend unter v) einander gleichgesetzten Ausdrücke dies hier im einzelnen rechtfertigend durchführen wollten. Jede von den einschlägigen Untersuchungen nebst ihrer geometrischen Deutung kann als eine interessante oder wenigstens zuträgliche Übung, geistige Gymnastik für den Anfänger empfohlen werden.

Von den nicht unmodifizirt geltenden Sätzen sei deshalb nur weniges speziell hervorgehoben.

Zu v_1) haben wir insbesondere:

$$\varphi) \qquad (a+b)-b=a-ab \quad \text{oder} \quad a-b$$

das ist ab_1. Korrektionsglied ist mithin $-ab$ oder $-b$. Es wäre nicht erlaubt, den Ausdruck, wie in der Arithmetik, auf a zu reduziren. Z. B. Die Begüterten und die Adeligen, ohne die Begüterten, sind nicht etwa schlechtweg die Adeligen, sondern nur die unbegüterten Adeligen (R. Grassmann).

Zu v_2) gilt beispielsweise:

$$\chi) \qquad a+(b-c)=\{(a+b)-c\}+ac;$$

Korrektionsglied mithin: $+ac$. Die Reihenfolge, in welcher Additionen und Subtraktionen vollzogen werden, ist also im identischen Kalkul nicht gleichgültig.

Die Sätze v_3) dagegen gelten auch im identischen Kalkul ganz unverändert.

Zu v_4) haben wir exempli gratia:

$$\psi) \qquad (a+c)-(b+c)=(a-b)(1-c),$$

das Korrektionsglied ist also $-(a-b)c$. Hieraus ersieht man, dass ein übereinstimmender Bestandteil (Summand, c) von Minuend und Subtrahend einer Differenz jedenfalls dann unterdrückt, die Differenz also immer dann mit ihm „gekürzt“ werden darf, wenn derselbe gegen die andern Bestandteile disjunkt, wenn nämlich $ca=0$ und $cb=0$ ist: *beim Subtrahiren reduzirter Summen von einander sind übereinstimmende Terme unbedenklich zu streichen.*

Statt nach den Gesetzen der eindeutigen kann man auch nach denen der volldeutigen Subtraktion fragen.

Man findet, dass die Regel der Arithmetik für das distributive Ausmultipliziren einer Differenz (sowie umgekehrt für das Ausscheiden eines gemeinsamen Faktors im Minuend und Subtrahend einer solchen):

$$\omega_1) \qquad a\,(b\,:\,c)=ab\,:\,ac$$

auch hier Geltung hat, indem nach dem Schema η) sich übereinstimmend $ab\,(c_1+u)$ als Wert der beiden Seiten ergibt unter der schon bei τ) erwähnten Valenzbedingung $b_1c=0$, die man als eine selbstverständliche auch unerwähnt lassen könnte auf Grund des Axioms, dass ein Satz nur Geltung beanspruchen kann für diejenigen Fälle, für welche Dasjenige, worüber er aussagt, einen Sinn besitzt.

Ferner ergeben sich die Werte der nachstehend untereinandergestellten

Elementarausdrücke, wenn man die rechts neben sie gestellten Gleichungen, eventuell — wo sie vorkommen — unter Elimination von y und z, gemäss der Methode des § 21 nach der Unbekannten x auflöst:

$$\omega_2)\begin{cases} x = (a+b) \dot{-} c & \text{aus} \quad x + c = a + b, \\ x = a + (b \dot{-} c) & \text{,,} \quad x = a + y, \quad y + c = b, \\ x = a \dot{-} (c \dot{-} b) & \text{,,} \quad x + y = a, \quad y + b = c, \\ x = a \dot{-} (b + c) & \text{,,} \quad x + b + c = a, \\ x = (a \dot{-} b) \dot{-} c & \text{,,} \quad x + c = y, \quad y + b = a, \\ x = (a+c) \dot{-} (b+c) & \text{aus} \quad x + b + c = a + c, \\ x = (a \dot{-} c) \dot{-} (b \dot{-} c) & \text{,,} \quad x + y = z, \quad y + c = b, \quad z + c = a, \\ x = (a \dot{-} c) + (c \dot{-} b) & \text{,,} \quad x = y + z, \quad y + c = a, \quad z + b = c, \end{cases}$$

und so weiter. Valenzbedingung ist jeweils die Resultante der Elimination von x, y, z.

Hier steht jedoch noch ein andrer Weg offen: man kann auch das Schema η) eventuell wiederholt als Vorschrift benutzen, um die verlangten Ausdrücke darnach aufzubauen, wobei man mit den Inhalten der Klammern beginnend successive nach aussen fortschreiten wird. Dieses Verfahren — bei ω_1) oben von uns angewendet — ist das bequemere da, wo nur *ein* $\dot{-}$ Zeichen sich in dem Ausdrucke vorfindet. Wo aber deren mehrere auftreten, würde so in das Ergebniss eine Mehrzahl von arbiträren Parametern u, v, w eingehen, die dann nach unserm Zusatze zu Th. 48_+) auf einen einzigen erst noch zurückgeführt werden müssten.

Hat man so (auf die eine oder andere Weise) die Elementarausdrücke berechnet, so unterliegt die Vergleichung derselben wiederum keiner Schwierigkeit, und wird man ähnliche Wahrnehmungen, wie oben bei den eindeutigen Ausdrücken, machen.

Insbesondere möge noch der Leser untersuchen, ob allgemein, oder unter welchen Bedingungen die Ausdrücke

$$\omega_3) \qquad (a+c) \dot{-} (b+d) \quad \text{und} \quad (a \dot{-} b) + (c \dot{-} d)$$

für einander gesetzt werden dürfen, desgl. für die einfachen Minuszeichen.

Wol genügen aber schon die bisherigen Studien um ein Bild zu geben von den Schwierigkeiten oder besser Unbequemlichkeiten, mit welchen man fortgesetzt sich zu placken hätte, wollte man etwa nach den solchergestalt für die Exception und Abstraktion geltenden Formeln wirklich rechnen. Als empfindlichster Misstand würde sich der Umstand fühlbar machen, dass die Regeln nicht unbedingt gültig, die Transformation von Ausdrücken nach denselben nicht allgemein zulässig sind, sondern an die von mir so genannten Valenzbedingungen als an eine jeweilige Voraussetzung geknüpft erscheinen. Sodann sind die mittelst des Korrektionsglieds modifizirten Sätze auch weniger einfach, als die entsprechenden in der Arithmetik, und analoge Ver-

einfachungen, wie sie letztere Disziplin noch obendrein durch die Einführung der „negativen“ Zahlen für den ganzen Komplex ihrer einschlägigen Sätze erzielt hat, wären hier nicht anzubringen. Die Sätze würden hier, zumal bei ihrer nicht unerheblichen wol kaum verminderbaren Anzahl, auch schwer zu behalten sein und müssten jedesmal bei der Anwendung samt ihren Gültigkeitsbedingungen nachgeschlagen werden — gewiss eine höchst unerquickliche Zumutung! Und anderes mehr.

Es ist darum nur zu beglückwünschen, dass durch das Studium einzig ihres gemeinsamen Spezialfalles, der Negation, die weitere Anwendung der inversen Operationen des Kalkuls entbehrlich und überflüssig geworden.

Der Studirende möge deshalb auch einen Ausdruck wie *„die a ohne die b“*, *„die a mit Ausnahme der b“* künftighin nicht mit $a - ab$ resp. $a - b$ sondern nur mit ab_1 in die Zeichensprache übertragen. In der That ist der Ausdruck mit: *„die a, welche nicht b sind“* augenscheinlich äquivalent. —

Zum Schlusse sei noch erwähnt, dass die Darstellung η) des Generalwerts der Differenz sich auch unter dem Gesichtspunkt des Th. 44_+) Zusatz 1 für die Entwickelung einer Funktion $f(a, b) = a \div b$ nach ihren Argumenten darstellen, nachträglich ableiten lässt. Nach diesem Satze nämlich müssten wir haben:

α_1) $\quad a \div b = (1 \div 1)\, ab + (1 \div 0)\, ab_1 + (0 \div 1)\, a_1 b + (0 \div 0)\, a_1 b_1.$

Nun ist der Koeffizient $0 \div 1$ sinnlos — vergl. das unter σ) Gesagte. Damit der sinnlose Term aus dem Ausdruck fortfalle, wird der zugehörige Konstituent $a_1 b = 0$ sein müssen, was uns die Valenzbedingung liefert.

Nach den unter λ) angegebenen Spezialwerten (die auch durch gesonderte Überlegungen hätten unabhängig ermittelt werden können) sind:

$$1 \div 1 = u, \quad 1 \div 0 = 1 \quad \text{und} \quad 0 \div 0 = 0$$

für die übrigen Koeffizienten einzusetzen und ergibt sich:

$$a \div b = uab + ab_1$$

in Übereinstimmung mit η).

Analog dual entsprechend für den Generalwert des Quotienten.

Das Theorem 44_+) nebst Korollaren wird in dieser Weise auch für die unter Konkurrenz *inverser* Operationen aufgebauten Funktionsausdrücke gültig bleiben, wenn man es durch die Zusatzbemerkung ergänzt, *dass diejenigen Konstituenten, deren Koeffizienten undeutig aus-*

fallen, für sich gleich 0 *gesetzt werden müssen* und so die Valenzbedingung für den Funktionsausdruck liefern.

Die vorstehende nähert sich der Art und Weise auf welche Boole seine inversen Operationsergebnisse ermittelte.

Die wesentlichsten in diesem Paragraphen gewonnenen Ergebnisse, seinerzeit im Operationskreis[2] von mir mitgeteilt, habe ich nachträglich als von Herrn Peirce in seiner Schrift[1a] schon früher veröffentlichte vorgefunden.

§ 24. Symmetrisch allgemeine Lösungen.

Die zur Vervollständigung der Theorie hiernächst von uns angestellten Betrachtungen können bei erstmaliger Lektüre des Buches überschlagen werden — es sei denn, dass der Anfänger sie benutzen wolle um sich im identischen Rechnen zu üben. Dieselben scheinen mir vorwiegend ein theoretisches Interesse zu besitzen — von eigentümlichem Reiz vielleicht für den Mathematiker — dagegen praktische Verwertbarkeit wol erst für eine fernere Zukunft in Aussicht zu stellen.

Ein nicht ganz leichtes Problem ist es, das uns hier noch zu beschäftigen hat, da seine Lösung unter Umständen wünschenswert erscheinen kann. Dasselbe bezieht sich auf den Fall, wo nach einer *Mehrzahl* von unbekannten Gebieten oder Klassen gleichzeitig gefragt wird.

Hier kam es darauf an, die sämtlichen Wertsysteme, und nur solche, anzugeben, welche für die Unbekannten $x, y, z, \ldots$ in die vereinigte Gleichung des Problems bezüglich eingesetzt, dieselbe erfüllen.

In § 22, unter ϑ) sqq. *gelang uns dieses,* indem wir die vereinigte Gleichung nach dem System der Unbekannten allgemein auflösen, ihre Wurzeln wirklich „berechnen", d. h. unter Zuhülfenahme *arbiträrer* Parameter $u, v, w, \ldots$ Ausdrücke für dieselben aufzustellen lernten, welche bei beliebiger Deutung jener Parameter uns allemal ein System von Wurzeln, ein solches aber auf jede mögliche Weise, liefern mussten.

Zu dem Ende mussten aber die Unbekannten *successive* (eliminirt und in der umgekehrten Ordnung) *berechnet* werden und die für dieselben als Wurzeln erhaltenen Ausdrücke erwiesen sich nach ihrem ganzen Baue — „formell" — abhängig von der dabei eingehaltenen Reihenfolge.

Die zuerst berechnete Unbekannte enthielt z. B. in ihrem Ausdruck nur *einen* willkürlichen Parameter, die nach dieser berechnete dazu noch einen weiteren, mithin deren zweie, die nächstberechnete ihrer dreie, u. s. w. Es konnte auch vorkommen, dass bei der letzten Elimination (eine oder) mehrere Unbekannte auf einmal herausfielen. Diese mussten dann unbestimmt, willkürlich bleiben und waren *durch sie* hernach die übrigen Unbekannten auszudrücken. Auf diese Weise

wurden bei der Auflösung einzelne Unbekannte vor den andern *bevorzugt*, und solches war sogar der Fall, wenn auch die urspüngliche Aufgabe „*symmetrisch*" erschien bezüglich sämtlicher Unbekannten oder auch einer gewissen Gruppe von solchen, wenn die vereinigte Gleichung durch gewisse unter den Unbekannten vorgenommene Vertauschungen — in Verbindung vielleicht mit einer gleichzeitigen Vertauschung unter ihren *gegebenen* Parametern $a, b, c, \ldots$ — ungeändert blieb, nur in sich selbst transformirt wurde.

So ist z. B. die Gleichung $xy = 0$ bezüglich x und y symmetrisch. Elimination von y gibt $0 = 0$ (womit also auch x von selbst herausgefallen); mithin kann x als willkürlich hingestellt werden, und darnach berechnet sich dann: $y = vx_1$. Somit stellen uns die Gleichungen:

$$x = x, \qquad y = vx_1$$

bei beliebigem x und v in der That jedes System von Wurzeln vor; man könnte auch sagen:

$$x = u, \qquad y = vu_1$$

bei beliebigen u, v.

Hätten wir aber die umgekehrte Reihenfolge bei der Auflösung vorgezogen, so würden wir in Gestalt von $y = y$, $x = uy_1$, oder:

$$x = uv_1, \qquad y = v$$

zur Darstellung von ebendiesen Wurzelpaaren gelangt sein.

Eine gerechtfertigte, rationelle Anforderung ist es, nunmehr zu verlangen, dass die Darstellung für die Wurzelnsysteme von dem bei dem Auflösungsverfahren befolgten modus procedendi unabhängig erscheinen sollen, und dass insbesondere alle diejenigen *Vertauschungen* einerseits zwischen den Unbekannten $x, y, z, \ldots$ andrerseits zwischen den gegebenen Parametern $a, b, \ldots$ welche die *Data* des Problems ungeändert lassen, nämlich die vereinigte Gleichung desselben in sich selbst transformiren, auch das System der *Lösungen* nicht affiziren, nämlich die Darstellungen der verschiedenen Wurzeln nur *auf einander* zurückführen, wofern sie noch mit geeigneten Vertauschungen unter den neu hinzugekommenen Symbolen, den *willkürlichen* Parametern, verbunden werden.

Um diesen Anforderungen zu genügen, dürfen nun jedenfalls nicht mehr einzelne Unbekannte direkt durch andere von ihnen ausgedrückt werden, wo letztere unbestimmt bleiben; vielmehr müssen jetzt *alle* Wurzeln ausgedrückt werden lediglich durch die *gegebenen* Parameter $a, b, c, \ldots$ (oder die Koeffizienten der nach den Unbekannten entwickelten vereinigten Gleichung) und durch *willkürliche* oder „unabhängige" Parameter.

Dergleichen arbiträre Gebiete (welche wir bisher mit Vorliebe u, v, w genannt haben), will ich in diesem Paragraphen ausschliesslich durch *griechische* Buchstaben (des kleinen Alphabetes) darstellen, sodass auch umgekehrt jeder solche uns stets ein *vollkommen willkürliches* Gebiet bedeutet.

Ein durch solche Parameter ausgedrücktes System von Wurzeln wird als ein richtiges, als eine *Lösung* der gegebenen Relation oder vereinigten Gleichung zu bezeichnen sein, wenn dasselbe, in die Gleichung eingesetzt, diese in eine analytische Identität verwandelt; es darf also durch die Einsetzung nicht etwa eine „Relation" zwischen den Parametern sich ergeben.

Und als die *allgemein(st)e* Lösung wird es zu bezeichnen sein, wenn *jedes* beliebige *die vereinigte Gleichung erfüllende* Wertsystem $x, y, z, \ldots$ der Unbekannten aus den für die Wurzeln aufgestellten Ausdrücken dadurch erhalten werden kann, dass man den in sie eingehenden Parametern geeignete partikulare oder besondere Werte beilegt.

Die Forderung der „*Symmetrie*" haben wir oben schon charakterisirt.

Ein allen diesen Anforderungen genügendes System von Ausdrücken (resp. von Gleichungen, in welchen linkerhand die Unbekannten sämtlich isolirt erscheinen, rechterhand nur die Koeffizienten mit willkürlichen Parametern verbunden erscheinen) nennen wir eine „*symmetrisch allgemeine*" Lösung des vorgelegten Problems.

Man mag noch ausserdem verlangen, dass die Anzahl der verwendeten arbiträren Parameter nicht grösser sei, als unumgänglich.

Ich werde nunmehr die vorstehend charakterisirte Aufgabe für eine Reihe von Einzelfällen lösen — die wichtigsten, von elementarer Natur. Es zeigt sich, dass die gefundenen Lösungen immer leicht als solche, die allen Anforderungen wirklich genügen, zu bewahrheiten sind. Weniger leicht sind sie manchmal zu entdecken.

Zu ihrer Auffindung verfüge ich bis jetzt erst über den Anfang einer allgemeinen Methode. Der erste Schritt von dieser — bei jedem Problem der gleiche — führt nicht selten schon sofort zum Endergebnisse. Manchmal aber wird man durch denselben zunächst in einen Zirkel geführt, aus welchem es bis jetzt nicht möglich erscheint, ohne besondere Kunstgriffe herauszukommen. Die Methode bedarf also noch weiterer Ausgestaltung. Was über dieselbe zu sagen ist, will ich gelegentlich der Beispiele auseinandersetzen.

Ich beginne mit der folgenden (unbegrenzten) Reihe von fundamentalen Problemen.

Aufgabe 1. *Es soll die Gleichung*

$$xy = 0$$

„symmetrisch allgemein" nach den Unbekannten x und y aufgelöst werden.

Die Auflösung wird dargestellt durch die Gleichungen:

$$x = \alpha\beta_1\omega_1 + \alpha_1\beta\omega, \qquad y = \alpha_1\beta\omega_1 + \alpha\beta_1\omega,$$

worin, wie vorbemerkt, α, β und ω ganz beliebige Gebiete bedeuten.

Aufgabe 2. *Ebenso nach x, y, z die Gleichung*

$$xyz = 0$$

symmetrisch allgemein zu lösen.

Auflösung:

$$x = \alpha(\beta_1 + \gamma_1)\,\omega_1 + \alpha_1(\beta + \gamma)\,\omega,$$
$$y = \beta(\gamma_1 + \alpha_1)\,\omega_1 + \beta_1(\gamma + \alpha)\,\omega,$$
$$z = \gamma(\alpha_1 + \beta_1)\,\omega_1 + \gamma_1(\alpha + \beta)\,\omega.$$

Aufgabe 3. *Desgleichen nach x, y, z, w aufzulösen die Gleichung:*

$$xyzw = 0.$$

Auflösung:

$$x = \alpha(\beta_1 + \gamma_1 + \delta_1)\,\omega_1 + \alpha_1(\beta + \gamma + \delta)\,\omega,$$
$$y = \beta(\alpha_1 + \gamma_1 + \delta_1)\,\omega_1 + \beta_1(\alpha + \gamma + \delta)\,\omega,$$
$$z = \gamma(\alpha_1 + \beta_1 + \delta_1)\,\omega_1 + \gamma_1(\alpha + \beta + \delta)\,\omega,$$
$$w = \delta(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1)\,\omega_1 + \delta_1(\alpha + \beta + \gamma)\,\omega.$$

Und so weiter: das Bildungsgesetz für beliebig viele Faktoren des zum Verschwinden zu bringenden Produktes ist ersichtlich.

Beweis. Erstens *stimmt* bei ganz unbestimmt gelassenen willkürlichen Gebieten $\omega, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ für die angegebenen Wurzelwerte *die Probe der Auflösung* — wie dies leicht nachzurechnen ist.

Die Auflösungen sind also jedenfalls *richtige*.

Zweitens sind sie aber auch die *allgemeinsten*, wie ich für Aufgabe 3 näher nachweisen will (ganz analog ist es auch für die vorhergehenden beiden Aufgaben zu leisten, etc.).

Ist x, y, z, w *irgend ein* Wertsystem oder System von gegebenen Gebieten, welche die Anforderung $xyzw = 0$ erfüllen, so kann man immer unsre Parameter $\omega, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ so bestimmen, dass unsre Ausdrücke für die Wurzeln *gerade dieses* Wertsystem liefern. In der That genügt es, zu diesem Zwecke etwa:

$$\omega = 0 \quad \text{und} \quad \alpha = x, \quad \beta = y, \quad \gamma = z, \quad \delta = w$$

selbst zu denken.

Um dies darzuthun muss nur erkannt werden, dass die Gleichung:

$$x = x(y_1 + z_1 + w_1)$$

unter der Voraussetzung $0 = xyzw$ eine richtige Identität ist. Addiren wir aber diese letztere überschiebend zu der vorigen Gleichung, so entsteht:

$$x = x(y_1 + z_1 + w_1 + yzw) = x \cdot 1 = x,$$

in Anbetracht, dass wegen $y_1 + z_1 + w_1 = (yzw)_1$ der Inhalt der Klammer rechts gleich 1 sein muss — cf. Th. $36_\times$) und 30_+).

Und analog bezüglich der übrigen Unbekannten. Ebenso würde mit den Annahmen

$$\omega = 1, \qquad \alpha = x_1, \qquad \beta = y_1, \qquad \gamma = z_1, \qquad \delta = w_1$$

der Nachweis gelungen sein.

Es ist also wirklich jede denkbare Lösung, jedes der Forderung $xyzw = 0$ genügende Wertsystem in unsern Ausdrücken für die Wurzeln enthalten.

Und drittens gleichwie die Aufgabe in Bezug auf sämtliche Unbekannte *symmetrisch* war, so sind es auch unsre Resultate, indem durch Vertauschungen unter den Parametern $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ augenscheinlich die verschiedenen Wurzeln nur in einander übergeführt werden, das System der Lösungen aber, wenn zugleich auch diese Wurzeln vertauscht werden, als Ganzes unverändert bleibt.

Wir sind darnach mit dem Beweis zu Ende. —

Unsre Lösungen sind sogar *symmetrisch in Bezug auf die Gruppe der Parameter und diejenige ihrer Negationen*, indem bei Vertauschung von $\omega, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ mit bezüglich $\omega_1, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ die Ausdrücke wesentlich ungeändert bleiben, nur in sich selbst wieder übergehen.

Letztere Eigenschaft ist ein *Luxus*. Man kann sie preisgeben und dafür den Vorteil erkaufen, dass man mit einem Parameter weniger auskommt.

Wie im zweiten Teil des Beweises sich offenbarte sind nämlich auch die für die spezielle Annahme $\omega = 1$ (oder auch $= 0$) sich ergebenden Ausdrücke schon die allgemeinsten Lösungen und kann man also sagen, dass auch durch die Formeln:

$$x = \alpha_1(\beta + \gamma + \delta)$$
$$y = \beta_1(\gamma + \delta + \alpha)$$
$$z = \gamma_1(\delta + \alpha + \beta)$$
$$w = \delta_1(\alpha + \beta + \gamma)$$

die Gleichung $xyzw = 0$ schon symmetrisch allgemein gelöst wird, wobei wir nun nicht *mehr* Parameter, als Unbekannte haben.

Analog auch für die übrigen Aufgaben: es wird z. B.

$$x = \alpha\beta_1, \qquad y = \alpha_1\beta$$

die einfachst mögliche symmetrisch allgemeine Lösung der Gleichung $xy = 0$ sein. Etc.

Zur Auffindung der angegebenen Lösungen kann man *heuristisch* sich leiten lassen durch die folgende Überlegung.

Soll $xyzw = 0$ sein, so müssen wir nach Th. 43) Zusatz haben: $x = \alpha\,(yzw)_1 = \alpha\,(y_1 + z_1 + w_1)$ und ist damit die allgemeine Form gefunden, in welcher x sich durch vier andre Gebiete α, y, z, w ausdrücken lässt; symmetriehalber muss das Analoge in Bezug auf die übrigen Unbekannten der Fall sein, sich also y durch β, x, z, w ausdrücken lassen, etc. Würden wir aber dieses Schema zum Vorbild nehmen, so bekämen wir noch mit einer übergrossen Anzahl von Parametern zu thun (die auch nicht von einander unabhängig bleiben dürften).

Vorteilhafter ist darum die Bemerkung, dass nach bekannten Sätzen — cf. Th. 38) Zus. und Th. 20) — eine *Gleichung* $ab = 0$ *äquivalent ist* (der Subsumtion $a \subset\!\!\!= b_1$ und folglich auch) *der Gleichung* $a = ab_1$ (wie dies, wegen $a = ab_1 + ab$, auch leicht ganz direkt nachzuweisen). Aus der Gleichung $xyzw = 0$ erhalten wir also:

$$x = x\,(y_1 + z_1 + w_1), \qquad y = y\,(z_1 + w_1 + x_1), \quad \text{etc.}$$

Ersetzt man hier *rechterhand* die Symbole x, y, z, w selbst durch unbestimmt gelassene Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ so erhält man jedenfalls symmetrische Darstellungen für die vier Unbekannten, welche fähig sind jedes gegebene Wertsystem der Wurzeln bei geeigneter Bestimmung der Parameter (nämlich für die Annahme $\alpha = x$, $\beta = y$, etc. derselben) auch wirklich zu liefern, und ist mit diesen Darstellungen nur die Probe noch zu machen, ob sie auch für alle möglichen Werte dieser Parameter schon die Forderung, dass $xyzw = 0$ werde, erfüllen — und siehe da: die Probe stimmt!

Die damit gewonnenen symmetrisch allgemeinen Lösungen:

$$x = \alpha\,(\beta_1 + \gamma_1 + \delta_1), \qquad y = \beta\,(\gamma_1 + \delta_1 + \alpha_1), \quad \text{etc.}$$

bleiben jedenfalls ebensolche, wenn man sie noch mit einem weitern unbestimmten Parameter ω_1 multiplizirt, und aus den Darstellungen gehen dann ebenso berechtigte hervor, indem man sämtliche Parameter mit ihren Negationen vertauscht. Aus den beiden Systemen von Ausdrücken ergeben sich endlich durch additive Vereinigung der entsprechenden neue, anscheinend die allgemeinsten (in Wahrheit aber nur ebenso allgemeine) die

ebenfalls die Forderung $xyzw = 0$ erfüllen müssen, in Anbetracht, dass sie nach ω samt und sonders entwickelt erscheinen und man also behufs Multiplikation derselben nur die Koeffizienten ihrer gleichnamigen Glieder übereinander zu legen braucht.

Um die beim vorstehenden Spezialproblem erlangten Fingerzeige in der Richtung einer zum Ziel führenden Methode zu verallgemeinern, müssen wir noch dem Th. 50) eine neue Ausdrucksform geben, durch welche dasselbe mit dem Zusatze zum Th. 47_+) in Zusammenhang gebracht wird. Das letztere sagte (mit neuer Bezeichnung) aus, dass sooft $A \Subset x \Subset B$ ist, auch immer $Ax_1 + Bx = x$ sein müsse. Sagen wir hier b für A und a_1 für B, so gelangen wir — in Anbetracht, dass die Gleichung $ax + bx_1 = 0$ auch mit der Doppelsubsumtion $b \Subset x \Subset a_1$ nach Th. 49_+) äquivalent ist, zu dem Satze, den wir bezeichnen als das

Hülfstheorem des § 24: *Die Gleichung $ax + bx_1 = 0$ ist äquivalent der:*

$$x = bx_1 + a_1 x.$$

In der That kann diese Äquivalenz auch leicht direkt nachgewiesen werden, indem man einfach die letztere rechterhand auf 0 bringt.

Die letztere Gleichung, obwol sie rechterhand die Unbekannte x selbst noch enthält, kann gleichwol als eine *partikulare* „Lösung" der erstern hingestellt werden, in Anbetracht, dass sie aus der allgemeinen Lösung $x = bu_1 + a_1 u$ auch hervorgeht, indem man den willkürlichen Parameter u gleich x selbst annimmt. Sie stellt aber mit gleichem Rechte *jede* Partikularlösung vor, indem es offen blieb, welche von diesen unter x gedacht wurde.

Man könnte, im Hinblick auf die erste, unsre zweite Gleichung auch noch zu:

$$x = a_1 x$$

(mittelst Unterdrückung von bx_1, welches ja 0 sein sollte) vereinfachen. Für unsre beabsichtigten Anwendungen wird sich dieses aber nur selten empfehlen, — so, natürlich, wenn der Term bx_1 analytisch verschwinden sollte, wie es oben bei Aufgabe 4, wo $b = 0$ war, der Fall gewesen.

Wir werden darnach ein Arbeiten nach dem *„vollen"* und ein solches nach dem *„verkürzten" Schema* unsres Hülfstheorems zu unterscheiden haben.

Nach obigem Hülfstheorem können wir nun die vereinigte Gleichung unsres Problems nach irgend einer Unbekannten *so* auflösen, dass wir *ohne Zuhülfenahme eines arbiträren Parameters* diese Unbekannte *durch*

sich selbst und durch die übrigen Unbekannten linear und eindeutig *ausdrücken.*

Thun wir dies für *jede* Unbekannte, so erhalten wir ein System von Gleichungen, deren jede mit der ursprünglichen vereinigten Gleichung äquivalent ist (und je für eine Unbekannte einen Ausdruck angibt).

Jede Vertauschung von Symbolen, welche die ursprüngliche Gleichung in sich selbst verwandelt, muss darum auch bei dem System dieser aus ihr gezogenen Folgerungen zulässig sein, dasselbe in sich selbst verwandeln.

In unsern Darstellungen für die Unbekannten kommen nun freilich rechterhand neben den Koeffizienten der vereinigten Gleichung auch diese *Unbekannten* selbst wieder vor. *Ersetzt man aber (blos rechterhand) jede einzelne von diesen letztern durchweg durch einen* besondern nunmehr *unbestimmt zu lassenden Parameter* oder griechischen Buchstaben, so wird man ein allgemeineres System von Darstellungen für die Unbekannten erhalten, welches jedenfalls fähig ist, ein jedes besondere System von Wurzelwerten (für gewisse Parameterwerte) darzustellen, welches (m. a. W.) alle Wurzelsysteme notwendig mitumfasst oder in sich begreift.

Ausserdem wird dieses System von Gleichungen unfehlbar die Anforderungen der Symmetrie auch erfüllen. Wenn nämlich *vor* der Ersetzung durch die griechischen Buchstaben eine Gleichung des Systems aus einer andern hervorging durch eine vielleicht zwischen den Koeffizienten und jedenfalls auch zwischen den Unbekannten der vereinigten Gleichung vorgenommene Vertauschung, so muss das gleiche auch *nach* jener Ersetzung noch der Fall sein sobald man nur mit der Vertauschung eben der Unbekannten auch die entsprechende zwischen den für sie eingesetzten griechischen Parametern parallel gehen lässt.

Also die Anforderung der *Allgemeinheit* und die Anforderung der *Symmetrie* erfüllen bereits die so gewonnenen Darstellungen für die Unbekannten. Um sie als „symmetrisch allgemeine Lösungen" der vereinigten Gleichung hinstellen zu dürfen, müssen wir nur noch zusehen, ob sie auch *Lösungen* derselben sind, ob sie als Wurzeln dieselbe erfüllen schon bei beliebig gelassenen Parameterwerten. Zu dem Ende ist nunmehr die *Probe* zu machen; die Ausdrücke sind für die Unbekannten in die vereinigte Gleichung einzusetzen.

Nicht selten, wie gesagt, stimmt diese Probe: es resultirt aus der Substitution der Ausdrücke, die wir dann als die „*Wurzeln*" bezeichnen dürfen, eine von den Parametern analytisch erfüllte Identität; man ist schon mit dem einen geschilderten als dem ersten Schritt der Methode am Ziele.

Zuweilen aber führt die Einsetzung jener Darstellungen für die Unbekannten zu einer *Relation zwischen den Parametern*, welche von diesen erst erfüllt werden müsste. Die Aufgabe ist alsdann wenigstens auf die andre zurückgeführt: diese Relation nunmehr nach besagten Parametern als Unbekannten symmetrisch allgemein zu lösen. Hätten wir schon deren Wurzeln, so würde ihre Substitution in die früheren Gleichungen uns auch die ursprünglichen Unbekannten darstellen lehren.

Die Hülfsaufgabe, auf die wir so geführt werden, kann sehr viel einfacher und leichter sein, als wie die ursprüngliche, in welchen Fällen wir schrittweise zum Ziel gelangen werden. Allein es kommt auch vor, dass die für die Parameter resultirende Relation oder Hülfsgleichung genau von derselben Form ist, wie die ursprüngliche vereinigte Gleichung in Bezug auf die ursprünglichen Unbekannten es war, sodass das Problem wesentlich — bis auf die nunmehr durch andere vertretenen Namen der Unbekannten (und vielleicht Koeffizienten) — *dasselbe* geblieben ist, und es, auf die gleiche Art von neuem in Angriff genommen, in Ewigkeit bleiben müsste. Alsdann vermögen nur andersartige Kunstgriffe aus dem Zirkel herauszuführen — wofern überhaupt das Problem ein lösbares.

Es werden fernere Beispiele dies nach und nach illustriren.

Aufgabe 4. *Die Subsumtion:*

$$x \Subset y$$

nach x und y symmetrisch allgemein zu lösen.

Auflösung. Die Gleichung $xy_1 = 0$, mit der unsre Subsumtion äquivalent, ist dies auch wieder mit den beiden:

$$x = xy \quad \text{und} \quad y = x + y\,.$$

Nach der auseinandergesetzten Methode gelangen wir also zu den Formeln:

$$x = \alpha\beta\omega_1 + \alpha_1\beta_1\omega\,, \quad y = (\alpha + \beta)\omega_1 + (\alpha_1 + \beta_1)\omega$$

welche auch schon für $\omega = 0$ angesetzt werden konnten als:

$$x = \alpha\beta\,, \quad y = \alpha + \beta\,,$$

und die Aufgabe lösen.

Ebenso konnte aber auch die Lösung schon aus der bei Aufgabe 1 gegebenen abgeleitet werden, indem man nach dortigen Schemata die Gleichung $xy_1 = 0$ symmetrisch allgemein löst nach den Unbekannten x und y_1; für diese hat man die l. c. aufgestellten Ausdrücke und ergibt noch aus dem letztern sich y selbst durch beiderseitiges Negiren. Man bekommt die nämlichen Formeln, wie vorstehend, bis auf den Umstand, dass der Parameter β mit seiner Negation gewechselt.

Es gibt keine wirkliche Vertauschung, welche hier die Data des Problems ungeändert liesse: es können x und y hier nicht die Rollen tauschen und die Aufgabe selbst ist unsymmetrisch. Die Symmetrie unsrer Lösungen besteht hier gleichwol in dem Sinne, dass weder y einseitig durch x ausgedrückt wird, noch umgekehrt x durch y, sondern dass vielmehr beide Unbekannte gleichmässig dargestellt werden durch zwei unabhängige Parameter α und β. Dass diese Darstellungen sogar in Bezug auf letztere symmetrisch erscheinen, dürfte mehr wol nur als ein Zufall anzusehen sein. Verzichteten wir auf diese Gleichmässigkeit, so könnte die Aufgabe schon einfacher mittelst:

$$x = \alpha, \quad y = \alpha + \beta,$$

oder auch mittelst:

$$x = \alpha\beta, \quad y = \beta$$

in unabhängigen Parametern gelöst werden.

Aufgabe 5. Eine Reihe von Problemen einfachsten Charakters ergibt sich, indem man fordert, dass von den vier Gliedern der nach x und y entwickelten Einheit (identischen Eins) irgend eines, irgend zweie oder irgend dreie verschwinden, dass also von den vier Gleichungen:

$$xy = 0, \quad xy_1 = 0, \quad x_1y = 0, \quad x_1y_1 = 0$$

in jeder möglichen Weise eine Gruppe gelten solle und allemal das System nach x und y symmetrisch allgemein gelöst werde.

Für die erste Gleichung, wenn sie für sich allein gelten soll, ist dies schon unter Aufgabe 1 geleistet, für die zweite unter Aufgabe 4 und daraus ergibt sich auch die Lösung für die dritte Gleichung, indem man x und y vertauscht; endlich braucht man, um für die vierte Gleichung die Lösungen zu finden, nur bei denen der Aufgabe 1 das x, y durch x_1, y_1 zu ersetzen, somit hier als x und y anzusetzen: die Negationen der angegebnen Wurzeln.

Gleichzeitige Geltung von irgend zweien der vier obigen Gleichungen führt auf die sechs Aufgaben, je eine von den Gleichungen symmetrisch allgemein zu lösen:

$$xy + xy_1 = x = 0, \quad xy + x_1y = y = 0, \quad xy + x_1y_1 = 0,$$
$$xy_1 + x_1y = 0, \quad xy_1 + x_1y_1 = y_1 = 0, \quad x_1y + x_1y_1 = x_1 = 0.$$

Von diesen bietet nur die dritte und die vierte ein Interesse (siehe unten). Bei den vier andern Aufgaben fiel nämlich die eine Unbekannte von selbst heraus; diese bleibt willkürlich und kann einem Parameter α, oder β, gleichgesetzt werden, wogegen sich die andre Unbekannte gleich 0 resp. 1 bestimmt.

Nach Th. 33_+) gibt das Verschwinden irgend dreier von den vier Termen, mithin auch ihrer Summen zu irgend dreien, die Ansätze:

$$x_1 + y_1 = 0, \quad x_1 + y = 0, \quad x + y_1 = 0, \quad x + y = 0,$$

welche nur je durch das Verschwinden der beiden Glieder befriedigt werden können, womit sich aber x und y gleich 1 oder 0 völlig bestimmen.

Alle vier Terme zugleich können nicht verschwinden, weil der Ansatz nach Th. 34_+) auf die absurde Gleichung $1 = 0$ führen würde.

Als einzige weitere Ausbeute der vorstehenden Blumenlese notiren wir also diese beiden Probleme: *die Gleichung*

$$xy + x_1 y_1 = 0 \quad \text{resp.} \quad xy_1 + x_1 y = 0$$

je symmetrisch allgemein zu lösen.

Dieselben sind dadurch interessant, dass sie die *einfachsten Exempel* zu dem oben erwähnten *„Zirkel“* liefern.

Behandeln wir zunächst das erste derselben. Die Gleichung zerfällt in die beiden Forderungen $xy = 0$ und $x_1 y_1 = 0$. Der ersten von diesen wird nach Aufgabe 1 durch den Ansatz: $x = \alpha\beta_1$, $y = \alpha_1\beta$ auf die allgemeinste Weise symmetrisch genügt, und müssen die Parameter α und β nur mehr noch so bestimmt werden, dass sie auch die zweite Forderung $x_1 y_1 = 0$ erfüllen. Es wird aber

$$x_1 y_1 = (\alpha_1 + \beta)(\alpha + \beta_1) = \alpha_1\beta_1 + \alpha\beta$$

und sonach erhalten wir in Gestalt von $\alpha\beta + \alpha_1\beta_1 = 0$ für diese unbekannten Parameter eine Gleichung von genau derselben Form, als die ursprüngliche Gleichung in Hinsicht von x und y gewesen.

Das gleiche stellt sich heraus, wenn wir streng systematisch verfahren, die Gleichung nämlich gemäss dem Hülfstheorem des § 24 nach x und y auflösen, wodurch sich $x = y_1$, $y = x_1$ ergibt, alsdann die Symbole x, y rechterhand durch arbiträre Parameter α, β ersetzen und mit den gewonnenen Darstellungen $x = \beta_1$, $y = \alpha_1$ die Probe der Auflösung machen: es zeigt sich, dass diese Parameter nicht unabhängig von einander sind, sondern die Relation: $\alpha_1\beta_1 + \alpha\beta = 0$ befriedigen müssen, welche wiederum von der alten Form ist. Auf dieselbe Weise (behufs Ermittelung von α, β) fortfahrend müssten wir nun immerfort auf die gleiche Aufgabe behufs ihrer eignen Lösung zurückverwiesen werden.

Aus dem Zirkel tritt man aber hier leicht heraus vermittelst der Bemerkung, dass die Relation zwischen den Parametern auch mit $\alpha = \beta_1$ oder $\beta = \alpha_1$ äquivalent ist. Es genügt also in den obigen Darstellungen β_1 durch α zu ersetzen, und erhalten wir:

$$x = \alpha, \quad y = \alpha_1$$

als die gesuchten symmetrisch allgemeinen Lösungen.

Die Symmetrie gibt hier sich darin kund, dass die beiden Lösungen

in einander übergehen, wenn man den (einzigen) vorkommenden *Parameter* α *mit seiner Negation* α_1 vertauscht. —

Die analogen Betrachtungen für das zweite Problem durchzuführen, dessen Gleichung auf $x = y$ oder $y = x$ hinausläuft und mittelst:

$$x = \alpha, \qquad y = \alpha$$

symmetrisch allgemein gelöst wird, dürfen wir füglich dem Leser überlassen.

Indem man analog dem hier Durchgesprochenen systematisch alle diejenigen Probleme aufsucht, welche sich ergeben können durch die Forderung des Verschwindens von irgend einer Gruppe von Termen, hervorgehoben aus den acht Gliedern der Entwickelung von 1 nach x, y *und* z gelangt man weiter zu den in Aufgabe 6 bis 11 behandelten Problemen — wobei wir aber nur mehr diejenigen erwähnen, welche nicht zufolge Herausfallens von Unbekannten auf früher Erledigtes hinauslaufen und welche ferner der Art nach verschieden sind, sodass sie nicht durch blosse Vertauschung von Unbekannten miteinander oder mit ihren Negationen auf bereits Behandeltes zurückkommen.

In Aufgabe 2 ist sonach für die Forderung des Verschwindens von nur *einem* der acht Terme implicite die Lösung schon für alle Möglichkeiten angegeben.

Wir führen auch die Probleme nicht mehr in der streng kombinatorisch-lexikalischen Reihenfolge vor — in welche sie erst durch die Anordnung: Aufg. 2, 10, 7 (oder 8 Anm.), 6, 8, 11, 9 treten würden.

Aufgabe 6. *Die Gleichung*

$$x = yz_1 + y_1 z$$

oder, die rechte Seite auf 0 gebracht:

$$xyz + xy_1z_1 + yz_1x_1 + zx_1y_1 = 0$$

symmetrisch allgemeinst zu lösen.

Die Auflösung leisten die Formeln:

$$x = \beta\gamma_1 + \beta_1\gamma, \qquad x_1 = \beta\gamma + \beta_1\gamma_1,$$
$$y = \gamma\alpha_1 + \gamma_1\alpha, \qquad \text{etc.}$$
$$z = \alpha\beta_1 + \alpha_1\beta,$$

wie schon durch den ersten Schritt der auseinandergesetzten Methode sich ohne weiteres ergibt — vergl. hiezu auch das Th. von Jevons unter π) des § 18. Wieder genügt hier die Annahme $\alpha = x$, $\beta = y$, $\gamma = z$, um gegebene Werte von x, y, z herausspringen zu machen.

Hätte man für die Auflösung einer Gleichung $ax + bx_1 = 0$ anstatt des vollen Schemas $x = bx_1 + a_1x_1$ das verkürzte: $x = a_1x$ — vergl. unser Hülfstheorem — benutzt, so würden sich die ebenfalls richtigen aber weniger einfachen Formeln als Lösung des Problems ergeben haben:

$$x = \alpha(\beta\gamma_1 + \beta_1\gamma), \quad x_1 = \alpha_1 + \beta\gamma + \beta_1\gamma_1,$$
$$y = \beta(\gamma\alpha_1 + \gamma_1\alpha), \quad \text{etc.}$$
$$z = \gamma(\alpha\beta_1 + \alpha_1\beta),$$

Man ersieht hieraus, dass das Problem der symmetrisch allgemeinen Darstellung eines Systems von Unbekannten nicht nur *auf* verschiedene Weisen, sondern auch *in* verschiedener Weise lösbar ist.

Aufgabe 7. *Die Gleichung*

$$xy_1z_1 + yz_1x_1 + zx_1y_1 = 0,$$

welche nur die letzten drei Glieder der vorigen enthält, *symmetrisch allgemein zu lösen.*

Auflösung. Systematisch ergibt sich:

$$x = \alpha(\beta + \gamma) + \alpha_1(\beta\gamma_1 + \beta_1\gamma) = (\beta + \gamma)(\alpha + \beta_1 + \gamma_1) =$$
$$= \alpha\beta\gamma + \beta\gamma_1 + \beta_1\gamma,$$

wozu
$$x_1 = \alpha_1\beta\gamma + \beta_1\gamma_1$$

gehört, und so weiter — x, y, z nebst α, β, γ cyklisch (im Ringe herum) vertauscht.

Die Lösungen sind richtige, aber nicht die einfachst möglichen. Bessere ergeben sich hier merkwürdigerweise, indem man anstatt des „vollen" Schema's das „gekürzte" in Anwendung bringt. So kommt:

$$x = \alpha(\beta + \gamma), \quad x_1 = \alpha_1 + \beta_1\gamma_1,$$
$$y = \beta(\gamma + \alpha), \quad \text{etc.}$$
$$z = \gamma(\alpha + \beta),$$

als eine schon beträchtlich einfachere unter den möglichen Lösungen der Aufgabe. Man mache hier die Probe und überzeuge sich, dass mittelst der Annahme $\alpha = x$, $\beta = y$, $\gamma = z$ die Lösungen auch jedes gewünschte die Data erfüllende System von Wurzelwerten zu liefern im stande sind; Elimination von α, β, γ führt blos auf die obige Gleichung.

Aufgabe 8. *Die Gleichung*

$$xyz + x_1yz + y_1zx + z_1xy = 0$$

nach x, y, z *symmetrisch allgemein zu lösen.*

Dieselbe ist auch äquivalent dem System der drei Gleichungen:

$$yz = 0, \quad zx = 0, \quad xy = 0,$$

indem ihr Polynom sich mittelst identischer Umformungen leicht in $xy + yz + zx$ zusammenziehen lässt.

Auflösung. Es wird also die nach x aufzulösende Gleichung in der Gestalt erscheinen:

$$x(y + z) + x_1 yz = 0,$$

und nach dem vollen Schema ergibt sich darnach systematisch:

$$x = \alpha\beta_1\gamma_1 + \alpha_1\beta\gamma, \quad x_1 = \alpha(\beta + \gamma) + \alpha_1(\beta_1 + \gamma_1),$$
$$y = \beta\gamma_1\alpha_1 + \beta_1\gamma\alpha, \quad \text{etc.}$$
$$z = \gamma\alpha_1\beta_1 + \gamma_1\alpha\beta,$$

wozu nur noch bemerkt werden mag, dass x und x_1 auch in der Gestalt:

$$x = (\gamma\alpha_1 + \gamma_1\alpha)(\alpha\beta_1 + \alpha_1\beta), \quad x_1 = (\gamma\alpha + \gamma_1\alpha_1) + (\alpha\beta + \alpha_1\beta_1)$$

geschrieben werden könnten, etc.

Anmerkung. Die Lösung derjenigen Gleichung:

$$x_1 yz + y_1 zx + z_1 xy = 0,$$

welche nur die drei letzten Glieder der obigen umfasst, müssen sich nunmehr ergeben, wenn man in denen der Aufgabe 7 die Unbekannten mit ihren Negationen vertauscht. Thut man das gleiche auch mit den dortigen Parametern, so werden sich:

$$x = \alpha + \beta\gamma, \quad x_1 = \alpha_1(\beta_1 + \gamma_1)$$
$$y = \beta + \gamma\alpha, \quad \text{etc.}$$
$$z = \gamma + \alpha\beta,$$

als diese gesuchten Lösungen ergeben.

Übrigens ist hervorzuheben, dass bei den Aufgaben 7 und 8 weder das Verfahren nach dem vollen, noch dasjenige nach dem verkürzten Schema uns die in formaler Hinsicht *einfachsten* Lösungen lieferte, welche möglich erscheinen.

Vielmehr drücken schon die Ansätze:

$x = \beta + \gamma$ $y = \gamma + \alpha$ $z = \alpha + \beta$	$x = \beta\gamma$ $y = \gamma\alpha$ $z = \alpha\beta$	$x = \beta_1\gamma$ $y = \gamma_1\alpha$ $z = \alpha_1\beta$	$x = \beta + \gamma_1$ $y = \gamma + \alpha_1$ $z = \alpha + \beta_1$
Aufg. 7	Aufg. 8 Anm.	Aufg. 8 $yz + zx + xy = 0$	$y_1z_1 + z_1x_1 + x_1y_1 = 0$

Lösungen aus für die darunter gesetzten Aufgaben (deren letzte aus Aufgabe 8 durch Vertauschung der Unbekannten mit ihren Negationen

hervorgeht) — wie durch Eliminiren von α, β, γ aus den drei Gleichungen je leicht zu verifiziren ist.

Bei *gegebenen* Werten von x, y, z, welche die Resultante oder vorgelegte Gleichung erfüllen, sind hier bezüglich:

$$\alpha = yz + x_1(y + z)$$

bei den zwei ersten Problemen; sodann

$$\alpha = y \text{ (auch } y + uz_1); \quad \alpha = y_1 \text{ (auch } y_1 + uz)$$

— und so weiter, die Buchstaben α, β, γ und x, y, z cyklisch vertauscht — diejenigen Werte, welche für die Parameter anzunehmen sind, um die Lösungsgleichungen identisch zu erfüllen.

Gelegentlich der ersten von obigen vier Aufgaben sei noch eines kleinen Paradoxons erwähnt. Eliminirt man blos β und γ, so entsteht für α die Gleichung:

$$(y_1 + z_1)\alpha + x_1(y + z)\alpha_1 + xy_1z_1 = 0,$$

in welcher das letzte Glied links auch unterdrückt werden mag auf Grund der von x, y, z ohnehin erfüllt vorauszusetzenden Relation oder Endresultante der Elimination (auch noch von α). Darnach berechnet sich:

$$\alpha = x_1(y + z) + uyz,$$

worin u willkürlich.

Behufs Erzielung einer möglichst einfachen Annahme für α wird man sich nun versucht fühlen u (anstatt wie oben 1) lieber gleich 0 zu nehmen, somit $\alpha = x_1(y + z)$ und entsprechend $\beta = y_1(z + x)$, $\gamma = z_1(x + y)$ zu setzen. Mit diesen Werten stimmt nun aber die Probe $\beta + \gamma = x$ auffallenderweise *nicht*, vielmehr läuft diese Gleichung (auf Grund der Voraussetzungen über x, y, z vereinfacht) noch auf die Relation $xyz = 0$ hinaus, welche mit den Voraussetzungen nicht gegeben war.

Um dies aufzuhellen, eliminiren wir aus den drei Gleichungen

$$x = \beta + \gamma, \quad \text{etc.}$$

der Aufgabe in Vereinigung mit den drei Ansätzen:

$$\alpha = x_1(y + z) + uyz, \quad \beta = y_1(z + x) + vzx, \quad \gamma = z_1(x + y) + wxy$$

die Parameter α, β, γ und erhalten als vereinigte Resultante:

$$0 = xy_1z_1 + yz_1x_1 + zx_1y_1 + xyz(v_1w_1 + w_1u_1 + u_1v_1).$$

Aus dieser ist zu ersehen, dass u, v, w in allen drei Ansätzen willkürlich bleiben, wenn $xyz = 0$ sein sollte, dass aber ohne diese Voraussetzung dieselben (unabhängig von x, y, z) nur einander gleich genommen werden dürfen, falls $u_1 = v_1 = w_1 = 0$ somit $u = v = w = 1$ gesetzt wird, womit sich die oben angeführten Parameterannahmen als notwendige ergeben.

Bei der dritten Aufgabe dagegen resultirt für α die Gleichung:

$$y\alpha_1 + z\alpha + xz = 0, \quad \text{woraus} \quad \alpha = y + uz_1$$

folgt. Der analoge Ansatz für β und γ in Gestalt von

$$\beta = z + vx_1, \qquad \gamma = x + wy_1$$

liefert durch das entsprechende Verfahren die Resultante:

$$0 = yz + zx + xy + x_1 y_1 z_1 (v_1 w + w_1 u + u_1 v),$$

woraus ersichtlich ist, dass der letzte Term für $u = v = w$ schon bei beliebigem u in Wegfall kommen wird. —

Aufgabe 9. *Die Gleichung:*

$$xy_1 z_1 + yz_1 x_1 + zx_1 y_1 + x_1 yz + y_1 zx + z_1 xy = 0,$$

welche die bei den Aufgaben 7, und 8 Anm., vorgekommenen Glieder in sich zusammenfasst, *nach x, y, z symmetrisch allgemein zu lösen.*

Auflösung. Die Gleichung fordert, dass:

$$x + y + z = xyz, \quad \text{oder} \quad (x + y + z)(x_1 + y_1 + z_1) = 0$$

sein solle, und lässt sich schreiben in der Gestalt:

$$yz_1 + zx_1 + xy_1 = 0,$$

oder

$$y_1 z + z_1 x + x_1 y = 0,$$

oder

$$(yz_1 + y_1 z) + (zx_1 + z_1 x) + (xy_1 + x_1 y) = 0,$$

womit, da die drei Terme auch einzeln verschwinden müssen, nach Th. 39) gesagt ist, dass:

$$x = y = z$$

sein müsse. Hiernach wird denn augenscheinlich:

$$x = \alpha, \qquad x_1 = \alpha_1$$
$$y = \alpha, \qquad y_1 = \alpha_1$$
$$z = \alpha, \qquad z_1 = \alpha_1$$

die gesuchte Lösung in unabhängigen Parametern sein.

Behufs Verfahrens nach dem (vollen) Schema der Methode müsste man die Gleichung zuerst nach einer Unbekannten ordnen, z. B. nach x, wo sie sich in folgender einfachen Gestalt darstellen wird:

$$x(y_1 + z_1) + x_1(y + z) = 0,$$

sodann nach jener auflösen, etc. Es würde sich

$$x = \alpha\beta\gamma + \alpha_1(\beta + \gamma) = (\beta + \gamma)(\alpha_1 + \beta\gamma),$$

oder noch konziser:

$$x = \beta\gamma + \alpha_1(\beta + \gamma), \qquad x_1 = \beta_1\gamma_1 + \alpha(\beta_1 + \gamma_1),$$
$$y = \gamma\alpha + \beta_1(\gamma + \alpha), \qquad \text{etc.}$$
$$z = \alpha\beta + \gamma_1(\alpha + \beta),$$

ergeben, und da sich $yz = \alpha(\beta\gamma + \beta_1\gamma_1)$, somit $x_1 yz = \alpha\beta_1\gamma_1$ und folglich ebenso $xy_1 z_1 = \alpha_1\beta\gamma$ herausstellt, so führt uns die Probe der Auflösung

auf eine Gleichung in α, β, γ von derselben Form wie die gegebene in x, y, z — nur die drei ersten Glieder mit den drei letzten vertauscht, d. h. wir gelangen zum Zirkel. Aus diesem wird wieder nur herauszukommen sein durch die Bemerkung, dass die Relation zwischen unsern Parametern auf $\gamma = \beta = \alpha$ hinausläuft, womit sich die oben angeführten Lösungen ergeben. — Nach dem gekürzten Schema würden hier alle drei Unbekannten sich gleich $\alpha\beta\gamma$ ergeben haben. —

Aufgabe 10. *Die Gleichung:*

$$xyz + x_1y_1z_1 = 0$$

symmetrisch allgemein zu lösen in unabhängigen Parametern.

Das systematische Verfahren nach dem vollen Schema der Methode führt hier zu der Erkenntniss, dass die Wurzeln folgenden Bau haben müssen:

$$x = \alpha(\beta_1 + \gamma_1) + \alpha_1\beta_1\gamma_1 = \alpha(\beta_1 + \gamma_1) + \beta_1\gamma_1, \quad x_1 = \alpha_1(\beta + \gamma) + \beta\gamma$$
$$y = \beta(\gamma_1 + \alpha_1) + \gamma_1\alpha_1, \qquad \text{etc.}$$
$$z = \gamma(\alpha_1 + \beta_1) + \alpha_1\beta_1,$$

d. h. wir erhalten dieselben Ausdrücke, wie im Kontext der vorigen Aufgabe — nur die Parameter mit ihren Negationen vertauscht. Weil nun aber $xyz = \alpha_1\beta_1\gamma_1$ und $x_1y_1z_1 = \alpha\beta\gamma$ wird, so werden die Parameter selbst noch die Relation

$$\alpha\beta\gamma + \alpha_1\beta_1\gamma_1 = 0$$

symmetrisch allgemein zu erfüllen haben, womit wir bei dem Zirkel uns angelangt finden.

Auf ebendiesen Zirkel würde es auch führen wenn man etwa die Lösungen der Aufgabe 2 benutzen wollte, um die vorliegenden zu entdecken. Ebenso:

Wendete man das gekürzte Schema an, so ergäbe sich:

$$x = \alpha(\beta_1 + \gamma_1), \qquad x_1 = \alpha_1 + \beta\gamma$$

und so weiter (die Buchstaben cyklisch vertauscht). Hier würde zwar $xyz = 0$ schon identisch verschwinden, dafür aber

$$x_1y_1z_1 = \alpha_1\beta_1\gamma_1 + \alpha\beta\gamma$$

sich ergeben und somit der alte Zirkel resultiren.

Der Leser mag hier nun selbst versuchen, aus diesem Zirkel herauszukommen.*)

Aufgabe 11. *Die Gleichung:*

$$xyz + x_1yz + y_1zx + z_1xy + x_1y_1z_1 = 0,$$

*) Vergleiche hiezu Anhang 6. —

— welche links die Glieder der in Aufgabe 8, Anmerkung und Aufgabe 10 gegebenen Gleichungen zusammenfasst — *symmetrisch allgemein zu lösen.*

Die Darstellungen für die Wurzeln müssen — hiernach — sich ergeben, wenn man in die bei der Aufgabe 7 gefundenen Ausdrücke diejenigen Parameterwerte substituirt, welche die Forderung der Aufgabe 10:

$$\alpha\beta\gamma + \alpha_1\beta_1\gamma_1 = 0$$

symmetrisch allgemein erfüllen.

Anmerkung. Vertauschte man noch die Unbekannten mit ihren Negationen, so ergäben sich daraus weiter die Lösungen für eine Aufgabe, welche die Glieder aus den Aufgaben 7 und 10 zusammenfasste. —

Mit vorstehenden Aufgaben würden alle diejenigen erledigt sein, welche irgend Interesse bieten von jenen, die unter den sub Aufgabe 5 angegebnen Gesichtspunkt fallen.

Aufgabe 12. *Die Gleichung:*

$$xy_1 + x_1y = c$$

nach x und y symmetrisch allgemein zu lösen.

Auflösung.

Die in Aufgabe 6 gelöste Gleichung hätte nach Jevons' dort citirtem Theorem auch angeschrieben werden können in der Gestalt:

$$xy_1 + x_1y = z,$$

woraus ersichtlich ist, dass die dortige von der hier vorliegenden Aufgabe sich nur dadurch unterscheidet, dass jetzt z nicht mehr unbekannt sein, sondern einen gegebenen Wert c besitzen soll.

Wollte man die Lösungen der Aufgabe 6 zur Auffindung der Wurzeln der obigen 12 benutzen, so bliebe man in den Zirkel gebannt, für die unbestimmten Parameter α und β jener Lösungen eine Gleichung $\alpha_1\beta + \alpha\beta_1 = c$ von genau der nämlichen Form, wie die vorstehende lösen zu müssen, und so ohne Ende fort weiter, falls man abermals neue Parameter zur Darstellung der letztern einführen wollte.

Eliminirt man x und y aus der rechts auf 0 gebrachten Gleichung, so resultirt $0 = 0$, woraus zu erkennen ist, dass c vollkommen willkürlich gegeben werden kann. Die Gleichung lautet:

$$c(xy + x_1y_1) + c_1(xy_1 + x_1y) = 0.$$

Das systematische Verfahren führt (ebenfalls) hier zum Zirkel:

Nach dem vollen Schema wird man unschwer die Darstellungen gewinnen:

$$x = c\beta_1 + c_1\beta, \quad y = c\alpha_1 + c_1\alpha$$

(in Bestätigung von Jevons' Theorem) und müssen dann aber, damit die

Probe stimme, die Parameter selbst wieder die Relation $\alpha\beta_1 + \alpha_1\beta = c$ erfüllen.

Nach dem gekürzten Schema erhielte man:

$$x = \alpha(c\beta_1 + c_1\beta), \qquad y = \beta(c\alpha_1 + c_1\alpha),$$

wo α, β dann die Gleichung erfüllen müssten:

$$c(\alpha\beta_1 + \alpha_1\beta) = c, \quad \text{oder} \quad c(\alpha\beta + \alpha_1\beta_1) = 0,$$

welche aufzulösen wenigstens nicht leichter ist, als die ursprüngliche Aufgabe.

Um nun aus diesem Zirkel herauszukommen, nehmen wir die Unbekannten nach c entwickelt an:

$$x = \alpha c_1 + \beta c, \qquad y = \gamma c_1 + \delta c$$
$$x_1 = \alpha_1 c_1 + \beta_1 c, \qquad y_1 = \gamma_1 c_1 + \delta_1 c$$

und machen mit diesen Werten die Probe; es muss dann:

$$c_1(\alpha\gamma_1 + \alpha_1\gamma) + c(\beta\delta_1 + \beta_1\delta) = c$$

werden, d. h.:

$$c_1(\alpha\gamma_1 + \alpha_1\gamma) = 0 \quad \text{und} \quad c(\beta\delta + \beta_1\delta_1) = 0.$$

Diesen Forderungen genügen wir (zwar für ein gegebenes c keineswegs auf die allgemeinste Weise, immerhin jedoch in einer für alle c zutreffenden Weise), indem wir:

$$\alpha\gamma_1 + \alpha_1\gamma = 0 \quad \text{und} \quad \beta\delta + \beta_1\delta_1 = 0$$

selbst machen, womit sich

$$\gamma = \alpha \quad \text{und} \quad \delta = \beta_1$$

bestimmt. Einsetzung dieser Werte führt uns nunmehr zu den *Darstellungen der Wurzeln:*

$$x = \alpha c_1 + \beta c, \qquad x_1 = \alpha_1 c_1 + \beta_1 c$$
$$y = \alpha c_1 + \beta_1 c, \qquad y_1 = \alpha_1 c_1 + \beta c,$$

von welchen in der That erweislich ist, dass sie unser Problem lösen.

Einerseits stimmt (wie gezeigt) die Probe.

Andererseits genügen sie den Forderungen der Symmetrie: durch Vertauschung von β mit β_1 gehen x und y ineinander über — während durch Vertauschung von α, β mit α_1, β_1 auch x, y in x_1, y_1, und umgekehrt, übergeht.

Endlich aber — und dies muss hier noch besonders nachgewiesen werden — sind die Lösungen auch die allgemeinsten: Für die Annahmen:

$$\alpha = xy, \quad \beta = xy_1 \text{ (oder auch } x + y_1), \quad c = xy_1 + x_1 y$$

werden in der That die Gleichungen zu analytischen, identisch in x, y erfüllten. Bei geeigneter Bestimmung der Parameter α, β werden also unsre Ausdrücke für die Unbekannten auch jedes gewünschte, die vor-

gelegte Gleichung erfüllende Wertepaar x, y darzustellen im stande sein, q. e. d. —

Selbstredend können solche Parameterwerte, welche dieses leisten, wie soeben die für α und β angegebenen, auch systematisch aufgefunden werden, indem man unsre die Wurzeln darstellenden Gleichungen mit der ursprünglichen Gleichung des Problems „vereinigt“ und nach den Unbekannten α, β auflöst. Es genügt dann aber für diese nur irgend ein System von Partikularlösungen zu entdecken, wobei man denjenigen vom einfachsten Ausdrucke den Vorzug geben wird.

Zur Übung für den Studirenden führen wir noch folgende beiden Aufgaben mit ihren Lösungen ohne weitere Bemerkung an.

Aufgabe 13. Die Gleichung:

$$xy = a$$

nach x und y symmetrisch allgemein zu lösen.

Auflösung: $x = a + \alpha\beta_1$, $y = a + \alpha_1\beta$.

Aufgabe 14. Das Gleichungenpaar:

$$xy = a, \quad x_1 y_1 = b$$

symmetrisch allgemein zu lösen.

Auflösung. Es müssen a und b die Voraussetzung:

$$ab = 0$$

erfüllen, womit sich: $a = \alpha\beta_1$, $b = \alpha_1\beta$ ergibt. Alsdann sind:

$$x = a + \gamma b_1, \quad x_1 = b + \gamma_1 a_1$$
$$y = a + \gamma_1 b_1, \quad y_1 = b + \gamma a_1$$

die gesuchten Lösungen. Um *gegebene* x, y zu erhalten, braucht man blos $\gamma = xy_1$ oder auch $\gamma = x + y_1$ (oder irgendwie dazwischen) zu nehmen.

Wir gehen nunmehr zu einer letzten und Hauptaufgabe über.

Aufgabe 15. *Die allgemeinste Gleichung mit zwei Unbekannten x, y:*

$$axy + bxy_1 + cx_1y + dx_1y_1 = 0$$

— kürzer: $F = 0$ — *soll nach diesen symmetrisch allgemein gelöst werden.*

Auflösung. Durch Elimination von x, y resultirt zwischen den Koeffizienten der Gleichung die Relation:

$$abcd = 0$$

und diese ist zunächst identisch zu erfüllen, indem man gemäss Aufgabe 3 für jene Koeffizienten in unabhängigen Parametern die Ausdrücke nimmt:

$$\begin{aligned} a &= \alpha(\beta_1 + \gamma_1 + \delta_1), & a_1 &= \alpha_1 + \beta\gamma\delta, \\ b &= \beta(\alpha_1 + \gamma_1 + \delta_1) & &\text{etc.} \\ c &= \gamma(\alpha_1 + \beta_1 + \delta_1) \\ d &= \delta(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1). \end{aligned}$$

Obwol wir uns unter den Koeffizienten fortan diese Ausdrücke vorzustellen haben werden, ziehen wir der Einfachheit wegen vor, doch die alten Namen a, b, c, d für dieselben beizubehalten.

Schon in § 22 unter β) und γ) haben wir die Gleichung $F = 0$ nach x resp. nach y geordnet angeschrieben und aus dem Anblick dieser Darstellungen fliessen — nach dem vollen Schema unsrer Methode — die Gleichungen:

$$x = x(a_1 y + b_1 y_1) + x_1(cy + dy_1),$$
$$y = (a_1 x + c_1 x_1)y + (bx + dx_1)y_1,$$

deren jede mit der aufzulösenden $F = 0$ äquivalent sein wird.

Systematisch zuwerke gehend ersetzen wir rechts in ihnen die Namen x, y der Unbekannten durch unbestimmte Parameter μ, ν. Ordnen wir auch sogleich nach diesen, so ergeben sich die Ausdrücke, neben welche wir diejenigen für ihre Negationen schreiben:

$$x = a_1\mu\nu + b_1\mu\nu_1 + c\mu_1\nu + d\mu_1\nu_1, \qquad x_1 = a\mu\nu + b\mu\nu_1 + c_1\mu_1\nu + d_1\mu_1\nu_1,$$
$$y = a_1\mu\nu + b\mu\nu_1 + c_1\mu_1\nu + d\mu_1\nu_1, \qquad y_1 = a\mu\nu + b_1\mu\nu_1 + c\mu_1\nu + d_1\mu_1\nu_1.$$

Hiermit sind nun leicht die vier Produkte zu bilden:

$$xy = a_1\mu\nu + d\mu_1\nu_1, \qquad xy_1 = b_1\mu\nu_1 + c\mu_1\nu,$$
$$x_1 y = b\mu\nu_1 + c_1\mu_1\nu, \qquad x_1 y_1 = a\mu\nu + d_1\mu_1\nu_1,$$

deren Einsetzung in $F = 0$ uns die Bedingung liefert:

$$ad(\mu\nu + \mu_1\nu_1) + bc(\mu\nu_1 + \mu_1\nu) = 0,$$

welche einzig noch von μ, ν zu erfüllen ist.

Der Versuch, die Gleichung so, wie die obige, systematisch nach den Unbekannten μ, ν aufzulösen, führt im Zirkel herum — wie auch schon a priori zu sehen ist, in Anbetracht, dass die Gleichung ungeändert bleibt, wenn man in ihr (dem Vorbild entsprechend, das sie mit $F = 0$ zusammengehalten darbietet) das a sowol als das d durch ad, zugleich das b und das c durch bc ersetzt.

Indessen kommt man hier unschwer zum Ziele durch die Bemerkung, dass wenn

$$\mu\nu_1 + \mu_1\nu = \varrho \quad \text{genannt wird, sich} \quad \mu\nu + \mu_1\nu_1 = \varrho_1$$

dazu ergibt, wonach die zu erfüllende Gleichung lautet:

$$ad\varrho_1 + bc\varrho = 0.$$

Dieser wird auf die allgemeinste Weise vermittelst des Ansatzes (cf. Th. 50):

$$\varrho = ad\bar{\omega}_1 + (b_1 + c_1)\omega, \qquad \varrho_1 = (a_1 + d_1)\omega_1 + bc\bar{\omega}$$

— worin die überstrichenen Faktoren auch unterdrückt werden dürften — zu genügen sein, und wenn man darnach

$$\mu = \varkappa\varrho_1 + \lambda\varrho, \qquad \mu_1 = \varkappa_1\varrho_1 + \lambda_1\varrho$$
$$\nu = \varkappa\varrho_1 + \lambda_1\varrho, \qquad \nu_1 = \varkappa_1\varrho_1 + \lambda\varrho$$

nimmt, wie sich dies nach den in Aufgabe 12 gewonnenen Schemata für die symmetrisch allgemeine Auflösung der Gleichung

$$\mu\nu_1 + \mu_1\nu = \varrho$$

nach den Unbekannten μ, ν (bei gegebenem ϱ) ergibt, so wird unser Problem gelöst sein.

Es erübrigt nur mehr die Werte von μ, ν, oder besser sogleich die Produkte:

$$\mu\nu = \varkappa\varrho_1, \quad \mu\nu_1 = \lambda\varrho, \quad \mu_1\nu = \lambda_1\varrho, \quad \mu_1\nu_1 = \varkappa_1\varrho_1$$

nebst den gefundenen Werten von ϱ, ϱ_1 in die letzten Ausdrücke von x, y einzusetzen. Nach ϱ geordnet wird zunächst:

$$x = (a_1\varkappa + d\varkappa_1)\varrho_1 + (b_1\lambda + c\lambda_1)\varrho, \quad x_1 = (a\varkappa + d_1\varkappa_1)\varrho_1 + (b\lambda + c_1\lambda_1)\varrho,$$
$$y = (a_1\varkappa + d\varkappa_1)\varrho_1 + (b\lambda + c_1\lambda_1)\varrho, \quad y_1 = (a\varkappa + d_1\varkappa_1)\varrho_1 + (b_1\lambda + c\lambda_1)\varrho$$

und hieraus fliessen bei Unterdrückung jener überstrichenen ω-Faktoren wol die konzisestmöglichen Ausdrücke für die *„Wurzeln" der vorgelegten Gleichung:*

$$x = bc(a_1\varkappa + d\varkappa_1) + ad(b_1\lambda + c\lambda_1) + a_1(d + \varkappa)\omega_1 + b_1(c + \lambda)\omega,$$
$$y = bc(a_1\varkappa + d\varkappa_1) + ad(b\lambda + c_1\lambda_1) + a_1(d + \varkappa)\omega_1 + c_1(b + \lambda_1)\omega,$$
$$x_1 = bc(a\varkappa + d_1\varkappa_1) + ad(b\lambda + c_1\lambda_1) + d_1(a + \varkappa_1)\omega_1 + c_1(b + \lambda_1)\omega,$$
$$y_1 = bc(a\varkappa + d_1\varkappa_1) + ad(b_1\lambda + c\lambda_1) + d_1(a + \varkappa_1)\omega_1 + b_1(c + \lambda)\omega,$$

worin $\varkappa$, λ, ω unabhängig beliebige Parameter vorstellen.

Direkt dürfte hier nicht ganz leicht zu sehen sein, dass die beiden letzten Ausdrücke wirklich die (korrekt gebildeten) Negationen für die ersten beiden sind. Übersehbar wird dies erst, nachdem man die Ausdrücke nach den drei Parametern entwickelt haben wird, was auch zum Ausmultipliziren derselben behufs Probens der Auflösungen die bequemste Form gibt. Man findet:

$$x = \{(a_1 + b_1d)\varkappa\lambda + (a_1 + cd)\varkappa\lambda_1 + d(a_1 + b_1)\varkappa_1\lambda + d(a_1 + c)\varkappa_1\lambda_1\}\omega_1 +$$
$$+ \{(b_1 + a_1c)\varkappa\lambda + c(a_1 + b_1)\varkappa\lambda_1 + (b_1 + cd)\varkappa_1\lambda + c(b_1 + d)\varkappa_1\lambda_1\}\omega,$$
$$y = \{(a_1 + bd)\varkappa\lambda + (a_1 + c_1d)\varkappa\lambda_1 + d(a_1 + b)\varkappa_1\lambda + d(a_1 + c_1)\varkappa_1\lambda_1\}\omega_1 +$$
$$+ \{b(a_1 + c_1)\varkappa\lambda + (c_1 + a_1b)\varkappa\lambda_1 + b(c_1 + d)\varkappa_1\lambda + (c_1 + bd)\varkappa_1\lambda_1\}\omega;$$

$$x_1 = \{a(b + d_1)\varkappa\lambda + a(c_1 + d_1)\varkappa\lambda_1 + (d_1 + ab)\varkappa_1\lambda + (d_1 + ac_1)\varkappa_1\lambda_1\}\omega_1 +$$
$$+ \{b(a + c_1)\varkappa\lambda + (c_1 + ab)\varkappa\lambda_1 + b(c_1 + d_1)\varkappa_1\lambda + (c_1 + bd_1)\varkappa_1\lambda_1\}\omega,$$
$$y_1 = \{a(b_1 + d_1)\varkappa\lambda + a(c + d_1)\varkappa\lambda_1 + (d_1 + ab_1)\varkappa_1\lambda + (d_1 + ac)\varkappa_1\lambda_1\}\omega_1 +$$
$$+ \{(b_1 + ac)\varkappa\lambda + c(a + b_1)\varkappa\lambda_1 + (b_1 + cd_1)\varkappa_1\lambda + c(b_1 + d_1)\varkappa_1\lambda_1\}\omega.$$

Die Probe, dass, $abcd = 0$ vorausgesetzt, identisch:

$$axy = 0, \quad bxy_1 = 0, \quad cx_1y = 0 \quad \text{und} \quad dx_1y_1 = 0$$

wird, stimmt — was eine Anzahl leichter Rechenexempel liefert, indem man immer nur die *gleichstelligen* Koeffizienten aus den entsprechenden zwei Zeilen zu verknüpfen braucht. Mit Rücksicht auf die Symmetrieverhältnisse brauchte übrigens nur eine von diesen vier Gleichungen auf ihre Richtigkeit geprüft zu werden, wofern die letztere diesmal nicht schon aus der Herleitung erhellte.

Auf Grund der Relation $abcd = 0$ kann man bemerken, dass die folgenden unter den obigen Koeffizienten mit den ihnen rechts gleichgesetzten äquivalent sind:

$$a_1 + b_1d = a_1 + d(b_1 + c), \qquad d(a_1 + c) = d(a_1 + b_1c),$$
$$b_1 + a_1c = b_1 + c(a_1 + d), \qquad c(b_1 + d) = c(b_1 + a_1d),$$
$$a_1 + c_1d = a_1 + d(b + c_1), \qquad d(a_1 + b) = d(a_1 + bc_1),$$
$$c_1 + a_1b = c_1 + b(a_1 + d), \qquad b(c_1 + d) = b(c_1 + a_1d).$$

Ersetzte man jene durch diese, desgleichen ihre Negationen wo sie auftreten durch diejenigen der rechten Seite, so ist es, um alles vollends in den unabhängigen Parametern ausgedrückt zu erhalten, nur mehr erforderlich, dass man die lateinischen Buchstaben a, b, c, d *durchweg* in die griechischen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ verwandle.

Was die Anforderungen der Symmetrie betrifft, so geht die Gleichung $F = 0$ ausschliesslich in sich selbst über durch die folgenden Vertauschungen („Transpositionen") links vom Vertikalstrich:

1°)	$(x, y)\,(x_1, y_1)\,(b, c)$	(λ, λ_1)
2°)	$(x, y_1)\,(x_1, y)\,(a, d)$	$(\varkappa, \varkappa_1)$
3°)	$(x, x_1)\,(a, c)\,(b, d)$	$(\varkappa, \lambda_1)\,(\lambda, \varkappa_1)\,(\omega, \omega_1)$
4°)	$(y, y_1)\,(a, b)\,(c, d)$	$(\varkappa, \lambda)\,(\varkappa_1, \lambda_1)\,(\omega, \omega_1)$
5°)	$(x, x_1)\,(y, y_1)\,(a, d)\,(b, c)$	$(\varkappa, \varkappa_1)\,(\lambda, \lambda_1)$

Dieselben, verbunden mit den rechts vom Vertikalstrich daneben gesetzten Vertauschungen zwischen den Parametern, führen auch das System der vier für x, y, x_1, y_1, angegebenen Lösungen nur in sich selbst zurück. Da aus denen 1°) und 3°) die übrigen Vertauschungen alle ableitbar sind, so braucht dies nur für jene beiden wirklich nachgesehen zu werden.

Den Forderungen der Symmetrie ist also durch unsre Lösungen durchaus Genüge geleistet.

Es ist nunmehr nur noch die Frage zu erledigen, wie etwa die Parameter $\varkappa$, λ, ω anzunehmen sind, damit unsre Formeln für die Wurzeln ein *gegebenes* Wertepaar x, y darstellen, das übrigens die Gleichung $F = 0$ erfüllt.

Nach dem Hülfstheorem des Paragraphen — vergl. auch § 21, ω) — ist es zu dem Ende ausreichend $\mu = x$, $\nu = y$ selbst zu machen, desgleichen $\omega = \varrho$ selbst zu nehmen, und nach dem in Aufgabe 12 Ermittelten werden die Annahmen $\varkappa = \mu\nu$ nebst $\lambda = \mu\nu_1$ (oder auch $\mu + \nu_1$) zum Ziele führen. Darnach werden wir in Gestalt von:

$$\varkappa = xy, \quad \lambda = xy_1 \text{ (oder auch } x + y_1\text{)}, \quad \omega = xy_1 + x_1y$$

ein System von Annahmen haben, welches in einfacher Weise unsre Formeln für x, y zu solchen macht die sich als blosse Umformungen der Gleichung $F = 0$ herausstellen, auf Grund von dieser sich identisch bewahrheiten. Die Rechnung bestätigt dies in der That direkt; man wird dazu am besten die konzisesten Ausdrücke von x, y nehmen und auch die aus $F = 0$ durch Elimination von x oder y sich ergebenden beiden Relationen β'), γ') des § 22 dabei berücksichtigen.

Die vorstehend gelösten Aufgaben liefern begreiflicherweise uns auch ebensoviele Eliminationsprobleme: eliminirt man aus ihren Lösungen, resp. den die Wurzeln darstellenden Gleichungen, sämtliche unabhängigen Parameter (also griechischen Symbole), so kann man sich überzeugen, dass als Resultante hervorgeht die ursprünglich zur Auflösung vorgelegt gewesene Gleichung, und zwar *gerade nur diese* aber keine weitergehende Relation zwischen den Unbekannten (und Koeffizienten) — was als eine Kontrole für die Richtigkeit unsrer Betrachtungen dient.

Dies auch bei Aufgabe 15 durchzuführen, ist leicht, obschon ein wenig mühsam.

Eliminirt man hier erst $\varkappa$ und λ ohne ω, so zeigt sich, dass ω diesmal kein Luxus-Parameter ist, wie bei den Aufgaben 1 bis 4, wo es, selbst bei *gegebenen* $x, y, \ldots$, noch beliebig spezialisirt, gleich 0 oder 1 z. B. genommen werden konnte. Vielmehr muss diesmal ω eine als Resultante der Elimination von $\varkappa$, λ sich ergebende Relation erfüllen, welche — mit Rücksicht auf die Endresultante $F = 0$ — in der einfachen Gestalt geschrieben werden kann:

$$(a_1 + d_1)(xy_1 + x_1y)\omega_1 + (b_1 + c_1)(xy + x_1y_1)\omega = 0.$$

Nur insofern die Werte von x, y als erst durch die Gleichung

$F = 0$ bestimmt gelten sollen, wird gleichwie $\varkappa$ und λ, so auch ω willkürlich, werden alle dreie wirklich *unabhängige* Parameter sein. —

Aus Vorstehendem wird der Studirende schon inne geworden sein, dass in unsrer Disziplin noch eine Fülle von Problemen der Lösung harrt. Ich signalisire (ausser den Aufgaben 10 und 11) insbesondere: die symmetrisch allgemeine Auflösung der allgemeinsten Gleichung mit *drei* Unbekannten. Ferner: die Ergänzung der Methode zu einer solchen, die in allen Fällen unfehlbar zum Ziele führt — oder andernfalles: der Nachweis, dass in gewissen Fällen die Aufgabe unlösbar ist, nebst der vollständigen Angabe, in welchen Fällen eben ihre Lösung unmöglich bleibt.

In Anbetracht, dass wir bei der Darstellung *zweier* Unbekannten mittelst unabhängiger Parameter in Aufgabe 14 mit *einem* solchen auskamen, in Aufgabe 12 deren *zweie* und in Aufgabe 15 deren *dreie* benötigten, reihen weiter hieran sich Fragen nach der Minimalanzahl der bei jedem Probleme erforderlichen selbständigen Parameter, und anderes mehr.*)

Dies alles schon bei demjenigen Teile unsrer Disziplin, der (nächst dem Aussagenkalkul) als der vollendetste, ja als *im wesentlichen* vollendet hingestellt werden darf! Betreffen ja doch die eben charakterisirten Forderungen nur noch die Art und Weise, nur mehr die Ausdrucksformen einer Lösung, die schon gegeben wurde. —

Des weiteren vergleiche man noch den Anhang 6, welcher (etwa mit den Schlussbetrachtungen des Anhang 4 verschmolzen) auch als eine selbständige, den andern ebenbürtige Vorlesung in die Theorie hätte aufgenommen werden können. Dass ich ihn als eine solche nicht einreihte, geschah hauptsächlich deshalb, weil in ihm das *numerische* Element der Logik in einem Grade hervortritt, welcher mit der auf dessen Ausschluss gerichteten Tendenz des Buches nicht ganz im Einklang sich befindet. —

*) Z. B. noch: Wir stiessen auf Ausdrücke, wie bei Aufgabe 9 auf

$$bc + a_1(b + c),$$

deren Negation einfach erhalten wird, indem man sämtliche einfachen Symbole, welche im Ausdruck vorkommen, in ihre Negationen umwandelt. — Beantwortung der Frage: welches sind die Ausdrücke, die diese Eigenschaft haben müssen und allein haben können? Welches sind erschöpfend die zu sich selbst dualen Formeln des Kalkuls? Etc.

Dreizehnte Vorlesung.

§ 25. Anwendungsbeispiele und Aufgaben.

Als einfachste Anwendungen der Theorie läge es nunmehr nahe, etwa die sogenannten *„unmittelbaren Folgerungen"* und alsdann die *Syllogismen* der schulmässigen Logik vorzunehmen. Dies könnten wir auch leicht, insoweit nur *universale* Prämissen und Konklusionen in Betracht zu ziehen sind.

Aufgaben aber, bei welchen *partikulare* Urteile mit in Betracht kommen, müssen wir als um einen Grad schwieriger bezeichnen. Bei der Unbestimmtheit des Zahlworts „einige" ist dies auch begreiflich. Es stellt sich heraus, dass die Behandlung solcher Aufgaben, selbst wenn sie in ihrer Art noch so einfach angelegt erscheinen, für die bisherige schon leidlich in sich abgeschlossene Theorie zumeist*) *noch gar nicht erreichbar* ist (vergl. § 33). Und so könnte von den angedeuteten Problemen doch nur ein unbedeutender Bruchteil zur Zeit erledigt werden — Grund für uns, das ganze Unternehmen zu verschieben.

Wir beschäftigen uns darum hiernächst nur mit solchen Aufgaben, wie sie unsrer Theorie prinzipiell schon zugänglich sind — mögen dieselben in ihrer Art auch erheblich verwickelter erscheinen als wie die oben angedeuteten. Dabei wird ähnlich, wie in der Mathematik verfahren, wo man z. B. auch die komplizirtesten Aufgaben über quadratische Gleichungen bewältigen lernen wird, bevor man sich mit der einfachsten kubischen Gleichung abgibt. Durch jeweilige „Beschränkung" auf bestimmte abgegrenzte Gebiete ist allein die „Meister"schaft zu erlangen.

Wir stellen demnach eine Reihe von Problemen und Untersuchungen hier zusammen. In erster Linie sollen diese zur *Erläuterung* dienen für die bisher entwickelten allgemeinen Methoden. Auch mögen sie als *Übungsbeispiele* angesehen werden, um die Bethätigung ebendieser Methoden beim Studirenden anzubahnen. Zum Teil sollen diese Beispiele später auch als Prüfsteine verwendet werden, um an ihnen vergleichende Betrachtungen über diese und noch andere fernerhin auseinanderzusetzende Auflösungsmethoden anzustellen. Alle können sie dazu dienen, die Kraft der rechnerischen Methode gegenüber den herkömmlichen schulmässig verbalen Über-

*) Ausgenommen sind nur diejenigen Fälle, wo durchweg — beim Problem und seiner Lösung — das „einige a" im selben Sinne verstanden werden muss, sodass es als Klasse von vornherein mit a' bezeichenbar, in Bezug auf welches dann die Aufgabe von universalem Charakter wäre.

legungsweisen in's rechte Licht zu setzen, jene als die überlegene zu erproben.

Dagegen wolle man diesen Beispielen nicht etwa die Bestimmung zuschreiben, dass sie den *Nutzen* unsrer Kunstlehre des Denkens — vielleicht für das praktische Leben — darzuthun hätten.*) Utilitarische Bestrebungen liegen uns nach wie vor ferne und setzen wir voraus, dass auch der Leser von dem wissenschaftlichen Interesse geleitet sei.

Ich gebe die Aufgaben nicht etwa peinlich nach ihrer Schwierigkeit geordnet. Der Studirende, welcher mit den leichtesten beginnen und von diesen allmälig aufsteigend zu den verwickelteren fortschreiten will („schwierige" gibt es eigentlich unter den bisherigem Kalkul überhaupt zugänglichen Problemen, nachdem derselbe so weit entwickelt ist, nicht mehr) braucht sich nur zuerst an diejenigen zu machen, welchen der geringste Druckumfang gewidmet ist, und bei denen sich am wenigsten Formelanhäufungen dem Auge darbieten!

Ich beginne vielmehr mit jener komplizirtesten der von Boole gestellten Aufgaben, welche ich erstmalig in[2] nach seiner geläuterten Methode behandelt habe und auch hier mit allen Zwischenrechnungen durchnehme — weil mir dieselbe jenen oben angedeuteten Zwecken der Methodenerläuterung und später auch -vergleichung am vielseitigsten und besten zu dienen fähig erscheint.

1. Aufgabe. (Boole[4] p. 146 .. 149.) Es werde (gemäss Boole) angenommen**), dass die Beobachtung einer Klasse von Erscheinungen (Natur- oder Kunsterzeugnissen, z. B. Substanzen) zu den folgenden allgemeinen Ergebnissen geführt hat:

α) Dass in welchem auch von diesen Erzeugnissen die Merkmale A und C gleichzeitig fehlen, das Merkmal E gefunden wird, zusammen mit einem der beiden Merkmale B und D, aber nicht mit beiden.

β) Dass, wo immer die Merkmale A und D in Abwesenheit von E gleichzeitig auftreten, die Merkmale B und C entweder beide sich vorfinden oder beide fehlen.

γ) Dass überall, wo das Merkmal A mit dem B oder E, oder mit beiden zusammen besteht, auch entweder das Merkmal C vorkommt oder das D, aber nicht beide. Und umgekehrt, überall wo von den Merkmalen C und D das eine ohne das andre wahrgenommen wird, da soll auch

*) Dafür sind sie meistens zu künstlich ersonnen. Zum Teil werden die Aufgaben *mehr* nur mit Scherzrätseln, Vexiraufgaben, Spielproblemen verwandt erscheinen.

**) Über die Zulässigkeit (in gewissem Sinne Unzulässigkeit) dieser Annahme vergleiche die unten folgende „Anmerkung" zur Aufgabe.

das Merkmal A in Verbindung mit B oder mit E oder mit beiden zugleich auftreten.

Verlangt sei

erstens dass ermittelt werde, was in jedem gegebenen Falle aus der erwiesenen Gegenwart des Merkmals A in Bezug auf die Merkmale B, C und D geschlossen werden kann,

zweitens auch zu entscheiden, ob irgendwelche Beziehungen unabhängig von der An- oder Abwesenheit der übrigen Merkmale bestehen zwischen derjenigen der Merkmale B, C, D (und bejahendenfalles welche?),

drittens in ähnlicher Weise zu beantworten, was aus dem Vorhandensein des Merkmals B folgt in Bezug auf die Merkmale A, C und D (sowie umgekehrt, wann aus An- oder Abwesenheit von Merkmalen dieser letzteren Gruppe auf diejenige von B geschlossen werden kann),

viertens zu konstatiren, was für die Merkmale A, C, D an sich folgt.

Auflösung. Die ganze Klasse der Fälle von Erscheinungen, resp. die Klasse der Erzeugnisse, in welchen sich eines der Merkmale A, B, C, D, E vorfindet, werde mit dem entsprechenden Buchstaben des kleinen lateinischen Alphabets bezeichnet.*) Bedeutet sonach a die Klasse der Fälle in welchen das Merkmal A vorliegt, so wird a_1 die Klasse derjenigen Fälle bedeuten, in welchen dieses Merkmal A fehlt, etc.

Nach dem in den Paragraphen 8 und 16 über die Interpretation des identischen Kalkuls für Klassen Gesagten — vergl. auch § 18, ε) ... ϑ) übersetzen sich im engsten Anschluss an den Worttext die Data α), β), γ) unseres Problems bezüglich in die nachstehenden Propositionen (Subsumtionen resp. Gleichungen):

$$\delta)\quad a_1 c_1 \Subset (bd_1 + b_1 d)\, e, \qquad ade_1 \Subset bc + b_1 c_1, \qquad a\,(b + e) = cd_1 + c_1 d.$$

Die Gleichung erhält man eigentlich zuerst als Subsumtion vor und rückwärts gelesen, nämlich als

$$a\,(b + e) \Subset cd_1 + c_1 d \quad \text{nebst} \quad cd_1 + c_1 d \Subset a\,(b + e),$$

was aber nach Def. (1) der Gleichheit sofort eben in die Gleichung zusammenzuziehen ist.

Man bemerkt nun, dass in jedem unsrer drei Data α), β), γ) die

*) Für unser a, b, c, d, e verwenden Boole und Einige der nach ihm das Problem Behandelnden bezüglich: x, y, z, w, v.

bezüglich der Merkmale A, B, C, D gegebene Auskunft verquickt erscheint mit einem andern Element E, über welches wir in den verlangten Schlussfolgerungen nichts zu sagen wünschen.

Es wird deshalb in erster Linie erforderlich sein, das dem Merkmal E entsprechende Klassensymbol e zu eliminiren aus dem System der Propositionen δ), in welches wir die Data eingekleidet haben.

Zu dem Ende bringen wir dieselben rechts auf Null — nach dem Schema der Theoreme $38_\times$) und 39_+) — und bilden gemäss Th. 20_+) — ihre „vereinigte Gleichung", indem wir, statt jeder einzelnen, sogleich die Summe ihrer linken Seiten gleich Null setzen. Dabei ist lediglich Sorge zu tragen, dass man die Negationen der vorkommenden Ausdrücke richtig ansetze, mit Rücksicht namentlich auf Th. 36) und 46_+). Die vereinigte Gleichung lautet:

$$\varepsilon)\quad a_1c_1(bd+b_1d_1+e_1)+ade_1(bc_1+b_1c)+a(b+e)(cd+c_1d_1)+(a_1+b_1e_1)(cd_1+c_1d)=0.$$

Die Resultante der Elimination von e besteht nun nach § 21, ι) aus dem von e und e_1 freien Gliede im Polynome dieser Gleichung:

$$a_1c_1\,(bd+b_1d_1)+ab\,(cd+c_1d_1)+a_1\,(cd_1+c_1d),$$

dessen erster Term a_1c_1bd noch in dem letzten a_1c_1d nach dem Absorptionsgesetze 23_+) eingeht, vermehrt um das Produkt der Koeffizienten, welche e und e_1 in ε) besitzen — das Ganze gleich 0 gesetzt.

Der Koeffizient von e ist aber: $a\,(cd+c_1d_1)$, der von e_1 ist desgleichen leicht aus ε) herauszulesen als:

$$a_1c_1+ad\,(bc_1+b_1c)+b_1\,(cd_1+c_1d);$$

das Produkt beider ist gleich:

$$adb_1c\,^{*)},$$

mithin die Resultante:

$$a_1\,(cd_1+c_1d+b_1c_1d_1)+a\,(bcd+bc_1d_1+b_1cd)=0,$$

oder durch Zusammenziehung zweier Terme:

$$\zeta)\qquad a\,(cd+bc_1d_1)+a_1\,(cd_1+c_1d+b_1c_1d_1)=0.$$

Diese schon recht übersichtliche Gleichung hat nun den Ausgangspunkt für unsere weiteren Betrachtungen zu bilden.

Man bemerkt zunächst, dass, betrachtet als „entwickelt" nach den Argumenten c und d, die Koeffizienten von a und a_1 in ζ) geradezu die Negationen von einander sind, meinem Theorem 46_+) gemäss

---

*) Miss Ladd hat[1] p 58 darauf aufmerksam gemacht, dass Herr Wundt[1] p. 356 sq., indem er die auf b bezüglichen Schlüsse zieht, dieses Glied zufällig auslässt, weshalb dieselben falsch ausfielen; ich finde: nur unvollständig.

gebildet.*) Das Produkt dieser beiden Koeffizienten sowol als auch dasjenige ihrer beiden Negationen ist demnach gleich Null.

Um die *zweite* der gestellten Fragen zu beantworten und zugleich die Beantwortung der *ersten* Frage vorzubereiten, müssen wir jetzt a aus ζ) eliminiren. Dem Gesagten zufolge führt diese Elimination aber auf die Identität $0 = 0$, womit in Beantwortung jener *zweiten* Frage bewiesen erscheint: *dass zwischen den Merkmalen B, C und D* für sich hinsichtlich ihrer An- oder Abwesenheit *keine unabhängige Beziehung besteht.*

Die Gleichung ζ) ist demnach äquivalent ihrer „Auflösung" nach a.

Weil indess, wie bemerkt, auch das Produkt der Negationen der Koeffizienten von a und a_1 verschwindet, der eine Koeffizient die Negation des andern ist, muss hier der in § 21, σ) betrachtete Fall vorliegen: der in dem Ausdruck der Wurzel gemeinhin auftretende ein unbestimmtes Gebiet u enthaltende Term geht in den andern ein, die Gleichung hat nur *eine* Wurzel, die Unbekannte a ist durch die Gleichung eindeutig bestimmt, und zwar hat sie zum Ausdrucke den Koeffizienten ihrer Negation a_1 in der Gleichung, sodass ganz unmittelbar:

$$\eta) \qquad a = cd_1 + c_1d + b_1c_1d_1$$

als die gesuchte Auflösung nach a erhalten wird.

Dieselbe könnte nebenbei gesagt auch in den Formen angesetzt werden:

$$\vartheta) \quad a = cd_1 + c_1d + b_1c_1 = cd_1 + c_1d + b_1d_1 = cd_1 + c_1d + b_1(c_1 + d_1),$$

die unbedingt mit dem Ausdruck η) äquivalent sind, vergl. § 18, β_1).

Die Gleichung η) beantwortet nun die *erste* der gestellten Fragen, und zwar, indem wir sie als Subsumtion vor- und rückwärts interpretiren, dahin: *wo immer das Merkmal A zu finden ist, muss auch das Merkmal C oder das D vorliegen, aber nicht beide zugleich, oder aber es müssen beide zusammen mit dem Merkmal B fehlen;* umgekehrt: *Wo die Merkmale B, C, D alle drei fehlen, sowie auch, wo von den Merkmalen C, D das eine ohne das andere vorliegt, da muss auch das Merkmal A sich finden.*

---

*) Die Bemerkung des Herrn Peirce in [5] p. 42, Z. 5 v. o. dass die in Gleichung ζ) über a, b, c, d enthaltene Information sich in: $a + cd + bc_1d_1 = 1$ zusammenziehen lasse, beruht auf einem Versehen. Will man die Gleichung rechts auf 1 bringen, so hat man nur die Koeffizienten von a und a_1 auszutauschen, und eine einfachere Fassung als die nachherige η) oder ϑ) lässt sich der Aussage nicht geben.

Des weiteren muss nun b aus der Gleichung ζ) eliminirt werden. Da die Koeffizienten ac_1d_1 und $a_1c_1d_1$ von b und b_1 daselbst disjunkt sind, Null zum Produkte haben, so besteht die Resultante dieser Elimination einfach in der gleich 0 gesetzten Summe der von b und b_1 freien Glieder in ζ), d. h. sie lautet:

$$\iota)\qquad acd + a_1cd_1 + a_1c_1d = 0$$

— eine Gleichung, aus welcher die Antwort auf die *vierte* Frage nachher zu entnehmen sein wird.

Mit Rücksicht auf diese Relation ι) vereinfacht nun die Gleichung ζ) sich zu:

$$\varkappa)\qquad ac_1d_1b + a_1c_1d_1b_1 = 0$$

und gibt dieselbe dem Th. 50_+) gemäss regelrecht nach der Unbekannten b aufgelöst:

$$b = a_1c_1d_1 + v\,(ac_1d_1)_1 = a_1c_1d_1 + v\,(a_1 + c + d),$$

wobei v eine unbestimmte Klasse vorstellt. Hier lässt aber nach Th. 33_+) Zusatz der in v zu multiplizirende Term a_1 sich mit dem Faktor $(c + d)_1 = c_1d_1$ ausstatten und geht hernach das betreffende Glied $va_1c_1d_1$ im ersten Term der rechten Seite nach dem Absorptionsgesetze auf, sodass:

$$\lambda)\qquad b = a_1c_1d_1 + v\,(c + d)$$

als ein einfacherer Ausdruck für die gesuchte Auflösung nach b erscheint.

Behufs bequemster Deutung mittelst Worten werden wir dieses Ergebniss — dasselbe für $v = 0$ und $v = 1$ in Anspruch nehmend — umschreiben in die Doppelsubsumtion:

$$\mu)\qquad a_1c_1d_1 \Subset b \Subset a_1 + c + d,$$

die auch gemäss Th. 49_+) direkt aus $\varkappa$) herausgelesen werden konnte. Damit ist in Beantwortung der *dritten* Frage gefunden: *Wenn die Merkmale A, C und D gleichzeitig fehlen, so findet sich das Merkmal B.* und *wo das Merkmal B sich findet, da muss das Merkmal C oder auch das D vorliegen, wonicht A fehlt.*

Behufs Beantwortung der *vierten* Frage könnte man die Gleichung ι) direkt in Worte fassen wie folgt: *Die Merkmale A, C und D kommen nicht alle drei zusammen vor und wo das Merkmal A fehlt kann von den Merkmalen C und D das eine nicht ohne das andere auftreten.*

Etwas übersichtlicher vielleicht wird man die Gleichung ι) in ihre Auflösung nach a umschreiben mit der sie (weil Elimination von a blos auf $0 = 0$ führt) äquivalent sein muss. Diese Auflösung lautet:

$$\nu)\qquad a = cd_1 + c_1d + w\,(c_1 + d_1) = cd_1 + c_1d + wc_1d_1,$$

wo w unbestimmt ist — cf. Th. 33_+) nebst dem Absorptionsgesetze (behufs Rechtfertigung der letztvollzogenen Kürzung). Oder als Doppelsubsumtion geschrieben:

$$\xi)\qquad cd_1 + c_1 d \Subset a \Subset c_1 + d_1.$$

Sie lehrt, *dass aus der Anwesenheit von A geschlossen werden kann auf die Abwesenheit von wenigstens einem der beiden Merkmale C, D,* und umgekehrt, *dass wo von diesen letztern C und D das eine allein (ohne das andere) sich vorfindet, geschlossen werden kann auf die Anwesenheit von A.*

Zur Übung möge der Leser aus ζ) auch c durch a, b, d und d durch a, b, c ausdrücken und die Ergebnisse interpretiren — Aufgaben die auch Mc Coll sich gestellt. Man findet leicht als Eliminationsresultante, vereinfachte Gleichung und Lösung:

$$a_1 b_1 d_1 = 0, \qquad (ad + a_1 d_1)\, c + (abd_1 + a_1 d)\, c_1 = 0,$$

$$c = abd_1 + a_1 d + uad_1 \quad \text{oder} \quad abd_1 + a_1 d \Subset c \Subset ad_1 + a_1 d;$$

$$a_1 b_1 c_1 = 0, \qquad (ac + a_1 c_1)\, d + (abc_1 + a_1 c)\, d_1 = 0,$$

$$d = abc_1 + a_1 c + tac_1 \quad \text{oder} \quad abc_1 + a_1 c \Subset d \Subset ac_1 + a_1 c.$$

Anmerkung zur 1. Aufgabe.

Natürlich sind die Data unseres Problems auch mögliche und logisch zulässige; denn ihre vereinigte Gleichung ε) ist eine Relation, die keinen Widerspruch involvirt, die nach den Regeln des Kalkuls auf die im bisherigen Aussagengebiete *allein* absurde Behauptung $1 = 0$ nicht hinausläuft.

Unmöglich können aber diese Data, so wie Boole angibt, ganz durch *Beobachtung* (einer Klasse von Naturerzeugnissen) gewonnen worden sein, indem der in der Prämisse β) angeführte Fall ade_1, dass „wo immer die Merkmale A und D in Abwesenheit von E gleichzeitig auftreten“, kraft des Gesamtsystems dieser Prämissen, *überhaupt nie vorgekommen sein kann.*

Liest man nämlich aus der vereinigten Gleichung ε) diejenigen Glieder heraus, welche die Kombination ade_1 zum Faktor haben, indem man da, wo einer dieser Buchstaben a, d oder e — nennen wir ihn für den Augenblick x — unvertreten erscheint, sich den Faktor $1, = x + x_1$, hinzudenkt, so ergibt sich leicht als die Gesamtheit dieser Glieder:

$$ade_1\,(bc_1 + b_1 c) + abcde_1 + ab_1 c_1 de_1 =$$

$$= ade_1\,(bc + bc_1 + b_1 c + b_1 c_1) = ade_1 \cdot 1 = ade_1.$$

In der That ist also nach der vereinigten Gleichung selbst:

$$o)\qquad ade_1 = 0,$$

d. h. der Fall konnte niemals vorgekommen sein — ein Umstand, auf

welchen mich aufmerksam gemacht zu haben ich Herrn M. Badorff in Baden-Baden verdanke.

Das Boole'sche Problem ist darnach eigentlich als eine Vexiraufgabe zu bezeichnen, und um von diesem ihrem vexatorischen Charakter befreit zu sein, hätte die Aufgabe vielmehr etwa mit den Worten eingeleitet werden sollen: „Gesetzt durch Beobachtung einer Klasse von Erscheinungen *oder sonst auf irgend eine Weise* sei erkannt, dass ...".

2. Aufgabe von Herrn Venn[4] p. 487.

Die Mitglieder eines Aufsichtsrats (Verwaltungsrats, members of a board) a *sind entweder Obligationenbesitzer* b (bondholders) *oder aber Aktienbesitzer* c (shareholders) — d. h. also nicht beides zugleich. *Wenn nun die Obligationenbesitzer zufällig alle im Aufsichtsrat sind, was folgt in Bezug auf diese und die Aktienbesitzer* (die b und die c)?

Auflösung. Übersetzung der Data in die Zeichensprache liefert:

$$a \leftarrow\!\!\!\in bc_1 + b_1c, \qquad b \leftarrow\!\!\!\in a.$$

Aus diesem Prämissensystem ist a zu eliminiren. Die vereinigte Gleichung desselben lautet:

$$a\,(bc + b_1c_1) + a_1b = 0$$

und gibt regelrecht als die Resultante: $(bc + b_1c_1)\,b = 0$, oder:

$$bc = 0;$$

dies heisst: *kein Obligationenbesitzer ist Aktienbesitzer.*

Noch kürzer lässt die Elimination des a aus den beiden Prämissen sich hier unmittelbar nach Prinzip II ausführen, den Schluss liefernd:

$$b \leftarrow\!\!\!\in bc_1 + b_1c, \qquad \text{oder} \qquad b\,(bc + b_1c_1) = 0, \qquad bc = 0,$$

wie oben.

Auch die beste *allgemeine* Methode wird so in einzelnen Fällen durch besondre denselben angepasste Kunstgriffe sich oft nach Einfachheit der Lösung noch übertreffen lassen.

Herr Venn verwendete die obige Aufgabe zu einem Wettstreit zwischen einer „Klasse" von gut in der verbalen Logik geschulten Studirenden und einer andern in der rechnerischen Logik bewanderten — welcher eklatant zugunsten der letztern ausfiel.

3. Aufgabe. (Boole[4], p. 118 .. 120 und 128 .. 129.) Das Studium einer Klasse von Substanzen habe zu den Ergebnissen geführt: Treten die Merkmale a und b zusammen auf, so findet sich das Merkmal c oder aber das d. Treten b und c zusammen auf, so findet sich

sowol das Merkmal a, als das d, oder beide fehlen. Sooft die Merkmale a und b zusammen fehlen, fehlen auch die c und d, und umgekehrt. Gefragt, was ohne Rücksicht auf das Merkmal d von den übrigen ausgesagt werden kann.

Auflösung. Die Klasse der Substanzen, die ein bestimmtes Merkmal besitzt, möge für die Zwecke der Rechnung hier mit dem Namen des Merkmals selbst dargestellt werden. So fordern die Prämissen, dass:

$$ab \Subset cd_1 + c_1 d, \qquad bc \Subset ad + a_1 d_1, \qquad a_1 b_1 = c_1 d_1$$

sei. Aus diesen ist d zu eliminiren, die Resultante nach a oder b oder c aufzulösen, das Ergebniss mit Worten zu deuten. Vereinigte Gleichung des Prämissensystemes ist:

$$ab\,(cd + c_1 d_1) + bc\,(ad_1 + a_1 d) + a_1 b_1\,(c + d) + c_1 d_1\,(a + b) = 0.$$

Die Elimination von d erfordert den Ansatz:

$$a_1 b_1 c + (abc + a_1 bc + a_1 b_1)\,(abc_1 + abc + ac_1 + bc_1) = 0$$

zu dessen Herstellung man aus der vereinigten Gleichung blos herauszulesen braucht: das von d sowol als d_1 freie Glied, sodann die Koeffizienten, mit welchen d behaftet erscheint und endlich die Koeffizienten von d_1. Der erste Klammerfaktor zieht sich in $bc + a_1 b_1$, der zweite in $ab + ac_1 + bc_1$ zusammen, wonach leicht abc als das Produkt der beiden erkannt wird. Mithin ist unsre Resultante:

$$abc + a_1 b_1 c = 0.$$

Sie lehrt, dass die Merkmale a, b und c nie alle drei zusammen auftreten, auch in Abwesenheit von a und b das c nicht vorkommt.

Elimination irgend eines der drei Buchstaben a, b, c aus ihr führt auf: $0 = 0$ (z. B. des a auf $bc \cdot b_1 c = 0$). Die Resultante sagt demnach genau dasselbe, wie ihre Auflösung nach irgend einer dieser Unbekannten. Die Auflösungen sind, wenn u, v, w unbestimmte Klassen (von Substanzen) vorstellen, bezüglich:

$$a = b_1 c + u\,(b_1 + c_1) = b_1 c + u\,(b_1 c + c_1) = b_1 c + uc_1,$$

analog

$$b = a_1 c + vc_1 \quad \text{und endlich} \quad c = w\,(ab_1 + a_1 b),$$

oder in Form von Doppelsubsumtionen:

$$b_1 c \Subset a \Subset b_1 + c_1, \qquad a_1 c \Subset b \Subset a_1 + c_1, \qquad 0 \Subset c \Subset ab_1 + a_1 b.$$

Sie zeigen, dass wo in Abwesenheit von b das Merkmal c vorliegt, auch a sich finden muss; wo a sich findet aber b oder auch c notwendig fehlen wird. Desgleichen, a und b vertauscht. Endlich wo c

sich findet, da muss von den Merkmalen a und b das eine ohne das andere (muss *a oder aber b*) zugegen sein.

4. Aufgabe. (Jevons[9] p. 202.)

In einer Mannigfaltigkeit ist jedes Ding entweder ein b oder ein c, und jedes c ist ein b, wofern es nicht ein a ist. Zu beweisen, dass jedes a ein b sein muss.

Beweis. Prämissen sind: $1 \Subset b + c$ und $c \Subset b + a_1$. Sie geben die vereinigte Gleichung:

$$b_1 c_1 + a b_1 c = 0$$

aus welcher c zu eliminiren ist. Die Resultante lautet:

$$a b_1 = 0, \quad \text{oder also:} \quad a \Subset b$$

wie zu zeigen war.

5. Aufgabe — aus dem „Moral science tripos“ von Cambridge 1879, behandelt von Jevons[9] p. 206. Es stehe fest, dass jedes b, welches nicht d ist, entweder a sowol als c, oder weder a noch c ist: und ferner, dass kein c und kein d ein a und b zugleich sein kann.*) Zu beweisen, dass kein a ein b ist.

Beweis. Die Prämissen in Formeln eingekleidet lauten:

$$b d_1 \Subset a c + a_1 c_1, \qquad c \Subset (ab)_1, \qquad d \Subset (ab)_1,$$

und geben die vereinigte Gleichung:

$$(a c_1 + a_1 c)\, b d_1 + abc + abd = 0.$$

Elimination von d aus dieser gibt:

$$abc + ab\,(a c_1 + a_1 c) = 0, \quad \text{oder} \quad abc + abc_1 = 0,$$

und hieraus Elimination von c:

$$ab = 0,$$

d. h. kein a ist b, wie zu beweisen war.

6. Aufgabe. (McColl[3] p. 21.)

Es sollen x und y eliminirt werden aus den Prämissen:

$$a x_1 \Subset c + dy, \qquad bx \Subset c + dy + e, \qquad a_1 b_1 \Subset x + c + d c_1, \qquad a + b + c \Subset x + y.$$

*) In Gestalt von „neither c nor d is both a and b“ gibt Jevons (eventuell schon der Aufgabensteller) diesem letzten Teil der Aufgabe einen inkorrekten Ausdruck. Es müste heissen: „neither *any* c nor *any* d is ...“. Denn in der angegebenen Fassung wäre der Sinn unstreitig der, dass weder alle c, noch alle d, a und b zugleich sein könnten, und würde das Problem, nach den Methoden des § 41 behandelt, nicht die verlangte Konklusion, vielmehr nach Elimination des c und d nur die Resultante: $a_1 + b_1 \neq 0$ oder $ab \neq 1$ liefern, welche blos lehrt, dass es Dinge gibt, die nicht a und b zugleich sind.

Auflösung. In der vereinigten Gleichung:

$$ac_1x_1(d_1+y_1)+bc_1e_1x(d_1+y_1)+a_1b_1c_1(d_1+e)x_1+(a+b+c)x_1y_1=0$$

kommt y nur als y_1 in der Form $A+By_1=0$ vor, weshalb als Resultante der Elimination von y anzusetzen ist $A=0$, d. h. die Glieder, welche y_1 zum Faktor haben, sind einfach wegzulassen. Um aus dem Rückstande:

$$bc_1d_1e_1x+\{ac_1d_1+a_1b_1c_1(d_1+e)\}x_1=0$$

noch x herauszuwerfen, hat man alsdann das Produkt der beiden Koeffizienten gleich 0 zu setzen, welches augenscheinlich gibt:

$$abc_1d_1e_1=0, \quad \text{oder} \quad ab \neq\!\!\!\in c+d+e.$$

7. Aufgabe. (Boole[4] p. 237.)

Eine Anzahl Tuchmuster lieferte bei der Untersuchung folgende Regeln:

Jedes weiss (w) und grün (g) gestreifte Stück war auch schwarz (s) und gelb (e) gestreift und umgekehrt.

Jedes rot (r) und orange (a) gestreifte Stück war auch mit blau (b) und gelb gestreift, und umgekehrt.

Was kann ohne Rücksicht auf gelb geschlossen und über grün ausgesagt werden?

Auflösung. Die Data sind:

$$wg=se, \qquad ra=be,$$

sonach in vereinigter Gleichung:

$$wg(s_1+e_1)+se(w_1+g_1)+ra(b_1+e_1)+be(r_1+a_1)=0$$

woraus e eliminirt:

$$wgs_1+rab_1+(sw_1+sg_1+br_1+ba_1)(wg+ra)=0$$

oder

$$ra(b_1+sw_1)+w(s_1+br_1+ba_1)g+rasg_1=0.$$

Die Resultante der Elimination von g läuft auf die Nullsetzung des ersten Terms hinaus:

$$ra(b_1+sw_1)=0 \quad \text{oder} \quad ra \neq\!\!\!\in b, \qquad ras \neq\!\!\!\in w.$$

Unabhängig von gelb *und* grün ist also lediglich zu schliessen: dass rot und orange gestreifte Muster auch blau, sowie rot, orange und schwarz gestreifte auch weiss gestreift sein müssen.

Mit Rücksicht hierauf lässt sich nun der erste Term der obigen von e freien Endgleichung unterdrücken, und gibt dieselbe nach der Unbekannten g aufgelöst leicht:

$$g=ras+u\{w_1+s(b_1+ra)\},$$

d. h. die grün gestreiften Muster bestehen aus allen, die zugleich rot, orange und schwarz gestreift sind, nebst einer unbestimmten Menge solcher (keinen, einigen oder allen solchen), die entweder nicht weiss gestreift sind, oder die schwarz, und zugleich nicht blau oder rot nebst orange, gestreift sind.

Bequemer wird sich dies in Gestalt der Doppelsubsumtion beschreiben lassen, welche darum für die Einkleidung der Lösung den Vorzug verdient:

$$ras \Subset g \Subset w_1 + s(b_1 + ra)$$

und zu erkennen gibt: dass die zugleich rot, orange und schwarz gestreiften Muster auch grün gestreift sein müssen. Jedes grün gestreifte Muster aber muss, falls es nicht weiss gestreift ist, sicher schwarz und entweder nicht blau, oder rot nebst orange gestreift sein.

Es versteht sich, dass vorstehend ein jeder Buchstabe nicht das Merkmal der betreffenden Farbe, sondern die Klasse der mit diesem Merkmal behafteten Objekte in unsrer Mannigfaltigkeit — der Tuchmuster — vorzustellen hatte. —

Man vergleiche auch die Lösung vorstehenden Problems nach Peirce's Methode in § 27. Das Problem ist auch behandelt von Grove (Educational Times, April 1881), Miss Ladd[1] p. 55 .. 57.

8. **Aufgabe.** (Lambert[8] I, 14.)

Wenn die x ohne die a einerlei sind mit den b, und die a ohne die x zusammenfallen mit den c, wie drückt sich x durch a, b und c aus?

Auflösung. Data sind:

$$a_1 x = b \quad \text{und} \quad a x_1 = c,$$

also in vereinigter Gleichung:

$$a_1 b_1 x + (a + x_1) b + a c_1 x_1 + (a_1 + x) c = 0.$$

Durch Elimination des x ergibt sich zunächst die Relation:

$$ab + a_1 c + (a_1 b_1 + c)(b + a c_1) = 0, \quad \text{oder:} \quad ab + a_1 c + bc = 0, \quad \text{oder:}$$
$$ab + a_1 c = 0$$

— vergl. Th. ι) des § 18 — wonach die Gleichung sich vereinfacht zu:

$$x(a_1 b_1 + c) + x_1 (a c_1 + b) = 0$$

und nach x aufgelöst gibt:

$$x = a c_1 + b + u(a + b) c_1 = a c_1 + b,$$

indem der unbestimmte Term eingeht.

In Anbetracht, dass $bc = 0$ ist, also $b = bc_1 + bc = bc_1$ gesetzt werden kann, lässt sich dem Ergebniss auch die Gestalt geben:

$$x = (a + b) c_1$$

und lehrt dasselbe: die Klasse x besteht aus den a und den b, mit Ausschluss der c (was wir in § 23 mit $x = a + b - c$ dargestellt

haben würden, wonach es mit Lambert's Ergebniss buchstäblich übereinstimmte).

Wie Herr Venn[1] p. 272 bemerkt, besitzt vorstehende Aufgabe ein gewisses historisches Interesse als einer der frühesten Versuche, logische Aufgaben rechnerisch (in Symbolen) zu lösen, und reiht sich unter dem gleichen Gesichtspunkt hieran auch die folgende von Lambert behandelte Frage.

9. Frage. Wenn $ad = bc$ ist, lässt sich alsdann schliessen, dass $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ sein müsse, d. h. wenn die a mit den d die nämlichen Individuen gemein haben, wie die b mit den c, muss dann jede (resp. überhaupt eine, resp. eine bestimmte) Klasse, welche durch b determinirt sich in a zusammenzieht, sich decken mit jeder (resp. etc.) Klasse, welche durch d determinirt c gibt?

Wie in den Klammern schon angedeutet, unterscheiden wir mehrerlei Auffassungen der Frage, für welche alle sie *verneinend* zu beantworten sein wird. Herr Venn l. c. konstatirt einen Irrtum Lambert's, welcher, obwol die Nichthebbarkeit beiderseits übereinstimmender Faktoren in einer Gleichung schon bemerkend, doch mehr als einmal annehme, dass es sich also verhalte (die Frage nämlich zu bejahen sei). Indessen gibt Venn selbst, unter Äusserung berechtigter Zweifel, eine unrichtige Beantwortung der Frage, indem er ihre Bejahung an die Bedingung knüpft, dass $a = c$ und $b = d$ sei — was sich bei einer jeden der Auffassungen nicht gerade als notwendig, eventuell als nicht hinreichend, herausstellen wird.

Um dies alles aufzuhellen, sei die Frage auch hier behandelt, obwol sie nicht ganz in den die übrigen Aufgaben umschliessenden Rahmen passt: wir wünschten mit § 23 die inversen Operationen des Kalkuls endgültig aus unserer Disziplin ausgemerzt zu haben, weshalb wir denn auch die Untersuchung auf gegenwärtigen Kontext beschränken.

Zur Unterscheidung von General- und Prinzipalwert des Quotienten greifen wir auf die Bezeichnungen des § 23 zurück.

Die Prämisse, rechts auf 0 gebracht lautet:

$$ad(b_1 + c_1) + bc(a_1 + d_1) = 0,$$

oder links nach a, b, c, d entwickelt

$$ad(b_1c_1 + b_1c + bc_1) + bc(a_1d_1 + a_1d + ad_1) = 0;$$

sie leugnet also die Existenz von sechsen der sechzehn zwischen a, b, c, d und ihren Negationen überhaupt denkbaren Kombinationen, welche die Mannigfaltigkeit 1 der Möglichkeiten zusammensetzen, wogegen sie über die zehn übrigen Kombinationen derselben nichts aussagt.

Soll nun *überhaupt ein* Wert von $a :: b$ übereinstimmen mit einem Werte von $c :: d$, so müssen zunächst die beiderseitigen Valenzbedingungen erfüllt sein, welche lauten: $ab_1 = 0$ und $cd_1 = 0$. Um die vereinigte Gleichung der letztern $ab_1 + cd_1 = 0$ nach allen vier Symbolen zu entwickeln, wird man am besten das Th. 33_+) links anwenden, wonach sie die Form annimmt:

$$ab_1cd_1 + ab_1(c_1 + d) + cd_1(a_1 + b) = 0,$$

also

$$ab_1cd_1 + ab_1(c_1d + c_1d_1 + cd) + cd_1(a_1b + a_1b_1 + ab) = 0.$$

[Hätte man statt dessen jedes ihrer beiden Glieder mit der Entwickelung von 1 nach den beiden andern im betreffenden Glied nicht vorkommenden Symbolen gemäss Th. 34_+) multiplizirt, so wäre der Term ab_1cd_1 unnötig zweimal angesetzt worden.] Versammelt man nun hieraus diejenigen Glieder, deren Verschwinden durch die Prämisse nicht ohnehin garantirt ist, so bemerkt man dass es die folgenden dreie sind: ab_1cd_1, $ab_1c_1d_1$ und $a_1b_1cd_1$. Darnach ist $b_1d_1(ac + ac_1 + a_1c) = 0$ oder $b_1d_1(a + c) = 0$, das heisst:

$$a + c ⋹ b + d$$

die notwendige Bedingung dafür, dass ein Wert von $a :: b$ nur überhaupt mit einem solchen von $c :: d$ übereinstimmen *könne*. Da schon diese Bedingung im allgemeinen nicht erfüllt ist, und, wie erkannt, ganz und gar nicht in der Voraussetzung liegt, so wird die gestellte Frage für jegliche Auffassung derselben zu *verneinen* sein.

Nehmen wir nun aber ausser der Prämisse $ad = bc$ auch noch diese Forderung $a + c ⋹ b + d$ als erfüllt an, so ist uns nicht nur letztere, sondern sind auch die Valenzbedingungen $a ⋹ b$ und $c ⋹ d$ selbst gesichert, und ausser diesen stipulirt die Prämisse nur noch, dass

$$bd(ac_1 + a_1c) = 0 \quad \text{oder} \quad bd(a + c) ⋹ ac$$

sei. Die so erweiterte Prämisse läuft also auf die drei Voraussetzungen:

$$a ⋹ b, \qquad c ⋹ d, \qquad (a + c)bd ⋹ ac$$

hinaus, deren vereinigte Gleichung das Verschwinden von neunen jener sechzehn Konstituenten festsetzt — die im bisherigen sich auch angegeben finden.

Unter dieser Annahme können wir nun weiter fragen, ob, oder unter welchen ferneren Bedingungen auch *jeder* Wert von $a :: b$ mit *jedem* Werte von $c :: d$ übereinstimmen wird?

Dies ist nur möglich, wenn diese beiden Ausdrücke eindeutig ausfallen, nämlich selbst nicht schon mehrere unter sich verschiedene Werte umfassen.

Für den Generalwert des Quotienten von a und b hatten wir in § 23, η) den Ausdruck:

$$a :: b = au_1 + (a + b_1)u$$

und soll dieser von u unabhängig ausfallen, so muss für beliebige u, v sein:

$$au_1 + (a + b_1)u = av_1 + (a + b_1)v,$$

was rechts auf 0 gebracht: $a_1b_1(uv_1 + u_1v) = 0$ gibt und für jedes Wortepaar u, v nur bestehen kann, wenn selber $a_1b_1 = 0$ ist — vergl. unten Studie 21. Da nun ohnehin $ab_1 = 0$ nach der Valenzbedingung war, so haben wir alsdann $ab_1 + a_1b_1 = 0$ oder $b_1 = 0$, d. h. $b = 1$ und wird $a :: b = a :: 1 = a$ sein müssen. Analog $d = 1$ und $c :: d = c$.

Die obige Frage wird demnach sich nur bejahen lassen, wenn

$$a = c \quad \text{und} \quad b = d = 1$$

ist; mithin war hier Herrn Venn's Entscheidung, bei welcher $b = d$ noch unbestimmt blieb, nicht ausreichend.

Von grösserem Interesse erscheint die Frage, ob oder wann vielleicht *die Gesamtheit* der Werte von $a :: b$ sich deckt *mit der Gesamtheit* der Werte von $c :: d$?

Diese Gleichheit $a :: b = c :: d$ tritt nur dann und sicher dann ein, wenn unter der oben stipulirten Annahme die Gleichung:

$$a + ub_1 = c + vd_1$$

für ein beliebig angenommenes u erfüllbar ist durch ein v und für ein irgendwie angenommenes v erfüllbar ist durch gewisse u — vergl. § 23, η).

Letzteres tritt ein, wenn für die (rechts auf 0 gebrachte) Gleichung:

$$(a + b_1 u)\, c_1 (d + v_1) + a_1 (b + u_1)(c + d_1 v) = 0$$

die Resultante der Elimination des v:

$$ac_1 d + a_1 bc + b_1 c_1 du + a_1 cu_1 = 0$$

auflösbar ist nach u, d. h. wieder, wenn nur die Resultante auch seiner Elimination hieraus erfüllt ist. Als die gesuchte Bedingung finden wir hienach schlechtweg die Resultante der Elimination von u *nebst* v aus der obigen Gleichung, also:

$$ac_1 d + a_1 bc = 0$$

— eine Gleichung, welche laut Prämisse schon ohnehin erfüllt ist.

Unter den durch Zuzug der Valenzbedingungen von $a :: b$ und $c :: d$ zu der Prämisse $ad = bc$ *erweiterten Voraussetzungen* wird folglich allerdings aus letzterer auch auf die Geltung der „Proportion" $a :: b = c :: d$ zu schliessen erlaubt sein, indess auch nur unter diesen Voraussetzungen.

Fragen wir endlich, ob oder wann auch die *Hauptwerte* der beiderseitigen Quotienten übereinstimmen werden, d. h. wann in unsrer Bezeichnung wirklich $a : b = c : d$, oder $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, sein wird? — unter ebendiesen Voraussetzungen, ohne welche ja die Frage gar keinen Sinn haben würde!

Nach $\varkappa$) des § 23 deckt sich dies mit der Forderung, dass

$$a + b_1 = c + d_1, \quad \text{oder} \quad (a + b_1)\, c_1 d + a_1 b\, (c + d_1) = 0,$$

sei. Da laut Prämisse schon zwei von den vier Termen links fortfallen, reduzirt sich dies auf die Forderung:

$$b_1 c_1 d + a_1 bd_1 = 0 \quad \text{oder} \quad (a + a_1)\, b_1 c_1 d + a_1 b\, (c + c_1)\, d_1 = 0,$$

worin nach den Valenzbedingungen abermals zwei Terme sich wegheben. Es bleibt die Bedingung:

$$a_1 c_1 (b_1 d + bd_1) = 0, \quad \text{oder} \quad b + d \Subset a + c + bd$$

durch welche den neun schon verschwindenden Konstituenten noch zwei weitere zugesellt werden. Schliesslich haben wir:

$$ad \Subset c \Subset d \Subset b + c, \qquad bc \Subset a \Subset b \Subset a + d$$

als den Inbegriff der erforderlichen Bedingungen für die Bejahung der Frage, ob $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$?

10. **Aufgabe.** (Venn[1] p. 267.)

Aus einer gewissen Klasse von Gegenständen liest eine Person heraus (picks out) die x, welche z sind und die y, welche nicht z sind. Aus dem Rückstande scheidet eine andere Person aus die z, welche y und die x, welche nicht y sind. Man findet, dass nur die z, welche nicht x sind, diese aber sämtlich, übrig bleiben.

Was kann alsdann über die ursprüngliche Klasse — w möge sie heissen — ausgesagt werden?

Auflösung. In die Zeichensprache übersetzt lautet die Prämisse:

$$w(xz + yz_1)_1(zy + xy_1)_1 = zx_1$$

— vergleiche das über die Ausschliessung, Exception in § 23 S. 495 gesagte.

Nach meinem Th. 46) stellt die linke Seite sich dar als:

$$w(x_1z + y_1z_1)(z_1y + x_1y_1) = w(x_1y_1z + x_1y_1z_1) = wx_1y_1.$$

Es lautet also die Gleichung:

$$x_1y_1w = x_1z,$$

wobei die linke Seite zu erkennen gibt: der Erfolg der zweimaligen Ausscheidungen war einfach die Beseitigung der x und der y aus der Klasse der w.

Da nun die Gleichung, rechts auf 0 gebracht, aussagt:

$$x_1yz + x_1y_1z_1w + x_1zw_1 = 0,$$

so haben wir erstlich als Resultante der Elimination von w die Relation:

$$x_1yz = 0 \quad \text{oder} \quad yz \preccurlyeq x,$$

d. h. alle y, welche z sind, mussten auch x gewesen sein, und zweitens haben wir als Auflösung:

$$w = x_1z + u(x + y)$$

bei unbestimmtem u, oder:

$$x_1z \preccurlyeq w \preccurlyeq x + y + z,$$

d. h. die Klasse w musste sicherlich die z, welche nicht x sind, alle enthalten haben, und konnte nur aus Individuen der Klassen x, y und z zusammengesetzt gewesen sein — was auch unmittelbar als selbstverständlich einleuchtet.

11. **Aufgabe.** (Mc Coll, Math. Questions etc. from the Educational Times, Vol. 31, p. 43 und 44, auch gelöst von Herrn Lloyd Tanner.)

Durch Beobachtung sei erkannt, dass sooft die Ereignisse a und b

zusammen eintreten, denselben allemal folgt*) das Ereigniss c, desgleichen das d oder auch e, ferner: dass, sooft die Ereignisse d und e beide eintreten, ihnen allemal vorhergegangen*) ist das Ereigniss a, oder auch b nebst c. • Wann können wir (aus dem Eintreten oder Nichteintreten der Ereignisse a, b, c oder d) schliessen erstens, dass e gewisslich eintreffen wird, und zweitens, dass e sicher nicht eintrifft?

Auflösung. Die Data lauten (wenn a gedeutet wird als Klasse der Fälle, wo das gleichnamige Ereigniss eintritt, etc.):

$$ab \neq\!\!\!\in c\,(d + e), \qquad de \neq\!\!\!\in a + bc,$$

oder:

$$ab\,(c_1 + d_1 e_1) + a_1\,(b_1 + c_1)\,de = 0\,,$$

woraus durch Elimination von e zunächst zu ersehen ist, dass $abc_1 = 0$ oder $ab \neq\!\!\!\in c$, d. h. das Zusammentreffen von a und b stets von c gefolgt ist, wie dies auch schon die Prämissen statuirten, sodann durch Auflösen der restirenden Gleichung nach der Unbekannten e, sowie e_1, sich ergibt:

$$abd_1 \neq\!\!\!\in e \neq\!\!\!\in a + bc + d_1, \qquad a_1 d\,(b_1 + c_1) \neq\!\!\!\in e_1 \neq\!\!\!\in a_1 + b_1 + d.$$

Die ersten Teile von diesen Doppelsubsumtionen enthalten die Antwort auf die gestellten Fragen: e tritt sicher ein, wenn a und b (und c) ohne d eintreten, und e tritt zuverlässig nicht ein, wenn d eintritt und entweder a und b, oder a und c nicht eintreten.

12. Aufgabe. (W. B. Grove, Educational Times 1. Febr. 1881, 6616; Miss Ladd[1] p. 54.) Die Mitglieder einer wissenschaftlichen Gesellschaft zerfallen in drei Abteilungen (Sektionen) a, b, c von denen jedes Mitglied mindestens *einer* angehören muss, und gelten folgende Bestimmungen:

Wer der Sektion a aber nicht der Sektion b angehört, desgleichen wer der b und nicht der c angehört, endlich wer der Sektion c aber nicht a angehört, darf der Gesellschaft einen Vortrag halten, falls er seinen Beitrag bezahlt hat, aber sonst nicht.

Ein jeder, der Sektion a aber nicht c, c aber nicht a, b aber nicht a, Angehörende, darf den Mitgliedern ein Experiment vormachen, falls er seinen Beitrag gezahlt hat, sonst nicht.

Jedes Mitglied muss jährlich den übrigen Mitgliedern entweder einen Vortrag halten oder ein Experiment vormachen.

---

*) Meines Erachtens müssten diese Verba des zeitlichen Folgens und Vorhergegangenseins wol durch ein auf eine *Begleit*erscheinung hinweisendes Verbum, wie „mit denselben Einhergehen" ersetzt werden — so wenigstens bezüglich des Ereignisses c.

Gesucht der Minimalzusatz zu den Bestimmungen, durch welchen jedes Mitglied gezwungen würde, entweder seinen Beitrag zu zahlen oder seine Mitgliedschaft zu verwirken.

Auflösung. Sei 1 die Klasse der Mitglieder, x die Klasse derer, die einen Vortrag halten müssen (sonach auch dürfen), y die Klasse derer, die ein Experiment vormachen müssen, z die Klasse derer, die ihren Beitrag bezahlt haben.

Dann garantiren die bisherigen Bestimmungen schon dass:

$$a_1b_1c_1 = 0, \quad (ab_1 + bc_1 + ca_1)xz_1 = 0, \quad (ac_1 + a_1c + a_1b)yz_1 = 0, \quad x_1y_1 = 0$$

ist, und handelt es sich darum, hinzubringen, dass z_1 ausgeschlossen werde aus allen den Teilen der Gesamtheit 1 der Mitglieder, aus denen es nicht bereits ausgeschlossen wurde, nämlich aus der Negation von:

$$a_1b_1c_1 + (ab_1 + bc_1 + a_1c)\,x + (ac_1 + a_1b + a_1c)\,y + x_1y_1.$$

Diese ist:

$$(a + b + c)\,(abc + a_1b_1c_1 + x_1)\,(ac + a_1b_1c_1 + y_1)\,(x + y)$$

in Anbetracht, dass der Koeffizient von x vollends nach a entwickelt sich als $a\,(b_1 + c_1) + a_1\,(b + c)$ darstellt, während der von y als $ac_1 + a_1\,(b + c)$ schon ebendarnach entwickelt ist, wonach die Negationen dieser Koeffizienten sich sofort als $abc + a_1b_1c$ resp. $ac + a_1b_1c_1$ nach meinem Th. 46_+) ergeben.

Hier sind nun zunächst die beiden Terme $a_1b_1c_1$, als in ihre Negation $a + b + c$ zu multiplizirende fortzulassen. Darnach gibt das Produkt der beiden mittleren von den vier Faktoren:

$$abc + acx_1 + abcy_1 + x_1y_1,$$

wovon der letzte Term als Negation des nachfolgenden Faktors $x + y$ zu unterdrücken, der vorletzte vom ersten absorbirt wird. Dann erhalten wir durch Ausmultipliziren leicht: $abc\,(x + y) + acx_1y$, wobei jedoch statt $x + y$ genommen werden kann: $x + x_1y$ und dann der vom zweiten dieser Glieder herrührende Term in dem letzten Gliede eingeht.

Es bleibt:

$$abcx + acx_1y$$

als Ausdruck jener Klasse, von welcher z_1 auszuschliessen wäre.

Daher ist der gesuchte geringste erforderliche Zusatz zu den Bestimmungen dieser:

$$ac\,(bx + x_1y)\,z_1 = 0,$$

d. h. „Wer seinen Beitrag nicht gezahlt hat, kann nicht allen drei Sektionen zugleich angehören und einen Vortrag halten, desgleichen kann er nicht den Sektionen a und c gleichzeitig angehören und ohne Vortrag zu halten ein Experiment vormachen".

Hätte man oben die Koeffizienten von x und y mittelst Ausmultiplizirens von $(a_1 + b)\,(b_1 + c)\,(c_1 + a)$ resp. $(a_1 + c)\,(a + b_1)\,(a + c_1)$ negirt, so

konnte diese Aufgabe schon in § 18, als χ_1) gebracht werden, da sie eine Elimination oder Berechnung einer Unbekannten nicht erforderte.

13. **Aufgaben.** Unter dieser Nummer geben wir eine Reihe von leichteren Rechnungsaufgaben.

α) Man bringe die Gleichung $x = a$ rechts auf Null, löse sie alsdann systematisch nach x auf und überzeuge sich, dass der unbestimmte Term eingeht.

β) Aus der Gleichung $ax + b = 0$ soll x eliminirt [und berechnet] werden. **Auflösung:** die Resultante ist: $b = 0$. [Darnach würde sich berechnen: $x = ua_1$, d. h. $x \Subset a_1$.]

γ) Analog x und y aus der Gleichung

$$ax + by + c = 0$$

zu eliminiren etc. Resultante: $c = 0$. Berechnen würde sich darnach:

$$x = ua_1, \quad y = vb_1 \quad \text{oder} \quad x \Subset a_1, \quad y \Subset b_1.$$

δ) Wenn $a = xb$ und $b = ya$, so ist durch Elimination von x und y zu zeigen, dass $a = b$ sein muss.

Anstatt das systematische Verfahren anzuwenden, kann man hier auch mittelst Durchmultiplizirens der Prämissen schliessen, dass

$$ab = xbb = xb = a, \quad ba = yaa = ya = b, \quad \text{sonach} \quad ab = a = b$$

sein muss.

ε) Aus $ax = b$ das x zu eliminiren und zu berechnen.
Resultante: $a_1 b = 0$, Lösung: $x = b + ua_1$, resp.

$$b \Subset a, \qquad b \Subset x \Subset b + a_1.$$

Durch beiderseitiges Multipliziren der Prämisse mit a und Vergleichung, erkennt man auch direkt, dass $ab = b$ sein muss; doch gibt das systematische Verfahren die Gewissheit, dass man hiermit die volle Resultante besitze.

ζ) Nach x aufzulösen die Gleichung:

$$(ab + a_1 b_1) x + (ab_1 + a_1 b) x_1 = 0.$$

Auflösung: $x = ab_1 + a_1 b$. [Resultante: $0 = 0$.]

η) Desgl. $a_1 b_1 x + (ab_1 + a_1 b) x_1 = 0$. **Aufl.** $x = ab_1 + a_1 b + uab$.

ϑ) Man zeige, dass aus der Gleichung:

$$(b_1 + c_1) x + (ac + a_1 b) x_1 = 0, \quad \text{wo} \quad ab_1 c + a_1 bc_1 = 0$$

sein wird, sich $x = ac + a_1 b$ völlig eindeutig bestimmt. Man sieht: die Bedingung S. 463 in σ) des § 21 braucht nicht etwa analytisch erfüllt zu sein, sondern es genügt, wenn sie nur erfüllt ist kraft der Resultante.

ι) Dagegen für $(b_1 + c_1) x + a_1 (b + c) x_1$, wo $a_1 (bc_1 + b_1 c) = 0$, wird $x = a_1 (b + c) + ubc$ irgendwie zwischen $a_1 (b + c)$ und $a_1 (b + c) + bc$ liegen können.

κ) (Boole?) Aus $ab + xab_1 + ya_1 b + a_1 b_1 = 0$ eliminire man x, y. Die Resultante heisst $ab + a_1 b_1 = 0$, oder $a = b_1$, $b = a_1$. Mit Rücksicht darauf vereinfacht die Gleichung sich zu $xa + ya_1 = 0$, woraus $x = ua_1$, $y = va$ oder $x \Subset a_1$, $y \Subset a$ sich berechnen würde.

λ) Das Gleichungenpaar nach x aufzulösen:

$$a = ab + x (a + b), \qquad b = ab + x_1 (a + b).$$

Die Wurzel ist: $x = ab_1 + u (a + b_1)$, und ergibt sich keine Relation zwischen a und b. Die zweite Prämisse deckt sich mit der ersten — vergl. § 18, o_1).

μ) (De Morgan[2] p. 123.) Zu zeigen, dass aus den Prämissen: „Jedes a ist b oder c und jedes c ist a“ *kein Schluss* in Bezug auf nur zweie der drei Klassen a, b, c gezogen werden kann.
Auflösung. $a \Subset b + c$, $c \Subset a$ gibt $ab_1 c_1 + a_1 c = 0$ als vereinigte Gleichung. Elimination von a allein, desgleichen von c für sich, führt augenscheinlich nur auf $0 = 0$, als der vollen Resultante. Die von b führt blos auf die zweite Prämisse zurück.

ν) Venn[5] p. 13. Die Data zu vereinfachen:

$$x \Subset yz + y_1 \; (= y_1 + z), \qquad xyz \Subset w, \qquad wxyz = 0.$$

Resultat: $$xy = 0.$$

14. Aufgabe (nach Venn[1] p. 270 den deutschen Schulverhältnissen angepasst).

Wir beschränken unsre Aufmerksamkeit (confine ourselves) auf die Schüler der Mittelschulen einer Stadt als da sind:

$$a = \text{Gymnasiasten und } a_1 = \text{Realschüler.}$$

Bedeutet b die welche Hebräisch und c die welche Englisch hatten, so soll von der Kategorie x der bei den Promotionsprüfungen durchgefallenen, der sitzen bleibenden oder nichtpromovirten Schüler bekannt sein, dass — was der Leser sich leicht in Worte fasst:

$$x \Subset ab_1 + a_1 c, \qquad ax \Subset b + c, \qquad cx \Subset ab$$

ist. Man ermittle diese Klasse.

Auflösung. Unschwer überzeugt man sich, dass der Faktor, welchen x in der vereinigten Gleichung erhält:

$$ab + a_1 c_1 + ab_1 c_1 + a_1 c + b_1 c = 1$$

ist, und diese sich zu: $x = 0$ vereinfacht. Mithin sind alle promovirt worden.

15. Aufgabe. Venn[1] p. 268 — desgleichen.

Bei einer andern Schüleraufgabe bedeute x die Knaben, x_1 die Mädchen, a die prämiirten, b und c die an einem bestimmten Unterrichtsgegenstand, z. B. Griechisch resp. Literaturgeschichte teilnahmen.

So soll aus der Angabe:

$$a = bx + cx_1$$

die Unbekannte x berechnet werden.

Auflösung. Man findet:

$$x = ac_1 + a_1c + u\,(ab + a_1b_1),$$

wo u unbestimmt; d. h. die Knaben zählten zuverlässig in ihren Reihen die sämtlichen prämiirten Schulkinder, die nicht Literaturgeschichte hatten nebst den nicht prämiirten Schulkindern, die Literaturgeschichte hatten; zudem vielleicht irgendwelche prämiirte Kinder die Griechisch hatten sowie ev. nicht prämiirte Kinder die kein Griechisch hatten, doch jedenfalls keine andern.

16. Aufgabe. Venn[1] p. 262 — auch Math. Quest. Vol. 34, p. 35 und 36. (Lösungen von Harley, Matz, Mc Coll, Genese, u. a.) Bei einem Klub bedeute

$x =$ Mitglied des Finanzausschusses (financial committee)
$y =$ „ der Bibliothekskommission (library „)
$z =$ „ des Verwaltungsausschusses (general „),

so sollen die folgenden (in Worten zu gebenden) Klubregeln:

$$x \mathrel{=\!\!\!\in} z, \qquad yz \mathrel{=\!\!\!\in} x, \qquad xy = 0$$

vereinfacht werden.

Auflösung. In der vereinigten Gleichung:

$$xz_1 + x_1yz + xy = 0$$

lässt zuerst der Faktor x_1 sich unterdrücken — indem man in den beiden letzten Gliedern linkerhand sich y als gemeinsamen Faktor ausgeschieden denkt und in der Klammer das Th. 33_+) Zusatz anwendet, die Klammer hernach wieder auflösend. Alsdann aber lässt unmittelbar das Th. ι) des § 18 sich anwenden und entsteht:

$$xz_1 + yz = 0 \quad \text{oder} \quad x \mathrel{=\!\!\!\in} z \quad \text{nebst} \quad yz = 0,$$

was wieder in Worte zu fassen.

Venn findet dies mittelst „Entwickelung“ der einzelnen Teilaussagen nach x, y und z und nachheriger Zusammenziehung der Ergebnisse, welch letztere, wie er nicht ganz unrichtig bemerkt „is purely a matter of tact and skill, for which no strict rules can be given“.

17. **Aufgabe.** Venn[5] p. 14.
Gegeben:

$$a \Subset b + c, \quad b \Subset c + d, \quad c \Subset d + a, \quad d \Subset a + b.$$

Welche Bedingung muss mindestens hinzugefügt werden, damit

$$ab \Subset d \quad \text{sei?}$$

Auflösung. Die Forderung $abd_1 = 0$ gibt, nach allen vier Symbolen entwickelt:

$$abcd_1 + abc_1d_1 = 0.$$

In der vereinigten Gleichung der Prämissen:

$$ab_1c_1 + bc_1d_1 + cd_1a_1 + da_1b_1 = 0$$

ist aber das einzige Glied in welchem abd_1 als Faktor stecken kann, weil es von a_1 sowol als b_1 und d frei ist, das zweite, und dieses garantirt, dass $abc_1d_1 + a_1bc_1d_1 = 0$ ist. Demnach ist der zweite Teil der entwickelten Forderung bereits ohnehin erfüllt, und braucht nur mehr noch stipulirt zu werden, dass: $abcd_1 = 0$, das heisst $abc \Subset d$ sei. —

18. **Aufgabe.** Man eliminire und berechne x aus der Subsumtion:

$$ax + bx_1 + c \Subset \alpha x + \beta x_1 + \gamma.$$

Auflösung. Homogen gemacht lautet dieselbe Prämisse:

$$(a + c)x + (b + c)x_1 \Subset (\alpha + \gamma)x + (\beta + \gamma)x_1$$

und wird dieselbe rechts auf 0 gebracht, indem man ihre linke Seite mit der Negation der rechten multiplizirt. Nach den Theoremen 38), 36) und 46) lässt sich dies unmittelbar hinschreiben in Gestalt von:

$$(a + c)\alpha_1\gamma_1 x + (b + c)\beta_1\gamma_1 x_1 = 0,$$

woraus nun als Resultante der Elimination von x folgt:

$$(ab + c)\,\alpha_1\beta_1\gamma_1 = 0, \quad \text{oder} \quad ab + c \Subset \alpha + \beta + \gamma,$$

und als Auflösung:

$$x = (b + c)\beta_1\gamma_1 + ua_1c_1(\alpha + \gamma);$$

oder in Form einer Doppelsubsumtion beides vereinigt:

$$(b + c)\beta_1\gamma_1 \Subset x \Subset a_1c_1 + \alpha + \gamma,$$

oder auch:

$$(a + c)\alpha_1\gamma_1 \Subset x_1 \Subset b_1c_1 + \beta + \gamma.$$

19. **Aufgabe.** Eliminire und berechne x aus der Gleichung:

$$ax + bx_1 + c = \alpha x + \beta x_1 + \gamma.$$

Auflösung. Rechts auf 0 gebracht und homogen gemacht lautet die Gleichung:

$$\{(a+c)\alpha_1\gamma_1 + a_1c_1(\alpha+\gamma)\}\,x + \{(b+c)\beta_1\gamma_1 + b_1c_1(\beta+\gamma)\}\,x_1 = 0,$$

woraus die Resultante folgt:

$$(ab+c)\alpha_1\beta_1\gamma_1 + (ab_1\alpha_1\beta + a_1b\alpha\beta_1)c_1\gamma_1 + a_1b_1c_1(\alpha\beta+\gamma) = 0$$

und die Auflösung:

$$x = \{(b+c)\beta_1\gamma_1 + b_1c_1(\beta+\gamma)\} + u(a+c+\alpha_1\gamma_1)(a_1c_1+\alpha+\gamma)$$

oder:

$$(b+c)\beta_1\gamma_1 + b_1c_1(\beta+\gamma) \Subset x \Subset (a+c)(\alpha+\gamma) + a_1c_1\alpha_1\gamma_1.$$

20. Aufgabe. Die Gleichung $b = xa + ya_1$ nach x und y aufzulösen.

Auflösung. Rechts auf 0 gebracht lautet die Gleichung:

$$a(b_1x + bx_1) + a_1(b_1y + by_1) = 0.$$

Der erste Term, gleich 0 gesetzt, ist die Resultante der Elimination von y, ebenso der zweite, gleich 0 gesetzt, die Resultante der Elimination von x. Da Elimination beider Unbekannten auf die Identität $0 = 0$ führt, so braucht zwischen a und b keinerlei Relation zu bestehen; vielmehr können diese beiden Gebiete völlig nach Belieben angenommen werden. Auflösung der ersten Resultante nach x, und der letztern nach y, gibt endlich:

$$x = ab + u(a_1 + b) = ab + u(a_1 + ab) = ab + ua_1,$$
$$y = a_1b + v(a + b) = a_1b + v(a + a_1b) = a_1b + va,$$

für willkürliche u, v. In der That stimmt die Probe:

$$b = (ab + ua_1)a + (a_1b + va)a_1,$$

und ist damit, wenn man nur noch die Namen a, b durch x, y ersetzt, die Formel des Th. 42) systematisch aufgefunden.

21. Studie. Soll es mindestens *einen* Wert von x geben, für welchen die Gleichung besteht:

$$ax + bx_1 = 0,$$

so — haben wir gesehen — muss $ab = 0$ sein. Welche Relation aber die Koeffizienten a, b erfüllen müssen, wenn die Gleichung für *jeden* Wert von x Geltung haben soll, ist auch nicht schwer zu sehen. Dieselbe lautet: $a + b = 0$,
d. h. die *Koeffizienten* müssen dann beide schon *einzeln gleich* 0 sein. Insbesondre muss nämlich alsdann die Gleichung auch für $x = 1$, sowie für $x = 0$, gelten, was als notwendig zu erfüllende Bedingung $a = 0$ nebst $b = 0$ liefert, und das genügt auch, um die Gleichung zu einer allgemein geltenden Formel zu machen.

Analog musste bekanntlich $abcd = 0$ sein, wenn es ein Wertepaar von x und y, oder auch deren mehrere, geben soll, für welches die Gleichung:

$$axy + bxy_1 + cx_1y + dx_1y_1 = 0$$

richtig wird. Soll diese Gleichung aber für *jedes* Wertepaar x, y, soll sie *allgemein* gelten, so ist:

$$a + b + c + d = 0$$

dafür die notwendige und hinreichende Bedingung; wieder müssen dann also alle Koeffizienten für sich verschwinden, je den Wert 0 haben.

Behufs Nachweises bilde man aus 1, 1, 0, 0 alle erdenklichen Wertepaare (1,1; 1,0; 0,1; 0,0) und setze sie für x und y — oder auch: man erteile nur dem y die Werte 1 resp. 0 und verwerte für die stehen bleibende Gleichung in x, die dann noch für jedes x wird gelten müssen, das Ergebniss der vorhergehenden Überlegung.

Analog für noch mehr Variable.

22. Aufgabe.

Die Gleichung:

$$auv + buv_1 + cu_1v + du_1v_1 = abcd + w(a + b + c + d)$$

ist, wie wir in § 19 unter Th. 48) Zusatz gesehen haben für irgend ein w erfüllbar durch gewisse Wertepaare u, v und für irgend ein Wertepaar u, v erfüllbar durch gewisse w.

Es soll die Bedingung (Relation zwischen a, b, c, d) dafür aufgesucht werden, dass diese Gleichung auch für ein irgendwie angenommenes Wertepaar v, w bestehen (d. h. durch ein u erfüllt, nach u aufgelöst werden) könne, resp. für ein beliebiges Wertepaar u, w (erfüllbar sei durch ein v).

Auflösung. Man eliminire zunächst v aus der rechts auf 0 gebrachten Gleichung. Als Resultante stellt sich nach einiger Rechnung heraus:

$$a_1b_1(c + d)uw + ab(c_1 + d_1)uw_1 + (a + b)c_1d_1u_1w + (a_1 + b_1)cdu_1w_1 = 0$$

und da dieselbe nun für jedes irgendwie gedachte Wertepaar u, w Geltung haben soll, so muss — cf. vorige Studie — sein:

$$a_1b_1(c + d) + ab(c_1 + d_1) + (a + b)c_1d_1 + (a_1 + b_1)cd = 0,$$

das heisst:

$$a + b = c + d \quad \text{nebst} \quad ab = cd.$$

Die Resultante der Elimination des u ergibt sich analog, bequemer aber, indem man vorstehend u mit v und zugleich b mit c vertauscht. Zu deren allgemeiner Geltung in v, w würde sonach erforderlich sein, dass:

$$a + c = b + d \quad \text{und} \quad ac = bd$$

ist. Die vereinigte Gleichung der beiden Ergebnisse, m. a. W. das System der Forderungen:

$$a + b = c + d, \quad a + c = b + d, \quad ac = bd, \quad ab = cd,$$

welches auf $a = d$, $b = c$ hinausläuft (Aufgabe, dies nachzuweisen).

stellt die Bedingung dafür vor, dass von den drei Symbolen u, v, w *irgend zweie* ganz beliebig angenommen werden können, ohne dass der Bestand der ersten Gleichung gefährdet wird. —

23. Aufgabe (Boole[4] p. 144).

Die Ringelwürmer (Anneliden) sind weichleibige Tiere und entweder nakt oder in einer Röhre eingeschlossen. Auch besteht die Ordnung der Ringelwürmer aus allen wirbellosen Tieren, welche rotes in einem doppelten Gefässsystem zirkulirendes Blut haben.

Bedeutet a = Anneliden, s = weichleibige Tiere (softbodied animals) n = nakt, t = in einer Röhre (tube) eingeschlossen, i = wirbellos (invertebrate), r = rotes in etc. zirkulirendes Blut habend, so werden:

$$a \Subset s(n+t), \quad a = ir, \quad \text{nebst} \quad nt = 0$$

(was als selbstverständlich eingeschlossen) die gegebenen Propositionen sein.

Gesetzt wir wünschen nun zu erfahren, in welcher Weise die Klasse $st = w$ der weichleibigen in einer Röhre eingeschlossenen Tiere sich zusammensetzt aus den Klassen r, n, i der rotblütigen, der nakten und der wirbellosen Tiere.

So werden wir zuerst aus der vereinigten Gleichung der Prämissen:

$$a(s_1 + n_1 t_1) + a(i_1 + r_1) + a_1 ir + nt = 0$$

das a eliminiren. Die Resultante ist:

$$nt + (s_1 + n_1 t_1) ir = 0.$$

Und diese Gleichung werden wir mit der hinzugekommenen:

$$w_1 st + w(s_1 + t_1) = 0$$

vereinigen. [Die Elimination des a konnte hier *vor* dieser Vereinigung erfolgen, weil a in der hinzutretenden Gleichung $w = st$ nicht vorkommt.] Aus der vereinigten Gleichung ist alsdann s und t zu eliminiren. Die Resultante der Elimination zunächst des s lautet:

$$nt + n_1 t_1 ir + wt_1 + w_1 tir = 0,$$

sodann die auch von t:

$$(n + w_1 ir)(w + n_1 ir) = 0,$$

oder:

$$nw + n_1 irw_1 = 0.$$

Und diese Gleichung ist nun wiederum nach w als Unbekannter aufzulösen. Es wird:

$$st = w = n_1(ir + u),$$

worin u eine unbestimmte Klasse bedeutet; d. h. Die Klasse der in eine Röhre eingeschlossenen weichleibigen Tiere besteht aus den nicht nakten wirbellosen rotblütigen Tieren nebst einem unbestimmten Reste von nichtnakten Tieren. Das Resultat befindet sich, wie man leicht nachweisen wird, in Übereinstimmung mit dem von Boole in der weitläufigeren Fassung

$$w = n_1 \{ir + u(ir_1 + i_1)\}$$

dargestellten Ergebnisse.

Benennte man auch st_1, s_1t und s_1t_1 je mit einem eigenen Buchstaben (gleichwie vorhin st mit w) und brächte das gleiche Verfahren gemäss dem Th. 50_+) Zusatz — in Anwendung, so würde sich in Einklang mit Boole ergeben:

$$st_1 = nir + u(i_1 + r_1), \quad s_1t = un_1(i_1 + r_1), \quad s_1t_1 = u(i_1 + r_1)$$

(wobei nur u jedesmal wieder von neuem eine unbestimmte Klasse vorzustellen hätte) welche Resultate zu deuten wir dem Leser überlassen.

24. Aufgabe (Venn[1] p. 310).

Gegeben $yz = a$, $zx = b$; es soll $c = xy$ durch a und b ausgedrückt werden.

Auflösung. Aus der vereinigten Gleichung der beiden ersten Prämissen:

$$a_1yz + a(y_1 + z_1) + b_1xz + b(x_1 + z_1) = 0$$

eliminire man zuerst z, welches ja in der dritten Prämisse nicht vorkommt. Aus der Resultante:

$$a \quad + bx_1 + (a_1y + b_1x)(a + b) = 0$$

und der dritten Prämisse bilde man sodann die vereinigte Gleichung:

$$ay_1 + bx_1 + a_1by + ab_1x + c_1xy + c(x_1 + y_1) = 0$$

um aus ihr noch x und y zu eliminiren, schliesslich c zu berechnen.

Die vorstehende Gleichung wird die volle Resultante der Elimination des z aus dem System der drei Prämissen, resp. aus deren vereinigter Gleichung, uns vorstellen, weil die Terme, die von vornherein vom Eliminanden frei sind, immer unverändert in die Resultante übergehen. Elimination von y gibt:

$$bx_1 + ab_1x + cx_1 + (a_1b + c_1x)(a + c) = 0,$$

oder:

$$a_1bc + a(b_1 + c_1)x + (b + c)x_1 = 0$$

und hieraus die von x:

$$a_1bc + a(bc_1 + b_1c) = 0,$$

oder

$$(ab_1 + a_1b)c + abc_1 = 0.$$

Da die Elimination von c hieraus auf $0 = 0$ führt, so braucht zwischen a und b keinerlei Relation zu bestehen und konnten diese Klassen von vornherein beliebig angenommen werden, so lange x und y unbestimmt gelassen wurden. Nunmehr berechnet sich:

$$c = ab + ua_1b_1,$$

oder

$$ab ⋹ c ⋹ ab + a_1b_1,$$

was zu finden war.

Anmerkung. Um x und y auf einmal zu eliminiren, wäre freilich ein einfacheres Verfahren das gewesen, dass man in das überschiebend gebildete Produkt der beiden ersten Gleichungen $zxy = ab$ den Wert von xy ($= c$) aus der dritten Prämisse einsetzte. Aus dem Ergebniss $cz = ab$ schliesslich z eliminirend erhält man aber blos: $abc_1 = 0$, woraus zu erkennen ist, dass jenes Ergebniss nicht die volle Resultante gewesen. — In andern Fällen mag ein Kunstgriff schneller als das systematische Verfahren zuweilen auch zur vollen Resultante führen, doch ist das letztere, selbst wenn es weitläufiger, vorzuziehen, eben weil es uns über jene Frage nicht im Ungewissen lässt.

Wäre $d = xy_1 + x_1y$ zu suchen gewesen, so hätte sich ergeben:

$$abd + (ab_1 + a_1b)d_1 = 0,$$

also:

$$d = ab_1 + a_1b + ua_1b_1.$$

Für $e = x_1y_1$ ebenso: $\quad (a + b)e = 0, \quad e = ua_1b_1.$

Für $f = xy_1$ desgleichen: $af + a_1bf_1 = 0, \quad f = a_1(b + u).$

Und dergleichen mehr — wobei natürlich die Symbole u der verschiedenen Lösungen beliebige aber nicht von einander unabhängige Bedeutungen haben. —

25. Aufgabe. Unter Elimination von x die Funktion $t = \varphi(x)$ auszudrücken durch die Koeffizienten der Gleichung $f(x) = 0$.

Auflösung. Sei entwickelt:

$$f(x) = 0 = ax + bx_1, \quad \varphi(x) = t = \alpha x + \beta x_1,$$

wo also

$$a = f(1), \quad b = f(0), \quad \alpha = \varphi(1), \quad \beta = \varphi(0)$$

gegebene Parameter vorstellen werden, so haben wir die letzte Gleichung rechts auf 0 zu bringen:

$$t\varphi_1(x) + t_1\varphi(x) = 0,$$

aus ihr und der andern die vereinigte Gleichung zu bilden:

$$f(x) + t\varphi_1(x) + t_1\varphi(x) = 0,$$

also entwickelt:

$$(ax + bx_1)(t + t_1) + t(\alpha_1x + \beta_1x_1) + t_1(\alpha x + \beta x_1) = 0,$$

sodann x zu eliminiren, und die Resultante:

$$\{a(t + t_1) + \alpha_1t + \alpha t_1\}\ \{b(t + t_1) + \beta_1t + \beta t_1\} = 0,$$

oder

$$(a + \alpha_1)(b + \beta_1)t + (a + \alpha)(b + \beta)t_1 = 0$$

nach der Unbekannten t aufzulösen, nicht ohne dieselbe zuvor auch eliminirt zu haben. Da

$$(a + \alpha_1)(b + \beta_1)(a + \alpha)(b + \beta) = (a + \alpha_1\alpha)(b + \beta_1\beta) = ab$$

ist, haben wir als Resultante nur die alte Valenzbedingung:

$$ab = 0,$$

welche auch schon aus der Gleichung $f(x) = 0$ zu ersehen war, und sodann:

$$t = (a + \alpha)(b + \beta) + u(a_1\alpha + b_1\beta)$$

als die gesuchte Darstellung.

t ist demnach gelegen zwischen

$$a\beta + b\alpha + \alpha\beta \quad \text{und} \quad a\beta + b\alpha + a_1\alpha + b_1\beta$$

(in welcher Summe der Term $\alpha\beta$ einging — vergl. § 18, Th. ι).

26. **Aufgabe.** Analog unter Elimination von x, y durch die Koeffizienten der Gleichung:

$$f(x, y) = 0$$

die Funktion $t = \varphi(x, y)$ auszudrücken.

Auflösung. Entwickelt sei

$$f(x, y) = axy + bxy_1 + cx_1y + dx_1y_1 = 0,$$
$$\varphi(x, y) = \alpha xy + \beta xy_1 + \gamma x_1y + \delta x_1y_1 = t,$$

so hat man wie vorhin zu verfahren: die letzte Gleichung rechts auf 0 gebracht mit der vorigen zu vereinigen, dann x, y herauszuwerfen und die Resultante nach t aufzulösen. Sie lautet:

$$(a + \alpha_1)(b + \beta_1)(c + \gamma_1)(d + \delta_1)t + (a + \alpha)(b + \beta)(c + \gamma)(d + \delta)t_1 = 0,$$

gibt bei Elimination von t die alte Valenzbedingung:

$$abcd = 0$$

und aufgelöst:

$$t = (a + \alpha)(b + \beta)(c + \gamma)(d + \delta) + u(a_1\alpha + b_1\beta + c_1\gamma + d_1\delta),$$

worin u unbestimmt bleibt. —

Ähnlich lässt sich die Lösung bei beliebig vielen Eliminanden $x, y, z, \ldots$ hinsetzen.

27. **Aufgabe** (Miss Ladd[1] p. 58..61).

Die Werktage der Woche sollen kurz mit

Mo., Di., Mi., Do., Fr., Sa.

bezeichnet werden.

Sechs Kindern a, b, c, d, e, f wird zugemutet*), dass sie folgende Vorschriften befolgen.

1°) Am Mo. und Di. dürfen nie viere (oder mehr) zusammen ausgehen

*) Die armen Kinder! — wird man freilich sagen.

2⁰) Am Do., Fr. und Sa. dürfen niemals dreie (oder mehr) daheim bleiben.

3⁰) Am Di., Mi. und Sa. müssen, wenn b und c beisammen sind, auch a, b, e und f beisammen bleiben.

4⁰) Am Mo. und Sa. darf b nicht ausgehen, wofern nicht d zuhause bleibt oder c, e und f zuhause bleiben.

b und f beschliessen zuerst, was sie thun wollen, und c trifft seine Entscheidung vor a, d oder e.

Zu ermitteln ist *erstens*, wann c ausgehen muss, *zweitens*, wann es daheim bleiben muss, mithin drittens auch, wann es verfahren kann nach seinem Gefallen.

Auflösung. Man lasse a auch bedeuten die Klasse der Fälle oder Zeiten, in welchen das Kind a *ausgeht*, sonach a_1 die Klasse der Fälle oder Zeiten, in welchen das Kind a *daheim verweilt* und so weiter. Ebenso lasse man Mo. bedeuten die Klasse der Fälle, in welchen „es Montag ist", d. h. die Klasse der auf einen Montag fallenden Zeiten, u. s. w.

Alsdann fordern die beiden ersten Vorschriften, dass sei:

$$1^0)\ (\mathrm{Mo}+\mathrm{Di})(abcd+abce+abcf+abde+abdf+abef+acde+$$
$$+acdf+acef+adef+bcde+bcdf+bcef+bdef+cdef)=0,$$

$$2^0)\ (\mathrm{Do}+\mathrm{Fr}+\mathrm{Sa})(a_1b_1c_1+a_1b_1d_1+a_1b_1e_1+a_1b_1f_1+a_1c_1d_1+a_1c_1e_1+$$
$$+a_1c_1f_1+a_1d_1e_1+a_1d_1f_1+a_1e_1f_1+b_1c_1d_1+b_1c_1e_1+b_1c_1f_1+b_1d_1e_1+$$
$$+b_1d_1f_1+b_1e_1f_1+c_1d_1e_1+c_1d_1f_1+c_1e_1f_1+d_1e_1f_1)=0.$$

In der That soll die Klasse der Fälle, wo es Mo. (oder Di.) ist und zugleich die Kinder a, b, c, d zusammen ausgehn, eine leere sein, was durch $(\mathrm{Mo}+\mathrm{Di})\cdot abcd=0$ auszudrücken; etc.; ebenso soll die Klasse der Zeiten eine leere sein, wo es Do. (oder Fr. oder Sa.) ist und die Kinder a, b, c zusammen daheim bleiben, was durch $(\mathrm{Do}+\mathrm{Fr}+\mathrm{Sa})\ a_1b_1c_1=0$ sich ausdrücken wird, etc. Dass an den betreffenden Tagen nicht mehr als viere ausgehen, bezüglich nicht mehr als dreie daheim bleiben sollen, braucht nicht besonders formulirt zu werden, indem die aus dieser Formulirung zu unserm Ansatz hinzutretenden Terme ohnehin von den bereits angesetzten absorbirt werden müssten, wie $abcde$ von $abcd$, wie $a_1b_1c_1d_1$ von $a_1b_1c_1$, etc.

Ferner ist zu bemerken, dass im Sinne der Aufgabenstellerin die sämtlichen Kinder etwa in einer und derselben Pension untergebracht zu denken sind, sodass diejenigen, die daheim bleiben, dann auch „beisammen" bleiben, und diejenigen, welche ausgehen, dies ebenfalls „zusammen" thun.

Die dritte Prämisse schliesst für gewisse Tage die Fälle aus, in welchen b und c beide aus oder beide daheim sind, falls nicht (oder „ausgenommen", wenn) zugleich a, b, e und f beisammen bleiben. D. h. sie fordert:

$$(\mathrm{Di}+\mathrm{Mi}+\mathrm{Sa})(bc+b_1c_1)(abef+a_1b_1e_1f_1)_1=0.$$

Die Negation im letzten Faktor kann nach meinem Th. 46) als die-

jenige einer nach b entwickelte Funktion ausgeführt werden, wodurch derselbe wird:

$$b(a_1 + e_1 + f_1) + b_1(a + c + f)$$

und dies nach Th. 45) mit dem ebendarnach schon entwickelten vorhergehenden Faktor multiplizirt, verschafft unsrer Prämisse die Form:

3⁰) $\quad (\mathrm{Di} + \mathrm{Mi} + \mathrm{Sa})\,(a_1 bc + bce_1 + bcf_1 + ab_1c_1 + b_1c_1e + b_1c_1f) = 0.$

Die letzte Prämisse ist in Formeln:

$$(\mathrm{Mo} + \mathrm{Sa})b(d_1 + c_1e_1f_1)_1 = 0$$

oder

$$(\mathrm{Mo} + \mathrm{Sa})bd(c + e + f) = 0.$$

Multiplizirt man hier mit dem ersten Faktor aus und berücksichtigt, dass nach der zweiten Prämisse: $\mathrm{Sa} \cdot c_1e_1f_1 = 0$ ist, so kann man mit Rücksicht auf: $\quad c + e + f + c_1e_1f_1 = 1$

im zweiten Teil vereinfachen:

$$\mathrm{Sa} \cdot (c + e + f) = \mathrm{Sa} \cdot (c + e + f + c_1e_1f_1) = \mathrm{Sa} \cdot 1 = \mathrm{Sa},$$

sodass

4⁰) $\quad \mathrm{Mo} \cdot bd(c + e + f) + \mathrm{Sa} \cdot bd = 0$

der Ausdruck der vierten Prämisse wird (wie auch direkt einzusehen, da das Daheimbleiben $c_1e_1f_1$ am Sa. schon ausgeschlossen ist).

Zunächst ist erforderlich, a, d und e zu eliminiren [vergl. den Nachsatz unter Prämisse 4⁰) im Text der Aufgabe].

Der Teil der Prämissen, welcher schon frei von diesen ist, lautet:

2′) $\quad (\mathrm{Do} + \mathrm{Fr} + \mathrm{Sa})b_1c_1f_1 = 0,$

3′) $\quad (\mathrm{Di} + \mathrm{Mi} + \mathrm{Sa})\,(bcf_1 + b_1c_1f) = 0,$

wobei 1⁰) und 4⁰) keinen Term beisteuern. Die Summe der linken Seiten von 2′) und 3′) ist jedenfalls ein erster Bestandteil in dem Polynom der gesuchten Resultante.

Miss Ladd entnimmt nun weitere Bestandteile als Eliminationsergebnisse aus den einzelnen Paaren von Prämissengleichungen, wobei sie indess einige Paare — wie (1) mit (4), etc. — übergeht.

Da nach § 22 S. 470 dies immer insofern bedenklich ist, als man riskirt, nicht die *volle* Resultante zu bekommen, eliminiren wir lieber systematisch aus der „vereinigten" Gleichung der vier Prämissen (zu welcher man dieselben im Geiste leicht zusammenzieht) — wenn auch mit mehr Schreiberei — erst a, dann d, dann e (wenn man will, unter Beiseitelassung der vorstehend schon hervorgehobenen Terme, welche sich ja unverändert erhalten müssen — oder, weil es unbequem, auf sie besonders achten zu müssen, lieber unter Mitanführung derselben).

Die Resultante der Elimination von a enthält, gleich 0 gesetzt die Summe aller der Glieder aus den vier Prämissen, welche weder a noch a_1 zum Faktor haben:

$$0 = (\text{Mo} + \text{Di})(bcde + bcdf + bcef + bdef + cdef) +$$
$$+ (\text{Do} + \text{Fr} + \text{Sa})(b_1c_1d_1 + b_1c_1e_1 + b_1c_1f_1 + b_1d_1e_1 + b_1d_1f_1 + b_1e_1f_1 + c_1d_1e_1 +$$
$$+ c_1d_1f_1 + c_1e_1f_1 + d_1e_1f_1) +$$
$$+ (\text{Di} + \text{Mi} + \text{Sa})(bce_1 + bcf_1 + b_1c_1e + b_1c_1f) + \text{Mo} \cdot bd(c + e + f) + \text{Sa} \cdot bd +$$

plus dem Produkte aus der Summe der Koeffizienten von a in die Summe der Koeffizienten von a_1, nämlich:

$$+ [(\text{Mo} + \text{Di})(bcd + bce + bcf + bde + bdf + bef + cde + cdf + cef + def) +$$
$$+ (\text{Di} + \text{Mi} + \text{Sa})b_1c_1] \cdot [(\text{Do} + \text{Fr} + \text{Sa})(b_1c_1 + b_1d_1 + b_1e_1 + b_1f_1 + c_1d_1 +$$
$$+ c_1e_1 + c_1f_1 + d_1e_1 + d_1f_1 + e_1f_1) + (\text{Di} + \text{Mi} + \text{Sa})bc].$$

Letzteres ist zunächst auszumultipliziren. Nennte man es kurz

$$[A + B][C + D] = AC + AD + BC + BD,$$

so verschwindet nicht nur BD, sondern, *weil das Produkt je zweier verschiedenen Wochentage* 0 *ist* auch AC, und aus demselben Grunde vereinfachen die stehen bleibenden Glieder $AD + BC$ sich zu:

$$\text{Di} \cdot (bcd + bce + bcf) + \text{Sa} \cdot b_1c_1$$

mit Rücksicht auf das Absorptionsgesetz.

Denkt man dies sich oben hinter das +Zeichen gesetzt, und eliminirt aus der Gleichung d, so erhält man analog weiter:

$$0 = (\text{Mo} + \text{Di})bcef + (\text{Do} + \text{Fr} + \text{Sa})(b_1c_1e_1 + b_1c_1f_1 + b_1e_1f_1 + c_1e_1f_1) +$$
$$+ (\text{Di} + \text{Mi} + \text{Sa})(bce_1 + bcf_1 + b_1c_1e + b_1c_1f) + \text{Di} \cdot (bce + bcf) + \text{Sa} \cdot b_1c_1 +$$
$$+ [(\text{Mo} + \text{Di})(bce + bcf + bef + cef) + \text{Mo} \cdot b(c + e + f) + \text{Sa} \cdot b + \text{Di} \cdot bc] \cdot$$
$$\cdot (\text{Do} + \text{Fr} + \text{Sa})(b_1c_1 + b_1e_1 + b_1f_1 + c_1e_1 + c_1f_1 + e_1f_1),$$

wo das Produkt der zwei letzten Zeilen sich wieder reduzirt, und zwar zu:

$$\text{Sa} \cdot b(c_1e_1 + c_1f_1 + e_1f_1).$$

Wird, nachdem dies eingesetzt ist, endlich e eliminirt, so kommt:

$$0 = (\text{Do} + \text{Fr} + \text{Sa})b_1c_1f_1 + (\text{Di} + \text{Mi} + \text{Sa})(bcf_1 + b_1c_1f) + \text{Di} \cdot bcf + \text{Sa} \cdot b_1c_1 + \text{Sa} \cdot bc_1f_1 +$$
$$+ [\text{Mo} + \text{Di})bcf + (\text{Di} + \text{Mi} + \text{Sa})b_1c_1 + \text{Di}.\, bc] \cdot$$
$$\cdot [(\text{Do} + \text{Fr} + \text{Sa})(b_1c_1 + b_1f_1 + c_1f_1) + (\text{Di} + \text{Mi} + \text{Sa})bc + \text{Sa} \cdot b(c_1 + f_1)]$$

wo das letzte Produkt sich reduzirt zu:

$$\text{Sa} \cdot b_1c_1 + \text{Di} \cdot bcf + \text{Di} \cdot bc = \text{Di} \cdot bc + \text{Sa} \cdot b_1c_1.$$

Nach den Wochentagen geordnet ist demnach die gesuchte Resultante, wenn wir eingehende Terme sogleich bei den Koeffizienten fortlassen:

$$0 = \text{Di}(bc + b_1c_1f) + \text{Mi}(bcf_1 + b_1c_1f) + (\text{Do} + \text{Fr})b_1c_1f_1 + \text{Sa}(bf_1 + b_1c_1),$$

wo der letzte Koeffizient zusammengezogen ist aus

$$bcf_1 + bc_1f_1 + b_1c_1.$$

Dies gibt, nach c geordnet:

$$0 = \mathrm{Sa} \cdot bf_1 + \{\mathrm{Di} + \mathrm{Mi} \cdot f_1\} b \cdot c + \{(\mathrm{Di} + \mathrm{Mi})f + (\mathrm{Do} + \mathrm{Fr}) f_1 + \mathrm{Sa}\} b_1 \cdot c_1,$$

was zerfällt in die Resultante der Elimination auch noch von c:

$$\mathrm{Sa} \cdot bf_1 = 0$$

und in die beiden Subsumtionen:

$$\mathrm{Di} \cdot b + \mathrm{Mi} \cdot bf_1 \Subset c_1, \quad (\mathrm{Di} + \mathrm{Mi}) b_1 f + (\mathrm{Do} + \mathrm{Fr}) b_1 f_1 + \mathrm{Sa} \cdot b_1 \Subset c.$$

In Beantwortung der gestellten Fragen haben wir demnach das Ergebniss:

Wenn am Di. oder Mi. f ohne b ausgeht, desgleichen, wenn am Do. oder Fr. b und f beide daheim bleiben, endlich, wenn am Sa. b zuhause bleibt, so muss c ausgehen.

Wenn am Di. b ausgeht, sowie wenn am Mi. b ohne f ausgeht, dann muss c zuhause bleiben.

In jedem andern Falle kann c nach Belieben verfahren. Wie es aber auch verfahren möge, so wird am Sa. b nicht ohne f ausgehen dürfen.

Die vorstehende ist wol die komplizirteste von den Aufgaben des Denkrechnens, die bis jetzt überhaupt gestellt und gelöst worden sind.

28. Aufgabe. McColl, Math. Questions, Vol. 33, p. 22 .. 24, auch gelöst von C. J. Monro.

Ähnlich wie in der 11. Aufgabe mögen nachstehend die Buchstaben gedeutet werden als Klassen der Fälle, in welchen ein gleichnamiges Ereigniss eintritt. Dann soll beobachtet sein, dass:

$$abx \Subset cde, \quad bcy \Subset de, \quad c + d + e_1 \Subset (a_1 + b + x)(b_1 + c + y), \quad a_1 x = b_1 y.$$

Gesucht, wann ohne Rücksicht auf y das Eintreffen (resp. Eingetroffensein) oder Nichteintreffen des Ereignisses x verbürgt ist.

Auflösung. Elimination von y aus der vereinigten Gleichung der drei letzten Prämissen:

$$bc(d_1 + e_1)y + (c + d + e_1)(ab_1x_1 + bc_1y_1) + a_1x(b + y_1) + (a + x_1)b_1y = 0$$

gibt:

$$a_1bx + ab_1(c + d + e_1)x_1 = 0,$$

und dies mit der ersten Prämisse (die y gar nicht enthielt) vereinigt:

$$(a_1 + c_1 + d_1 + e_1)bx + ab_1(c + d + e_1)x_1 = 0.$$

Die Auflösung dieser Resultante nach x, mitnebst deren Konversion (d. h. ihrer Auflösung nach x_1):

$$ab_1(c + d + e_1) \Subset x \Subset acde + b_1, \quad (a_1 + c_1 + d_1 + e_1)b \Subset x_1 \Subset a_1 + b + c_1 d_1 e$$

lässt die Subjekte von x und x_1 (daneben ungefragt auch ihre Prädikate) erkennen — was leicht in Worten zu formuliren.

29. Aufgabe (Elizabeth Blackwood, Math. Quest. Vol. 35, 1881, p. 24 u. 25). Bekannt sei, dass jedes von den zusammengesetzten Ereignissen ayz, bzx, cxy von mindestens zweien der Ereignisse d, e, f begleitet (resp. gefolgt) ist und dass jedes von den zusammengesetzten „Nichtvorkommnissen" $d_1y_1z_1$, $e_1z_1x_1$, $f_1x_1y_1$ das Nichteintreffen von mindestens zweien der Ereignisse a, b, c bedingt. Welche Abhängigkeit folgt daraus zwischen dem Eintreffen oder Nichteintreffen der Ereignisse a, b, c, d, e, f ohne Rücksicht auf die x, y, z?

Auflösung (cf. McColl, Grove, und andere).

Die Prämissen sind:

$$ayz + bzx + cxy \Subset ef + fd + de\,, \quad d_1y_1z_1 + e_1z_1x_1 + f_1x_1y_1 \Subset b_1c_1 + c_1a_1 + a_1b_1\,.$$

Indem man das Polynom ihrer vereinigten Gleichung nach x, y, z entwickelte, und das Produkt der Koeffizienten $= 0$ setzte, ergäbe sich unschwer die gesuchte Resultante als: $abcd_1e_1f_1 = 0$.

Da dieses systematische Verfahren immerhin einige Schreiberei erforderte, wollen wir die Aufgabe durch einen Kunstgriff lösen, der noch einfacher ist als der von McColl etc. („by mere inspection") angewendete. Wir zerlegen jede der beiden Prämissensubsumtionen, deren Subjekt ja als Trinom erscheint gemäss Def. (3_+) in drei einzelne Subsumtionen, und werfen in einer jeden von diesen den Koeffizienten von links gemäss Peirce's Th. 41) nach rechts; so entsteht:

$$\begin{array}{ll} yz \Subset ef + fd + de + a_1\,, & y_1z_1 \Subset b_1c_1 + c_1a_1 + a_1b_1 + d\,, \\ zx \Subset \;\;"\quad\;\; "\quad\;\; " \;\; + b_1\,, & z_1x_1 \Subset \;\;"\qquad\;\; "\qquad\;\; " \;\; + e\,, \\ xy \Subset \;\;"\quad\;\; "\quad\;\; " \;\; + c_1\,, & x_1y_1 \Subset \;\;"\qquad\;\; "\qquad\;\; " \;\; + f. \end{array}$$

Addiren wir überschiebend jetzt diese sechs Subsumtionen und beachten, dass $y_1z_1 + z_1x_1 + x_1y_1$ gerade die Negation von $yz + zx + xy$ ist, so erhalten wir:

$$1 \Subset a_1 + b_1 + c_1 + d + e + f\,,$$

oder:

$$abc \Subset d + e + f\,,$$

was zu finden gewesen.

30. Aufgabe (Macfarlane, Math. Questions, Vol. 44, p. 48 .. 50).

Aus den mit Worten gegebenen Data:

$$ax + b_1y = c\,, \quad dx_1(e + y) = f$$

sollen die Klassen x, y als Unbekannte durch die übrigen ausgedrückt werden.

Die Auflösung soll hier mit allen Zwischenrechnungen gegeben werden. Aus der vereinigten Gleichung der Data:

$$(ax + b_1y)c_1 + (a_1 + x_1)(b + y_1)c + df_1x_1(e + y) + (d_1 + x + e_1y_1)f = 0$$

heben wir die Koeffizienten von y und y_1 hervor, und bilden ihr Produkt:

$$\{b_1c_1 + df_1x_1\}\ \{(a_1 + x_1)c + e_1f\} = b_1c_1e_1f + cdf_1x_1.$$

Aus diesen und den stehen gebliebnen Gliedern (welche weder y noch y_1 zum Faktor haben), heben wir die Koeffizienten von x und von x_1 hervor, um deren Produkt zu bilden:

$$(ac_1 + f)\,(bc + def_1 + cdf_1) = ac_1def_1 + bcf.$$

Letzteres, mit den bezüglich x und y konstanten Termen des vorigen Ergebnisses sowol als der vereinigten Gleichung vereinigt und gleich 0 gesetzt, ist die Resultante der Elimination von x nebst y, oder die zwischen den bekannten Klassen notwendig geltende Relation:

$$ac_1def_1 + a_1bc + bcf + b_1c_1e_1f + d_1f = 0,$$

welche leicht als

$$adc \in c + f,\quad bc \in a,\quad bcf = 0,\quad f \in (b + c + e)\,d$$

in Worten zu deuten ist. Um x zu finden, braucht man nur mehr die Gleichung mit der rechten Seite 0 aufzulösen, in welcher x und x_1 bezüglich die Faktoren des zuletzt ausmultiplizirten Produktes zu Koeffizienten haben. Da $bcf = 0$ ist, vereinfacht der Koeffizient von x_1 sich noch zu $(bc + cd + de)f_1$, und ist hienach die Auflösung:

$$(bc + cd + de)f_1 \in x \in (a_1 + e)f_1.$$

Ebenso heben wir noch aus der vereinigten Gleichung die Koeffizienten von x und x_1 hervor; das Produkt derselben ist:

$$(ac_1 + f)\,\{c(b + y_1) + df_1(e + y)\} = ac_1def_1 + bcf + cfy_1 + ac_1df_1y,$$

wovon eigentlich nur die beiden letzten Glieder auszurechnen gewesen. Diese zusammengezogen mit den nur y oder y_1 aber nicht x oder x_1 zum Faktor habenden Gliedern der vereinigten Gleichung geben die nach y aufzulösende Gleichung:

$$(b_1c_1 + ac_1df_1)y + (a_1c + e_1f + cf)y_1 = 0,$$

deren Auflösung ist:

$$a_1c + cf + fe_1 \in y \in c + b(a_1 + d_1 + f).$$

Zur Darstellung dieser letzteren (in der Zeichensprache) nimmt Herr Macfarlane den Raum von sieben Druckzeilen in Anspruch, zur Darstellung der Auflösung nach x deren viere, und habe ich nicht versucht, seine Resultate zu kontroliren, da der hervorgehobene Kontrast wol genugsam erkennen lässt, dass sein Verfahren weit entfernt sein muss, zu den zweckmässigsten zu gehören.

31. Studie. Um dem Leser, welchem Boole's grundlegendes Werk[4] vielleicht schwer zugänglich ist, eine Idee zu geben, in welcher Weise dort Probleme rechnerisch behandelt werden, wollen wir schliesslich ein paar Aufgaben dieses Autor's noch in seiner Manier lösen, obwol wir, wie schon angedeutet, dasjenige, was diese Manier von den neueren Behandlungsweisen unterscheidet, auf Grund der unver-

kennbaren Vorzüge dieser letzteren für endgültig abgethan halten, ihm nur historisches Interesse noch zuerkennend.

Vor allem sei die fundamentale **Aufgabe** behandelt, die Gleichung

$$ax + bx_1 = 0$$

nach x aufzulösen. Zu dem Ende muss im Einklange mit den Ergebnissen unsres § 23 zunächst $1 - x$ für x_1 geschrieben, die Gleichung also mit Boole[4] p. 155 in der Form angesetzt werden:

$$ax + b(1 - x) = 0.$$

Diese aufzulösen verfährt Boole wie bei den *arithmetischen* Gleichungen ersten Grades, bildend:

$$x(a - b) = -b, \quad x = \frac{b}{b - a},$$

und dieses Ergebniss wird von Boole nun als $f(a, b)$ betrachtet und in Gestalt von:

$$f(a, b) = f(1, 1)ab + f(1, 0)ab_1 + f(0, 1)a_1b + f(0, 0)a_1b_1$$

gemäss Th. 44_+) nach a und b „entwickelt". So ergibt sich ihm:

$$x = \frac{1}{1-1}\, ab + \frac{0}{0-1}\, ab_1 + \frac{1}{1-0}\, a_1b + \frac{0}{0-0}\, a_1b_1 =$$

$$= \frac{1}{0}\, ab + 0 \cdot ab_1 + 1 \cdot a_1b + \frac{0}{0}\, a_1b_1,$$

wobei ich davon absehe, dass auch für a_1, b_1 in der Regel nur $1 - a$, $1 - b$ von ihm geschrieben wird.

Da $\frac{1}{0}$ ein Unsinn wäre, falls es wirklich vorkäme, so muss es herausfallen, d. h. in einen verschwindenden Konstituenten, in 0 multiplizirt sein. Dies gibt die Valenzbedingung für x oder Auflösbarkeitsbedingung für die gegebne Gleichung, nämlich:

$$ab = 0$$

(d. i. unsre Resultante der Elimination des x), und da $\frac{0}{0} = u$ jeden erdenklichen Wert vorstellt, unbestimmt oder willkürlich bleibt, so haben wir:

$$x = a_1b + ua_1b_1$$

in Übereinstimmung mit unserm rein logisch gerechtfertigten Ergebnisse ν) des § 21.

Man sieht indess, dass hier Zwischenoperationen ausgeführt wurden, die einer logischen Deutung unfähig bleiben, wie z. B. nicht nur die Bildung des im identischen Kalkul jedes Sinnes ermangelnden Nenners $0 - 1$, sondern namentlich auch schon der Ansatz einer Differenz $b - a$, während a gar nicht in b enthalten!

Andere Aufgabe. In [4] p. 95..97 verlangt Boole, dass die Gleichung: $x = y(z + w)$ nach der Unbekannten y aufgelöst werde, wobei ihm bedeutet: x = verantwortliche Wesen, y = vernunftbegabte Wesen, z = Diejenigen, die Freiheit des Handelns haben, w = Solche, welche ihrer Freiheit sich freiwillig begeben haben.

Und er verfährt analog wie vorhin folgendermassen. Die arithmetische Lösung des Problems:

$$y = \frac{x}{z + w}$$

wird, als Funktion von x, z, w betrachtet, entwickelt nach dem Schema:

$$f(x, z, w) = f(1, 1, 1)xzw + f(1, 1, 0)xzw_1 + \cdots + f(0, 0, 0)x_1 z_1 w_1 .$$

Es entsteht, wenn wir die drei sofort herausfallenden Terme noch in Klammer mit anführen:

$$y = \frac{1}{2} xzw + 1 \cdot xzw_1 + 1 \cdot xz_1 w + \frac{1}{0} xz_1 w_1 +$$
$$+ \left(\frac{0}{2} x_1 zw + \frac{0}{1} x_1 zw_1 + \frac{0}{1} x_1 z_1 w\right) + \frac{0}{0} x_1 z_1 w_1 ,$$

und folgt hieraus erstens, dass die Konstituenten der beiden deutungsunfähigen Koeffizienten $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{0}$ verschwinden müssen, also

$$x(zw + z_1 w_1) = 0$$

sein muss, und zweitens, dass

$$y = x(zw_1 + z_1 w) + ux_1 z_1 w_1$$

gefunden ist, was dann leicht mit Worten zu interpretiren.

Instruktiv ist die Vergleichung dieses Ergebnisses mit dem nach unsrer Theorie sich ergebenden. Die Aufgabe fällt, wenn man $z + w$ mit *einem* Buchstaben bezeichnet, unter das Schema der in Aufgabe 13, ε) des gegenwärtigen Paragraphen schon gelösten (wobei die dort x genannte Unbekannte nur y heisst, wogegen $a = z + w$, $b = x$ hier als gegeben zu denken — vergl. auch § 23) und haben wir zuverlässig als Resultante:

$$xz_1 w_1 = 0$$

sowie als Auflösung:

$$y = x + uz_1 w_1 \quad \text{oder:} \quad x \neq\!\!\!\in y \neq\!\!\!\in x + z_1 w_1 .$$

Nach Th. 33_+) Zusatz kann statt des Terms $uz_1 w_1$ allerdings auch $ux_1 z_1 w_1$ gesetzt werden. Gleichwol deckt sich aber unser Ergebniss *nicht* mit dem Boole'schen, und die Abweichung erklärt sich aus dem Umstande, dass bei Boole die Summe $z + w$ als eine „reduzirte" verstanden wird, deren Glieder z und w als disjunkte das Produkt:

$$zw = 0$$

geben — bei uns jedoch im Allgemeinen nicht. Ziehen wir diese Gleichung als eine nach den Daten des Problemes selbstverständlich geltende

zu unsern Prämissen hinzu, so — aber erst dann — erweist sich (leicht) die völlige Übereinstimmung der beiderseitigen Ergebnisse.

Indem bei Boole sogar $x + x = 2x$, etc. gilt, so treten überhaupt, wie vorstehend, bei seinem Verfahren in den Gliedern des Resultates oft Zahlenfaktoren, wie $\frac{1}{2}$, $-\frac{2}{3}$, etc. als Koeffizienten auf, die er schliesslich als belanglose, nicht interpretable, über Bord wirft, die Konstituenten, mit denen sie behaftet erscheinen, gleich 0 setzend.

Ähnlich mag endlich zur Vergleichung herangezogen werden eine von den zahlreichen Aufgaben, die Boole knüpft an Senior's Definition von „wealth" (wörtlich des Reichtums, genauer wol dem volkswirtschaftlichen Begriffe des „Gutes" entsprechend). Prämisse ist:

$$w = st(p + r),$$

wo w = Gut, s = Dinge, die nur in begrenztem Vorrat verfügbar (limited in supply), t = übertragbar (transferable), p = Genuss verschaffend (productive of pleasure) und r = Leid vorbeugend (preventive of pain) bedeutet. Cf. [4] p. 106, sq.

Verlangt ist ein Ausdruck für w *ohne* Rücksicht auf r.

Wir würden systematisch aus der Gleichung:

$$w_1 st(p + r) + w(s_1 + t_1 + p_1 r_1) = 0$$

erst r eliminiren, die Resultante: $w_1 stp + w(s_1 + t_1) = 0$ sodann nach w auflösen und finden:

$$w = st(p + u) \quad \text{oder} \quad stp \Subset w \Subset st$$

— ein Ergebniss, das aber hier schon unmittelbar zu gewinnen war, indem man den Namen r des Eliminanden durch den u einer unbestimmten Klasse ersetzte!

Boole hingegen, welcher natürlich die Prämisse, da p und r sich gegenseitig nicht ausschliessen, in der Form ansetzen muss:

$$w = st(p + rp_1)$$

operirt, p_1 durch $1 - p$ ersetzend, wie folgt. Er schreibt die Gleichung:

$$w - st(p + r - rp) = 0,$$

bemerkt, dass das Polynom derselben für $r = 1$ in $w - st$ und für $r = 0$ in $w - stp$ übergeht, mithin

$$(w - st)(w - stp) = 0$$

die Resultante der Elimination von r ist. Ausmultiplizirt gibt dies (wegen $ww = w$, etc.) eine Gleichung:

$$w - wstp - wst + stp = 0$$

aus der sich:

$$w = \frac{stp}{st + stp - 1}$$

nach den Regeln der Arithmetik berechnet. [Statt dessen konnte aber auch jenes Polynom erst nach w entwickelt werden in der Gestalt:

$$(1 - st)(1 - stp)w + stp(1 - w) = 0,$$

woraus dann:

$$w = \frac{stp}{stp - (1 - st)(1 - stp)}$$

sich berechnete.] Beidemal ergibt sich durch die mühsame „Entwickelung" der rechten Seite als einer Funktion $f(s, t, p)$ übereinstimmend:

$$w = stp + \frac{0}{0} st(1 - p),$$

als ein auch unmittelbar einleuchtendes Ergebniss: Die wirtschaftlichen Güter bestehen aus allen übertragbaren Genussmitteln von begrenztem Vorrat und einem unbestimmten Reste (indefinite remainder) von nur in begrenzter Menge zur Verfügung stehenden übertragbaren Dingen, die keine Genussmittel sind.

Der Leser hat vielleicht den Eindruck, dass Boole's Verfahren sich — in Praxi wenigstens — doch ziemlich stark von meiner Modifikation desselben unterscheidet. —

Vierzehnte Vorlesung.

§ 26. Besprechung noch andrer Methoden zur Lösung der bisherigem Kalkul zugänglichen Probleme.

Das primitivste oder Ausmusterungsverfahren von Jevons. Lotze's Kritik, und Venn's graphische Modifikation des Verfahrens.

Es handelte sich im bisherigen stets um Probleme, deren Data ausdrückbar sind durch Subsumtionen (oder Gleichungen*)) zwischen Klassen oder Funktionen des identischen Kalkuls von solchen, und deren Lösung dann ebenfalls wieder durch Aussagen von dieser Form darstellbar ist. Es kam dabei darauf an, gewisse Klassen aus den Daten des Problems zu eliminiren, andere aus denselben in dem in § 21, o) erläuterten Sinne zu berechnen, d. h. ihre Subjekte und Prädikate aufzufinden, welche vermittelst der übrigen Klassen sich beschreiben lassen.

Ehe wir mit nächster Vorlesung in Band 2 diesen Kreis unsrer Aufgaben erweitern, wollen wir noch ein Weilchen bei den bisherigen verweilen um uns über die verschiedenen Methoden zu orientiren, welche zur Bewältigung dieser Aufgaben vorgeschlagen worden sind und zur Verfügung stehen.

Als solche zählt Herr Peirce in seiner grundlegenden Arbeit[5] in chronologischer Folge auf: die Methoden von Boole, Jevons, Schröder, McColl, denen er alsdann noch eine fünfte selbst hinzufügt. Wir werden sehen, dass diese nur auf dreie „wesentlich" hinauslaufen, von denen die von mir modifizirte Boole'sche Methode im bisherigen schon dargelegt und ausschliesslich angewendet worden ist. Durch diese ihm zuteil gewordene Modifikation erscheint das ursprüngliche Verfahren Boole's nunmehr als vollständig antiquirt (superseded) und dürfte künftig niemand mehr je auf dasselbe zurückgreifen. In seiner abgeänderten Gestalt jedoch wird dasselbe, denke ich, wol fort-

*) Diese besonders zu erwähnen könnte unterbleiben, da nach Def. (1) eine Gleichung äquivalent ist einem Paar von Subsumtionen.

leben, obwol ihm neuerdings durch McColl und Peirce ein ebenbürtiges Verfahren an die Seite gestellt ist. —

Das Verfahren von Jevons ist zwar ein kunstloses — wenn man will, das nächstliegende oder ursprünglichste — doch verdient es immerhin als eine besondere Methode (die zweite von oberwähnten dreien) hingestellt zu werden.

Im wesentlichen besteht dasselbe kurz gesagt darin: *dass man für die sämtlichen Klassen, von denen im Problem die Rede ist, alle Möglichkeiten hinschreibt, welche in Bezug auf das Vorkommen oder Nichtvorkommen einer jeden in Verbindung mit den andern denkbar sind, von diesen denkbaren Kombinationen alsdann alle diejenigen ausstreicht, welche durch die Data des Problemes als unzulässige ausgeschlossen werden, und aus den stehen bleibenden endlich herauszulesen sucht die Antwort auf die Fragen, die das Problem aufwirft.*

Von Jevons[1] p. 44 sq. zuerst 1864 auseinandergesetzt, ist, wie Herr Venn[1] p. 351 bemerkt, derselbe Gedanke schon früher, 1811, auch von Semler[1] p. 48 angedeutet.

Der erste der drei im Jevons'schen „*Ausmusterungs*verfahren" geforderten Prozesse deckt sich mit der „*Entwickelung*" im Sinne des Th. 44_+) *der identischen* 1 — welche die ganze Mannigfaltigkeit vorstellt der Individuen oder Objekte auf die das Problem Bezug nimmt — nach den im Probleme vorkommenden Klassensymbolen als Argumenten. Die Glieder und Konstituenten dieser Entwickelung sind eben jene „Kombinationen", die alle hinsichtlich dieser Klassen denkbaren Möglichkeiten repräsentiren. Anstatt dieselben mittelst Pluszeichen unter sich zu verknüpfen und die so gebildete Summe ausdrücklich gleich 1 zu setzen, wird man gewöhnlich vorziehen, gedachte Kombinationen bequemer nur einfach untereinander zu schreiben.

Man beginnt demgemäss damit, als erste Kombination hinzuschreiben: das Produkt sämtlicher vorkommenden Klassensymbole (indem man, wo etwa eine Klasse nebst ihrer Negation in den Data des Problems erwähnt sein sollte, sich für eine von beiden, etwa für die affirmativ ausgedrückte entscheidet). In dieser ersten Kombination ersetzt man das letzte Symbol durch seine Negation und erhält die zweite Kombination; in beiden bisherigen Kombinationen ersetzt man das vorletzte Symbol durch seine Negation und erhält zwei weitere Kombinationen. Man fährt so fort in allen bisherigen Kombinationen immer ein früheres Symbol durch seine Negation zu ersetzen, bis dieses auch für das erste Symbol geschehen ist, so werden sämtliche Kombinationen angesetzt sein.

Die Zahl der letzteren ist 2^n, wenn n die Anzahl der vorkommenden Symbole gewesen — vergl. S. 418 — und jede dieser 2^n Kombinationen ist ein Produkt von n Faktoren, wobei als Faktor ein jeder von den im

Problem zu verwenden gewesenen Buchstaben entweder unnegirt als solcher steht oder aber durch seine Negation vertreten ist.

Um beispielsweise die 7. Aufgabe des § 25 nach Jevons' Methode zu behandeln, würde schon der Ansatz von $2^7 = 128$ Kombinationen (welche je aus sieben Symbolen sich zusammensetzen) erforderlich sein. Man wird sich schwerlich dazu verstehen, für $n > 6$ die Operationen noch praktisch durchzuführen.

In dieser mit wachsender Zahl n so rasch zunehmenden Weitläufigkeit der Prozesse liegt eine erste und grosse Schwäche der Methode.

Behufs Ausführung des zweiten von der Methode geforderten Prozesses muss man eine jede der angesetzten Kombinationen im Geiste zusammenhalten oder vergleichen sowol mit der linken Seite, dem Subjekte, als eventuell mit der rechten Seite, dem Prädikate einer jeden in Form einer Subsumtion gegeben gedachten Prämisse des Problemes. Man muss ja zusehen ob die Kombination mit der Prämisse *verträglich* ist, oder *nicht*, um — im letztern Falle — die Kombination *auszustreichen*. Dieses geht genauer dargelegt in folgender Weise vor sich.

Beide Seiten der Prämisse mögen wir als Aggregate von Monomen uns dargestellt denken, sodass

$$S + S' + \cdots \mathrel{=\!\!\!\in} P + P' + P'' + \cdots$$

die Form unsrer Prämisse ist, wo die Glieder $S, S', \ldots P, \ldots$ selbst Produkte sein werden von höchstens n Symbolen (in der Regel weniger), hervorgehoben aus der Gruppe der überhaupt im Problem vorkommenden (n) Klassensymbole $a, b, c, \ldots$ und ihrer (n) Negationen $a_1, b_1, c_1, \ldots$

Man hat sich nun zu erinnern, dass nach § 8, $\varkappa$) die Pluszeichen der Subsumtion links, im Subjekte, mit „*und*“, rechts, im Prädikate aber mit „*oder*“ in Worte zu übersetzen sind, mithin die Prämisse fordert, dass wo die in S vereinigte Faktorenkombination vorliegt, *sowol, als auch* wo die in S' vereinigte vorliegt, etc. da auch vorliegen muss *entweder* die in P *oder* die in P', *oder* die in P'', etc. vereinigt erscheinende Kombination von Faktoren.

In Bezug auf die mit dieser Prämisse zu vergleichende Kombination (aus der Menge der 2^n angesetzten) — K möge sie für den Augenblick heissen — können nun verschiedene Fälle vorliegen.

Entweder sie ist — nach Th. $6_\times$) oder Prinzip I — einem der Subjekte $S, S', \ldots$ (eventuell auch gleichzeitig deren mehreren) eingeordnet, d. h. die sämtlichen Faktoren, aus denen sich eins dieser Subjekte zusammensetzt, treten auch als Faktoren in K auf, oder nicht.

Im letztern Falle treffen schon die Voraussetzungen der Prämisse für unsere Kombination K nicht zu, die Prämisse berührt die Kom-

bination gar nicht, geht sie nichts an, sagt überhaupt nichts in Bezug auf dieselbe aus. Die Kombination kann als mit der Prämisse *verträglich*, doch zu ihr *indifferent*, neutral, bezeichnet werden.*)

Im ersteren Falle fordert die Prämisse, dass die Kombination K nun auch mindestens einem der Prädikate $P, P', P'', ..$ eingeordnet sei, d. h. dass sie auch dessen Faktoren sämtlich in sich aufweise. (Sie muss deshalb mit letzteren der Reihe nach im Geiste zusammengehalten werden.)

Ist es der Fall, so erfüllt die Kombination K unsre Prämisse, sie ist nicht nur mit ihr *verträglich*, sondern sogar *konform* mit ihr gebildet, *in „Übereinstimmung"* mit derselben.

Ist es nicht der Fall, so *widerspricht* die Kombination K der Prämisse, wird von ihr als unzulässig hingestellt, ausgeschlossen, verboten, und muss ausgestrichen werden.

Um dies zur Stelle durch ein ganz einfaches Beispiel zu erläutern, so möge die Prämisse heissen: $ab_1 \Subset c_1$, d. h. die a, welche nicht b sind, sind auch nicht c (oder: wo die Merkmale von a vorliegen und Merkmale von b fehlen, da fehlen auch solche von c). Wie verhalten sich dann die drei Kombinationen: $a_1b_1cd_1$, ab_1c_1d und ab_1cd_1? Nun: die erste ist indifferent zu der Prämisse, als den Faktor ab_1 nicht in sich aufweisend; die zweite ist im Einklange mit der Prämisse, fällt unter dieselbe, da sie neben ab_1 auch c_1 aufweist; die dritte aber widerspricht der Prämisse, indem sie zwar ab_1, aber nicht c_1, vielmehr statt dessen c in sich als Faktor aufweist, dieselbe wäre demnach zu streichen, wogegen die beiden andern Kombinationen stehen bleiben können als von dieser Prämisse erlaubte (d. h. nicht verbotene) sofern sie nicht von andern Prämissen noch aufgehoben werden.

Ehe wir zur Besprechung des dritten und letzten Prozesses der Jevons'schen Methode übergehen, mögen die beiden vorigen an jenem Boole'schen Problem, der 1. Aufgabe des § 25 erprobt werden.

Citirenshalber legen wir uns die Prämissen α), β), γ) des Problems in folgender Fassung auseinander:

α) a_1c_1 bedingt bd_1c oder b_1dc;

β) ade_1 bedingt bc oder b_1c_1;

---

*) Ich bemerke, dass ich in meiner Darstellung mehrfach, und wie ich glaube verbessernd oder ergänzend, von Jevons abweiche, dessen Benennungen als excluded, included und contradictory „subject" mir unter anderm nicht ganz glücklich gewählt erscheinen.

$$\gamma)\begin{cases}\gamma')\begin{cases}\gamma_1')\ abe_1\\ \gamma_2')\ ab_1e\\ \gamma_3')\ abe\end{cases} & \text{bedingt} \begin{cases}cd_1 \text{ oder}\\ c_1d;\end{cases}\\[2ex] \gamma'')\begin{cases}\gamma_1'')\ cd_1\\ \gamma_2'')\ c_1d\end{cases} & \text{bedingt} \begin{cases}abe_1 \text{ oder}\\ ab_1e \text{ oder}\\ abe\end{cases}\end{cases}$$

— indem wir auch den Ausdruck $a(b+c) = a(be_1 + b_1e + be)$ nach den drei in ihm vorkommenden Symbolen entwickelten (was strenge genommen nicht nötig: man könnte auch mit $ab + ac$ schon die Überlegungen anstellen). —

Da fünf Symbole a, b, c, d, e in Frage kommen, so haben wir $2^5 = 32$ Kombinationen durchzugehen, die wir nachstehend geordnet und numerirt untereinander stellen.

Die *links* notirten Chiffren $\alpha), \beta), \gamma)$ von Prämissen erklären die danebenstehende Kombination als mit diesen übereinstimmende, als eventuell zulässig, die *rechts* notirten als ihnen widersprechende *unzulässige*, dergestalt, dass wo Erlaubniss (im vorerwähnten Sinne) und Verbot zusammentreffen, das Verbot zu gelten hat. Die Kombinationen, bei denen keine Prämissenchiffre angemerkt ist, sind die zu allen Prämissen indifferenten.

Kombinationen.

1)		$abcde - \gamma_3')$	17)		a_1bcde
2)	$\beta)$	$abcde_1 - \gamma_1')$	18)		a_1bcde_1
3)	$\gamma_3')\ \gamma_1'')$	$abcd_1e$	19)		$a_1bcd_1e - \gamma_1'')$
4)	$\gamma_1')\ \gamma_1'')$	$abcd_1e_1$	20)		$a_1bcd_1e_1 - \gamma_1'')$
5)	$\gamma_3')\ \gamma_2'')$	abc_1de	21)		$a_1bc_1de - \alpha)\ \gamma_2'')$
6)	$\gamma_1')\ \gamma_2'')$	$abc_1de_1 - \beta)$	22)		$a_1bc_1de_1 - \alpha)\ \gamma_2'')$
7)		$abc_1d_1e - \gamma_3')$	23)	$\alpha)$	$a_1bc_1d_1e$
8)		$abc_1d_1e_1 - \gamma_1')$	24)		$a_1bc_1d_1e_1 - \alpha)$
9)		$ab_1cde - \gamma_2')$	25)		a_1b_1cde
10)		$ab_1cde_1 - \beta)$	26)		$a_1b_1cde_1$
11)	$\gamma_2')\ \gamma_1'')$	ab_1cd_1e	27)		$a_1b_1cd_1e - \gamma_1'')$
12)		$ab_1cd_1e_1 - \gamma_1'')$	28)		$a_1b_1cd_1e_1 - \gamma_1'')$
13)	$\gamma_2')\ \gamma_2'')$	ab_1c_1de	29)	$\alpha)$	$a_1b_1c_1de - \gamma_2'')$
14)	$\beta)$	$ab_1c_1de_1 - \gamma_2'')$	30)		$a_1b_1c_1de_1 - \alpha)\ \gamma_2'')$
15)		$ab_1c_1d_1e - \gamma_2')$	31)		$a_1b_1c_1d_1e - \alpha)$
16)		$ab_1c_1d_1e_1$	32)		$a_1b_1c_1d_1e_1 - \alpha)$

Die rechts glossirten Kombinationen sind ausgestrichen zu denken. Man bemerkt, dass einige von den Fällen: 21, 22, und 30), sich zweimal in den Prämissen verboten finden. Natürlich, nachdem sie ein erstes mal als solche erkannt und gestrichen worden, war es ein Luxus, uns davon zu überzeugen, dass sie nochmals daselbst ausgeschlossen werden, und seitens welcher Prämissen; man durfte sie von da beim Durchgehen der letztern überspringen.

Die rechts unglossirten Kombinationen oder Fälle sind die zulässigen. Es sind die elfe mit den beigefügten Nummern, die wir uns übersichtlich nochmals herausschreiben in eine

Tabelle:

3) $abcd_1e$
4) $abcd_1e_1$
5) abc_1de
11) ab_1cd_1e
13) ab_1c_1de
16) $ab_1c_1d_1e_1$
17) a_1bcde
18) a_1bcde_1
23) $a_1bc_1d_1e$
25) a_1b_1cde
26) $a_1b_1cde_1$.

Der oben gegebenen Andeutung zufolge muss nun diese Tabelle uns vertreten eine Gleichung, in welcher die Summe der elf in ihr zusammengestellten Kombinationen gleich 1 gesetzt wird. Wurde sie doch aus der vollständigen Entwickelung der 1 erhalten, indem man alle diejenigen (einundzwanzig) Glieder oder Konstituenten fortliess, welche kraft der Prämissen verschwinden!

Aus dem Anblick der Tabelle kann man ohne weiteres entnehmen, dass — worauf wir unter der 1. Aufgabe schon aufmerksam machten — die Kombination ade_1 überhaupt nicht vorkommt, dass hier $ade_1 = 0$ sein muss. Es ist das jener von Boole sicherlich nicht beabsichtigte vielmehr bei der Formulirung seiner Aufgabe wol übersehene Umstand, zufolge dessen seine Prämisse β) einen vexatorischen Charakter bekam. Ausser auf die in § 25 angedeutete Weise würde sich dies auch noch vermeiden lassen, indem man der Prämisse β) anstatt der angegebenen positiven die negative Fassung gäbe „dass in Abwesenheit von E die Merkmale A und D zusammen niemals mit B ohne C sowie mit C ohne B sich vorfinden" — was einfach auf den Ausschluss der Elementarfälle oder Kombinationen 6) und 10) hinausliefe.

Wir kommen nun zu den letzten im Jevons'schen Verfahren geforderten Prozessen welche dahin zielen, dass aus den stehen gebliebenen Kombinationen herausgelesen werde die Antwort auf die im Probleme aufgeworfenen Fragen, betreffend entweder die Resultante der Elimination eines Symbols, oder auch die Auflösung der Data nach einer Unbekannten.

Die Behandlung, welche Jevons diesen letzten Teilen seiner Methode angedeihen lässt, ist entschieden der schwächste Punkt in seiner Darstellung, weshalb ich mich auch nicht mehr an diese halte. Ist es doch keineswegs unsre Absicht, eine Geschichte aller irgend gemachten verfehlten oder unzulänglichen Versuche zu schreiben — ansonst das tausendfache Volumen dieses Buches nicht ausreichen würde!

Nach den anderwärts — vergl. § 21 unter η) rechts vom Mittelstriche — gegebenen Andeutungen ist es nun aber ein Leichtes, auch das Eliminationsproblem noch glatt zu lösen:

Die *Elimination* eines Symbols ist darnach einfach zu leisten, indem man aus der Tabelle der stehen gebliebenen Kombinationen den Eliminanden (nebst seiner Negation, wo immer er als Faktor steht, und er tritt eben nur als solcher auf) unterdrückt, weglöscht. Eine jede dabei wiederholt als Rückstand bleibende Kombination aber wird man natürlich — cf. Tautologiegesetz 14_+) — nur *ein*mal beibehalten, das zweite mal fortlassen.

So liefert nun die im obigen Problem geforderte Elimination von e aus unsrer Tabelle die Resultante:

$$1 = abcd_1 + abc_1d + ab_1cd_1 + ab_1c_1d + ab_1c_1d_1 + a_1bcd + a_1bc_1d_1 + a_1b_1cd,$$

wo der erste von den acht Termen rechterhand aus den Kombinationen 3) und 4), der drittletzte aus 17) und 18), der letzte aus 25) und 26) — wenn man will auch schon gemäss Th. 30_+) — zusammengezogen ist.

Zufällig sind die acht Konstituenten in vorstehender Gleichung gerade die Hälfte der $2^4 = 16$, welche die Entwickelung der 1 nach den Symbolen a, b, c, d (ohne e) zusammensetzen. Die übrigen achte treten in der linken Seite der Gleichung ζ) der 1. Aufg. des § 25 auf, wenn man diese vollends (auch nach b) entwickelt. Unser Ergebniss stimmt also überein mit dem dort (viel bequemer) gefundenen.

Eliminirt man aus ihm a auf die angegebene Weise, so ergibt sich weiter nichts, als die Entwickelung der 1 nach den Argumenten b, c, d mit ihren $2^3 = 8$ Gliedern, also eine analytische Identität, durch welche die zweite der im Problem gestellten Fragen sich erledigt.

Eliminirt man b, so folgt:

$$1 = acd_1 + ac_1d + ac_1d_1 + a_1cd + a_1c_1d_1,$$

welche fünf Glieder die dreie in Gleichung ι), l. c. in der That zur vollständigen Entwickelung der 1 nach den Symbolen a, c und d ergänzen — und die vierte Frage des Problems beantworten. —

Das Äquivalent der *Auflösung* nach einer Unbekannten endlich wird nun bei dieser Methode darin zu erblicken sein, dass man aus der Resultante oder Zusammenstellung der stehen gebliebenen Kombinationen diejenigen Kombinationen der übrigen Symbole herauszulesen vermag, welche als Koeffizienten mit dieser Unbekannten selbst, sowie diejenigen welche mit ihrer Negation ausschliesslich verknüpft sind.

So kommt — in Beantwortung der ersten Frage unsres speziellen Problems — die Klasse a *nur* vor in Verbindung mit

$$bcd_1 + bc_1d + b_1cd_1 + b_1c_1d + b_1c_1d_1,$$

und wo eine von diesen fünf Kombinationen vorliegt, da *kann* auch a sich finden; a_1 aber kommt nur mit den dreien

$$bcd + bc_1d_1 + b_1cd$$

verbunden vor; und entweder bei mindestens einer von den fünfen wird a oder bei mindestens einer von den dreien wird a_1 sich auch finden *müssen*, da nicht alle Glieder, deren Summe ja $= 1$ ist, zugleich verschwinden können.

Ebenso kommt — in Beantwortung der dritten Frage — b nur vor in Verbindung mit:

$$acd_1 + ac_1d + a_1cd + a_1c_1d_1$$

und b_1 nur mit: $\quad acd_1 + ac_1d + ac_1d_1 + a_1cd.$ —

Eine schwache Seite des Verfahrens *bleibt* darin bestehen, dass man diese Antworten in einer unübersichtlichen Form, nach allen restirenden Symbolen gleichmässig entwickelt gewinnt, und es nun noch dem analytischen Geschick des Rechners überlassen bleiben muss — resp. der Willkür in Bezug auf die Auswahl unter den verschiedenen Arten, auf welche dazu das Th. 30_+) sich verwenden lässt — die Beschreibung dieser die Antwort enthaltenden (Aggregate von) Klassen weiter zu vereinfachen!

Ich möchte hier mit ein paar Worten auf Bemerkungen von Lotze in seiner „Anmerkung über logischen Calcül“ (Zweite Auflage seiner Logik[1] p. 266 und 267 — das Vorwort datirt vom 6. Sept. 1880) eingehen, da dieselben geeignet erscheinen, eine irrige Ansicht über das Verhältniss der rechnerischen Methoden zu dem Verfahren von Jevons hervorzurufen und zu verbreiten.

In thatsächlicher Hinsicht ist zunächst zu erwähnen: die Schluss-

bemerkung Boole's bei seinem (als 1. Aufgabe in unserm § 25 behandelten) Probleme „I have not attempted to verify these conclusions" hatte Lotze, wie er mir schrieb veranlasst, diese Verifikation zu versuchen. Boole's Fassung der Prämisse β), welche eine Kombination ($abcd$) als „beobachtet" hinstellt, die nach den Konklusionen dann gar nicht vorgekommen sein kann, führte ihn jedoch dabei irre, und wandte er sich nach einem erfolglosen Anlauf dieserhalb brieflich (19. April 1880) an mich, worauf ich am 22. April ein Antwortschreiben abgehen liess, welches nebst dem Hinweis auf Badorff's Wahrnehmung (S. 528) die oben (S. 563 sq.) gegebene Zusammenstellung der glossirten Kombinationen mit den zugehörigen Erläuterungen nahe wörtlich enthielt. Ich hatte dieselbe — ohne noch von irgend welchen Schriften Jevons' damals Kenntniss zu haben, jedoch nach dem Vorgange meines damaligen Kollegen, Herrn Lüroth — schon zuvor entworfen. Nach einem späteren Schreiben muss Lotze meinen Brief auch erhalten haben.

Ich will nun nicht davon reden, dass die Bemerkung Lotze's p. 266, dass der „passendere" Weg „sich ganz von selbst darbietet", sowie p. 267, dass Jevons das Verfahren nicht erst entdeckt zu haben brauchte, da es in der Anweisung zu Klassifikationen längst vorgelegen, mit seiner anfänglichen Hülflosigkeit einigermassen kontrastirt. Jedenfalls auch lag für Lotze keine Verpflichtung vor, jener kleinen Beihülfe meinerseits zu erwähnen, welche sich ja blos als Bethätigung einer schon anderweitig bekannten (mir zwar seitdem erst als solche kund gewordnen) „Methode" von Jevons erwies.

Was ich aber im sachlichen Interesse sagen zu sollen glaube, ist folgendes.

Indem Lotze bei seiner Besprechung des Boole'schen Problems sich darauf beschränkt, lediglich die „Tabelle" der elf stehen bleibenden Kombinationen (von S. 564) hinzusetzen, und von den übrigen meint, dass sie schon gleich während des „ganz mechanischen" Verzeichnens derselben zu unterdrücken waren, erweckt er den Anschein, als ob (hier) die rechnerische Behandlung des Problems gegenüber einer solchen nach dem gemeinen Verstande einen ganz übermässigen Arbeitsaufwand erheische, auch einen erheblich grösseren Druckumfang in Anspruch nehme; er verhilft dem kunstlosen Zuwerkegehen gegenüber dem wissenschaftlichen zu einem billigen und unverdienten Triumphe.

Kaum möchte selbst dem Scharfsinn eines Lotze zuzutrauen sein, dass er es praktikabler finde hier schon während des Verzeichnens diejenigen Kombinationen zu unterdrücken, „welche durch die Gesamtheit der gegebenen Bedingungen ausgeschlossen sind". Jedenfalls aber ist die von Lotze so geschickt verhüllte mühsame Geistesarbeit (der wir in der Absicht, sie in extenso darzulegen, auf S. 563 unter der Überschrift „Kombinationen" einen doch immer noch unzulänglichen Aus-

druck gegeben haben) beim Jevons'schen Verfahren gar nicht zu vermeiden; sie muss durch mentale Vergleichung einer jeden von den 32 Kombinationen je mit fast allen der (14 resp.) 16 Prämissensubjekte und ev. -Prädikate doch wirklich geleistet werden.

Nun pflegt bei einer *Methode* schon eine geringe Arbeitsersparniss sehr wichtig zu sein wegen der unbegrenzten Häufigkeit, mit der sie sich anbringen lässt, und bei einer Vergleichung zwischen verschiedenen Methoden sind selbst geringfügige Unterschiede in dieser Hinsicht nicht zu verachten. Hier aber ist der Unterschied zugunsten der Rechnung für sich schon ein ganz beträchtlicher und Jeder, der die beiderlei Arbeiten durchgemacht, wird mir beipflichten, wenn ich bestreite, dass jener Jevons'sche Weg hier „der *passendere*" gewesen. Er ist es wol überhaupt nie, doch um so weniger, je grösser die Anzahl der in Betracht zu ziehenden Symbole.

Die ganze „Anmerkung über logischen Calcül", auf deren sonstige Auslassungen hier einzugehen ich verzichte, ruft doch in etwas den Ausspruch Melanchthon's zu Sinn: „Den alten Lehrmeistern gefällt nicht die neue Lehre"! —

Ähnliche Bemerkungen, wie in Bezug auf die Jevons'sche Methode, treffen auch hinsichtlich Herrn Hermann Scheffler's Verfahren zu, welches nur eine geringfügige Modifikation der vorigen ist.

Auch er behandelt in [1] auf p. 739 .. 742 das Boole'sche Problem — unsern Prüfstein für die Methoden — und zwar, wie gesagt, wesentlich in Jevons' Weise, indem er nur: erstlich die negirten Fälle als Faktoren unterdrückt, was eine kleine Druckersparniss bildet, dafür die positiv vorhandenen Merkmale zwischen Vertikalstriche einschliessend — so bedeutet ihm $|a|$ die Klasse der Fälle, wo das Merkmal a *allein*, ohne eines der vier übrigen vorliegt (was uns $ab_1c_1d_1e_1$ darstellt), desgleichen $|ab|$ die Klasse der Fälle, wo nur die Merkmale a und b verbunden, jedoch ohne c, d und e, auftreten (was also bislang durch $abc_1d_1e_1$ dargestellt wurde), etc. — und indem er zweitens, anstatt der Gesamtheit 1 aller denkbaren Fälle, die Klassen a, b, c, d, e selber nach den (positiven) Symbolen „entwickelt". Letzteres ist kein Vorteil, indem es ihn nötigt, nach dem Vorbild:

$$a = |a| + |ab| + |ac| + |ad| + |ae| + |abc| + |abd| + |abe| + |acd| +$$
$$+ |ace| + |ade| + |abcd| + |abce| + |abde|^{*)} + |acde| + |abcde|$$

nun $5 \times 16 = 80$ Glieder — statt unsrer 32 — hinzuschreiben und sichtend (ev. streichend) durchzugehen.

Nach den Prämissen — vergl. unsre „Tabelle" auf S. 564 — bleiben z. B. von diesen 16 Gliedern nur die sechs folgenden stehen:

$$a = |a| + |abc| + |ace| + |ade|^{**)} + |abce| + |abde|$$

---

*) Dieses Glied findet sich bei ihm ausgelassen.

**) Bei Scheffler ist dieses Glied fälschlich durch $|ac|$ vertreten, welches

und wird der Leser leicht aus dem Anblick jener Tabelle sich die analogen Entwickelungen von b, c, d und e auch in dieser Symbolik herausschreiben. —

Von einigem Interesse sind noch Schlüsse die Herr Scheffler am Schlusse zieht, von der Art der folgenden: dass, wenn nur ein einziges Merkmal erscheint, dieses nur a sein kann, dass wenn überhaupt vier Merkmale zusammen erscheinen, darunter immer b und e sind, etc. Solche Schlüsse zu ziehen die halb arithmetischer Natur sind, scheint nicht direkt in das Ressort unsres Kalkuls zu gehören. Dagegen wird sie der Leser leicht in der Tabelle der 11 zulässigen Fälle bestätigt erblicken oder aus dieser entnehmen.

Herr Scheffler veranschaulicht schliesslich das Boole'sche Problem auch noch durch eine Figur (in der nachher zu besprechenden Manier des Herrn Venn, der ihm darin zuvorgekommen) — die aber unbrauchbar ist, weil sie das ganze Feld 1 nur in 31 anstatt in 32 Felder zerlegt, sonach von allen denkbaren Fällen von vornherein einen unberücksichtigt lässt.

Dass es Herrn Scheffler „nicht ganz klar" geworden, wieso zwischen den Merkmalen b, c, d keine unabhängige Beziehung resultiren soll, während er doch den Fall $|cd|$ nebst $|bcd|$ als einzig zugelassen konstatirt, liegt an der Unzulänglichkeit seiner Bezeichnung. Der Fall $|bcd|$ z. B. weist *nicht* auf eine solche Beziehung hin, indem er ja das Fehlen der Merkmale a und e unweigerlich — nur eben leider nicht „ausdrücklich" — fordert. Die obenerwähnte kleine Druckersparniss war also nicht umsonst zu haben, sondern muss mit dem Zustand des ungedeckten Irrtümern-Ausgesetztseins erkauft werden. —

Herr Venn zieht in seinem mehrerwähnten Werke[1] im Grunde auch die Jevons'sche Methode noch den übrigen vor. Er gibt derselben aber — wenigstens soferne nicht mehr als fünf Klassensymbole beim Problem in Betracht kommen — eine graphisch anschauliche Gestalt, die Beachtung verdient. Er verwendet Diagramme nach Art der Euler'schen, macht aber einen eigentümlichen Gebrauch von der *Schraffirung*. Während in meiner Schrift[2] ich, gleichwie im Bisherigen, mich dieses Veranschaulichungsmittels blos bedient hatte um gewisse (Flächen-)Gebiete vor den übrigen hervorzuheben, legt Herr Venn dem Schraffiren die Bedeutung des Ausstreichens, einer *Tilgung* bei. Durch Schraffiren soll ein im allgemeinen logisch denkbares Gebiet, resp. eine Klasse, als eine nach den Daten des vorliegenden Problemes nicht vorhandene, als eine verschwindende oder leere gekennzeichnet werden.

---

auch in seiner Entwickelung von c gestrichen werden muss; bei d und e fehlt ihm das Glied $|ade|$, sodass von den fünf Entwickelungen, die er gibt, nur die von b richtig ist. Es zeigen wol schon die vielen Fehler, in welche Herr Scheffler verfällt, dass die vermeintlichen Vorzüge seines Verfahrens illusorisch sind; auch spricht es nicht zugunsten des letzteren, ist vielmehr in Hinsicht dessen lehrreich, dass ihm trotz dieser Fehler die Diskrepanz seiner Resultate mit denen von Boole und mir gar nicht auffällt, er vielmehr diese nur einfach bestätigt findet.

Ein von ihm gegebenes einfaches Beispiel wird die Sache sogleich klar machen.

Prämissen eines Problems seien: $a \mathrel{=\!\!\!\!\in} b$ (oder $ab_1 = 0$) und $bc = 0$. So werden die Data nach Euler'scher Weise durch die Figur 21 darzustellen sein, aus welcher auch direkt ersichtlich ist, dass $ac = 0$ sein wird — ein Schluss, der rechnerisch durch Elimination von b aus den Prämissen gezogen werden kann (Bekannter Syllogismus — vergl. „Celarent" und „Cesare" in § 42).

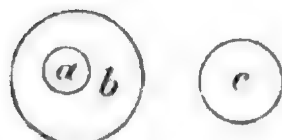


Fig. 21.

Statt dessen veranschaulicht Venn die Data mittelst der Figur 22, in welcher die Gebiete ab_1 (wagrecht) und bc (hier senkrecht) sich ausgestrichen finden. Man erkennt auch hier sogleich, dass ac völlig ausgestrichen ist.

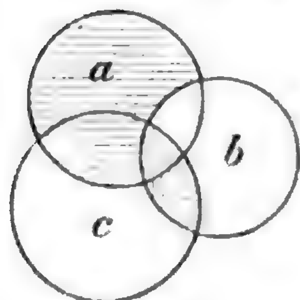


Fig. 22.

Für Probleme, die sich auf zwei, drei, vier oder fünf Klassen a, b, c, d, e beziehen, empfiehlt demgemäss Herr Venn die durch die handlichen Figuren 23, 24, 25 u. 26 dargestellten Schemata, welche etwa durch Überdruck zu vervielfältigen und bei jedem derartigen Problem ganz stereotyp zu verwenden sind. [In den ersten beiden Figuren erblicken wir kongruente Kreise, in der dritten als Gebiete a, b, c, d vier kongruente Ellipsen, in der vierten

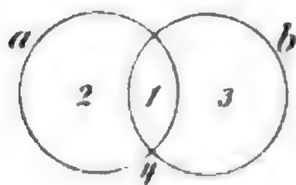


Fig. 23.

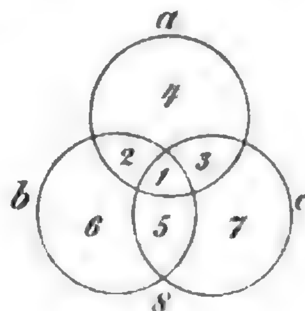


Fig. 24.

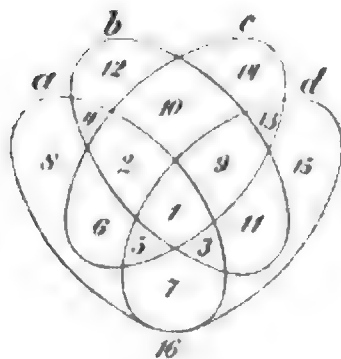


Fig. 25.

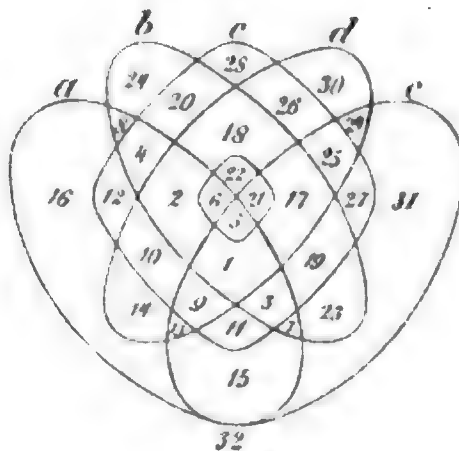


Fig. 26.

aber neben zwei Paar kongruenter Ellipsen a, c und b, d noch eine ringförmige Fläche c in Gestalt einer Raute mit abgerundeten Ecken. Herr Venn verwendet andere Buchstaben.]

Die Figuren zerschneiden je die ganze Ebene, den Konstituenten der Entwickelung von 1 entsprechend richtig in resp. 4, 8, 16 und 32 Felder.

Ich habe diese Felder numerirt so, dass die Nummern angeben die Stellenzahl des betreffenden Konstituenten von

$$1 = ab + ab_1 + a_1b + a_1b_1, \quad \text{resp.}$$

$$1 = abc + abc_1 + ab_1c + ab_1c_1 + a_1bc + a_1bc_1 + a_1b_1c + a_1b_1c_1, \quad \text{resp.}$$

$$1 = abcd + abcd_1 + abc_1d + abc_1d_1 + ab_1cd + ab_1cd_1 + ab_1c_1d + ab_1c_1d_1 +$$
$$+ a_1bcd + a_1bcd_1 + a_1bc_1d + a_1bc_1d_1 + a_1b_1cd + a_1b_1cd_1 + a_1b_1c_1d + a_1b_1c_1d_1,$$

resp. bei der letzten Figur die Nummer der betreffenden Kombination in der Zusammenstellung, gegeben beim letzten nach Jevons' Methode behandelten Problem auf S. 563, welche Kombination jeweils eigentlich selbst, als durch das Feld veranschaulicht, in ebendieses hineinzuschreiben wäre.

Demgemäss veranschaulicht und zugleich damit *löst* Herr Venn das nunmehr wohlbekannte Boole'sche Problem durch die Fig. 27 in welcher blos unterblieben ist, auch das Aussenfeld (32) zu schraffiren, und ausserdem ihm das Versehen zu verbessern war, das Feld 24 der Fig. 26 freigelassen zu haben (vergl. Venn[1] p. 281).

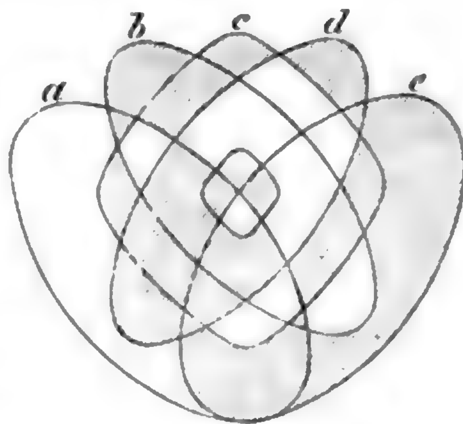


Fig. 27.

Übrigens schliesst es auch einen Fortschritt gegenüber dem ursprünglichen Jevons'schen Verfahren in sich, dass Venn diesen Strich der Felder nicht im Hinblick auf das Kombinationensystem der nach allen Symbolen gleichmässig entwickelten Einheit vollzieht [wie sie beim vorliegenden Problem auf S. 563 angegeben], sondern im Hinblick auf die Glieder der einzeln rechts auf 0 gebrachten Prämissengleichungen, wie sie sich in unsrer vereinigten Gleichung jeweils zusammengestellt finden [so oben bei ε) der 1. Aufg. des § 25]. Gewisse von diesen Gliedern — nämlich die aus weniger Faktoren zusammengesetzten — werden sich dabei als von grösserer Tragweite („scope") erweisen als die andern, nämlich den Strich ganzer Komplexe von Elementarfeldern auf einmal erheischen.

Zur ferneren Illustration sei auch Venn's graphische Behandlung der 10. Aufgabe des § 25 hergesetzt (Fig. 28), wobei wir die aus dem Gebiet w herausgelesenen Felder horizontal schraffirt, das übrig bleiben sollende Feld durch einen Punkt hervorgehoben und diejenigen vier Felder die darnach verschwinden mussten, vertikal schraffirend ausgestrichen haben, demgemäss das Feld $x_1 yzw$ nach beiden Richtungen schraffirend.

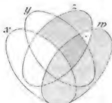


Fig. 28.

Zum Schlusse seien noch ein paar Probleme Venn's angeführt, bei welchem sein Verfahren in der That vielleicht bequemer erscheint als irgend ein rechnerisches.

Die von Jevons[1] p. 64 aufgestellten Data:

$$a = b + c, \quad b = c_1 + d_1, \quad c_1 d_1 = 0, \quad ad = bcd$$

seien zu vereinfachen.

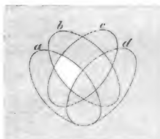


Fig. 29.

Schraffiren („shading out") aller Felder, die durch diese Prämissen als leere hingestellt werden, liefert die Fig. 29, aus welcher sofort ersichtlich, dass

$$a = b = c = 1, \quad d = 0$$

sein muss, indem eben nur das Feld abc noch übrig bleibt.

Rechnerisch würde sich dieses Resultat ebenfalls ergeben, indem man die vereinigte Gleichung:

$$ab_1 c_1 + a_1 (b + c) + bcd + b_1 (c_1 + d_1) + c_1 d_1 + (ab_1 + ac_1 + a_1 bc)\, d = 0$$

etwa nach a entwickelte, wodurch sich

$$a\,(b_1 + c_1 + d) + a_1 \cdot 1 = 0$$

mit einiger Mühe ergäbe; es muss sonach in der That $a_1 = 0$, das heisst $a = 1$, hernach auch $b_1 + c_1 + d = 0$ sein, etc.

Treffend widerlegt Herr Venn[1] p. 148 Fussnote die Bemerkung von Jevons, l. c. dass die obigen Data zweifellos einander widersprechende („contradictory") seien, auf die wir in Anhang 6 zurückkommen müssen, weil die ihr zugrunde liegende falsche Anschauung Jevons vielfach zur Aufstellung ungeeigneter Ergebnisse geführt hat.

Ähnlich kommt Venn[5] p. 15 von den Daten aus:

$$y \Subset xz_1 + zx_1, \quad wy \Subset xz + x_1 z_1, \quad xy \Subset w + z, \quad yz \Subset x + w$$

zur Anlegung der Figur 30, aus welcher auf den ersten Blick einleuchtet, dass

$$y = 0$$

der ganze logische Gehalt (import) des Prämissensystems sein muss.

In der That erhalten wir dieses Ergebniss auch als dessen „vereinigte Gleichung", welche hiernach zusammenfallen wird mit der Resultante der Elimination von x, z oder w — einzeln, oder in einer Partie, oder insgesamt — aus dem Prämissensysteme.

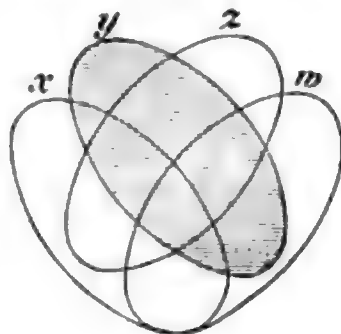


Fig. 30.

Vergl. auch Math. Quest. vol. 34 p. 51, wo dieselbe Aufgabe mit vertauschtem x und y gestellt und — umständlicher — von McColl gelöst ist. Dagegen löst sie auf die vorstehende Weise Herr R. Harley, ibid. p. 74.

§ 27. Methoden von McColl und Peirce.

Die Methode, welche Herr Peirce in seiner grundlegenden Arbeit[5] p. 37 .. 42 als fünfte — meiner Auffassung nach: dritte — den übrigen hinzufügt, ist äusserst beachtenswert und genial, wenn auch seine Darstellung derselben einzelnes zu wünschen lässt.

Ich möchte das Verhältniss dieser Methode zur modifizirten Boole'schen vorweg im Bilde charakterisiren. Bei dieser wurden die verschiedenen Knäuel der Prämissen oder Data des Problems erst fest zu einem einzigen Knoten geschürzt (der vereinigten Gleichung) und dieser dann durchhauen (bei der Elimination).

Beim Peirce'schen Verfahren aber werden jene Knäuel in ihre dünnsten Fäden auseinandergelegt und die erforderlichen einzeln zerschnitten (oder auch neu nach Bedarf verknüpft) — wogegen die Jevons'sche Methode sogleich ein Häcksel aus dem Ganzen machte! Ich denke zu zeigen, dass durch eine geringfügige Abänderung der Peirce'schen Tendenz unter Beibehaltung seiner Schlussweisen, indem man nämlich jene Knäuel immer nur so weit auseinandernimmt, als erforderlich, um den Eliminanden resp. die Unbekannte frei zu bekommen, dasjenige Verfahren entsteht, welches für gewöhnlich den Vorzug verdienen dürfte — wobei sich das Verfahren aber dem McColl'schen genähert haben, nicht mehr allzuweit von demselben verschieden sein wird.

Wenn Herr Peirce von seiner Methode sagt, dass sie „perhaps is simpler and certainly is more natural than any of the others", so muss ich ihm in Bezug auf die grössere Natürlichkeit Recht geben,

obwol es beim ersten Blick auf die sechs „Prozesse" aus denen sie sich zusammensetzt, durchaus nicht so scheint. Die (nur eventuell) grössere Einfachheit wird erst erreicht bei der angedeuteten Abänderung, die ich vorschlage.

Ich will zuerst versuchen, eine möglichst getreue Darstellung seiner Methode zu geben, was ich indess nicht thun kann, ohne einige Ergänzungen beizufügen und gelegentliche Kritik zu üben.

Methode von Peirce.

Erster Prozess. Man drücke alle Prämissen mittelst der Kopula $⋹$ aus*), beachtend, dass nach Def. (1) $a = b$ dasselbe sagt, wie $a ⋹ b$ *und* $b ⋹ a$. Die Prämissen werden sich darnach als ein System von lauter *Subsumtionen* darstellen.

Zweiter Prozess. Man „entwickele" jedes *Subjekt* in Form einer *Summe* gemäss Th. 44_+) und dual entsprechend jedes *Prädikat* in Form eines *Produkts* gemäss Th. $44_\times$) nach den in ihm vorkommenden Buchstabensymbolen — indem man etwa im Einklang mit den im § 19 auseinandergesetzten Methoden links das Schema:

$f(x) = f(1)\,x + f(0)\,x_1$, rechts das $f(x) = \{f(0) + x\}\,\{f(1) + x_1\}$

bezüglich jeden Buchstabens wiederholt in Anwendung bringt.

Als das „leichteste" Verfahren stellt Peirce hier ein gewisses hin, auf das ich erst in der Anmerkung nachher eingehen will.

Ich muss aber bemerken dass eine vollständige „Entwickelung" schon im Sinne der Peirce'schen Methode gar nicht erforderlich ist. Es ist

---

*) Hier muss ich zuerst bemerken, dass Peirce bei seinem ersten und dritten Prozesse auch das Beziehungszeichen $\not⋹$ der „Subsumtionenverneinung" in den Kreis seiner Betrachtungen zieht, mithin auch verneinte Subsumtionen als unter den Prämissen vorkommend mit zuzulassen scheint. Die Möglichkeit solchen Vorkommens verliert er aber beim Schildern der übrigen Prozesse vollständig aus den Augen, unterlässt namentlich zu sagen, was mit den entstehenden Alternativen von negirten Subsumtionen nach seiner Absicht anzufangen wäre, wie denn nun aus ihnen unter sich und in Verbindung mit den positiven Subsumtionen die Eliminationen zu vollziehen wären u. s. w.

Abgesehen davon, dass wir bei solcher Erweiterung des Kreises zugelassener Prämissen das Verfahren erst unter dem Aussagenkalkul berücksichtigen und besprechen könnten, muss dies aber schon darum unterbleiben, weil ein solches überhaupt nicht vorliegt, die Methode nach dieser Richtung nicht ausgebildet, unfertig, ja auf wenige ganz rudimentäre Andeutungen beschränkt erscheint.

Ich muss zudem bezweifeln, dass sie sich durch irgend naheliegende Modifikationen den sechs Prozessen entsprechend ergänzen liesse. Cf. § 46, 10. und 11. Aufgabe.

völlig ausreichend, wenn man nur die Subjekte in „letzte Aggreganten", die Prädikate in „letzte Faktoren" im Sinne des § 13 zerlegt, jene also ausmultiplizirend je als Summe von monomischen Produkten einfacher Symbole darstellt, diese aber gemäss dem dualen Gegenstück 27_+) des Distributionsgesetzes jeweils in ein Produkt von Summen einfacher Symbole verwandelt.

Während z. B. nach Peirce ein Prädikat $x + yz$ in

$$(x + y + z)(x + y + z_1)(x + y_1 + z)$$

dual „entwickelt" werden sollte, genügt bereits dessen Zerlegung in $(x + y)(x + z)$. Und analog wird auch allgemein das letzterwähnte Verfahren seiner grösseren Einfachheit halber den Vorzug verdienen.

Nach Ausführung des zweiten Prozesses werden also als Subjekte nur Summen von Produkten, als Prädikate nur Produkte von Summen aus einfachen Symbolen auftreten — und das genügt.

Dritter Prozess. Gemäss den Schemata der Def. (3), wonach eine Subsumtion der Form

$$b + c + d + \cdots \Subset a \qquad\qquad | \qquad\qquad a \Subset bcd \cdots$$

äquivalent ist dem Systeme von Subsumtionen:

$$\begin{array}{ll|ll} b \Subset a & \text{oder } \left.\begin{matrix} b \\ c \\ d \\ \vdots \end{matrix}\right\} \Subset a & a \Subset b & \text{oder } a \Subset \left\{\begin{matrix} b \\ c \\ d \\ \vdots \end{matrix}\right. \\ c \Subset a & & a \Subset c & \\ d \Subset a & & a \Subset d & \\ \cdots\cdot & & \cdots\cdot & \end{array}$$

— wie ich bequemer dafür schreiben will — löse man alle „zusammengesetzten" Subsumtionen in die damit äquivalenten Systeme von simultanen einfacheren Subsumtionen auf.

Es wird darnach irgend eine Prämisse, welche nach dem bisherigen die Form besitzen muss

$$s + s' + s'' + \cdots \Subset pp'p''p''' \cdots$$

in der Gestalt anzuschreiben sein:

$$\left.\begin{matrix} s \\ s' \\ s'' \\ \vdots \end{matrix}\right\} \Subset \left\{\begin{matrix} p \\ p' \\ p'' \\ p''' \\ \vdots \end{matrix}\right.$$

womit gesagt sein soll, dass $s \Subset p$, $s \Subset p'$, $s \Subset p''$, $s \Subset p'''$, .., $s' \Subset p$, $s' \Subset p'$, $s' \Subset p''$, $s' \Subset p'''$, .., $s'' \Subset p$, etc. sei.

In praxi — meint Peirce — werden diese Operationen schon beim Niederschreiben der Prämissen sich vollziehen lassen.

Da die Glieder $s, s', \ldots$ der in letzte Summanden zerlegten Subjekte ihrerseits monomische Produkte waren,

Da die Faktoren $p, p', \ldots$ der in letzte Faktoren zerlegten Prädikate ihrerseits Summen aus einfachen Symbolen waren,

so werden nach Vollzug unsres dritten Prozesses gerade umgekehrt wie früher

die Subjekte nur Produkte | die Prädikate nur Summen

sein, aber jetzt *aus lauter einfachen Symbolen*, nämlich den Argumenten (Variablen, Koeffizienten, Parametern, Eliminanden, Unbekannten, oder wie man sie nennen mag) und ihren Negationen — wofern sie nicht selbst schon einfache Symbole sind.

Vierter Prozess. Dieser soll nunmehr die *Elimination* eines Symbols bewerkstelligen. Wir nennen den Eliminanden x. Dann müssen nach Peirce *auf jede mögliche Weise* zusammengehalten werden eine Subsumtion des vorliegenden Systems, welche x im Subjekt oder aber x_1 im Prädikat enthält, mit einer solchen, welche umgekehrt x im Prädikat oder aber x_1 im Subjekt enthält.

Sollte beides zugleich der Fall sein bei einer Prämissensubsumtion, so fällt der Eliminand schon von selbst heraus, oder man kann das eine weglassen, den einen Term x resp. x_1 unterdrücken — gleichviel welchen.

Wenn nämlich x und x_1 zusammen im Subjekte vorkämen, so wäre dieses (als das Produkt der einfachen Symbole) kraft Th. $30_\times$) gleich 0, wenn sie zusammen im Prädikate vorkämen, so wäre letzteres (als die Summe dieser und vielleicht noch anderer Terme) nach Th. 30_+) gleich 1. Diese Fälle werden gar nicht in Betracht kommen, weil man Subjekte und Prädikate doch immer nur möglichst „ausgerechnet" ansetzt.

Kommt aber x im Subjekt *und zugleich* x_1 im Prädikate vor, oder umgekehrt, so kann dies nach bisherigem nur in der Form:

$$ax \preceq b + x_1 \quad \text{resp.} \quad cx_1 \preceq d + x$$

eintreten, und wird gemäss Th. 41) solcher Ansatz zu

$$ax \preceq b \quad \text{oder} \quad a \preceq b + x_1 \quad \text{resp.} \quad cx_1 \preceq d \quad \text{oder} \quad c \preceq d + x$$

— nach Belieben — sich sofort vereinfachen lassen.

Nach der vorausgehenden Bemerkung wird *jene* Subsumtion von der Form sein:

$$\alpha) \qquad ax \preceq b \quad \text{oder aber} \quad a \preceq b + x_1$$

und *diese* von der Form:

$$\beta) \qquad c \preceq d + x \quad \text{oder aber} \quad cx_1 \preceq d$$

wobei nach dem Th. 41) des § 17 die nebeneinanderstehenden Subsumtionen ja äquivalent sein müssen.

Resultante der Elimination von x aus den beiden Subsumtionen des Paares, welches aus den Zeilen α) und β) je eine Subsumtion enthält, ist nun die Subsumtion:

$$\gamma) \qquad ac \mathrel{=\!\!\!\in} b + d.$$

Beweis. Die vereinigte Gleichung von α) und β) würde in der That (in der von mir bevorzugten Schreibweise) lauten:

$$ab_1x + cd_1x_1 = 0,$$

somit als Resultante liefern: $ab_1cd_1 = 0$, was nach Th. $38_\times$) mit der Subsumtion γ) äquivalent ist.

Die Regel für solche Einzelelimination lautet also: *Man multiplizire die Subjekte und addire die Prädikate der zusammengehaltenen Subsumtionen unter Weglassung des Eliminanden.*

Von den so gewonnenen Resultanten müssen die nicht analytisch erfüllten (diejenigen, welche „Relationen“ sind) vollständig registrirt werden, sofern sie nicht in bereits registrirten mitenthalten sind. Zusammen mit denjenigen Subsumtionen, in welchen der Eliminand gar nicht vorkam, werden sie in Gestalt eines Propositionensystems die volle Resultante darstellen.

Es ist *nicht* erforderlich, eine Subsumtion der Form α) mit einer andern von ebendieser Form α) behufs Elimination des x zusammenzuhalten, und ebensowenig braucht man x aus irgend zwei Subsumtionen der Form β) apart zu eliminiren, weil in solchen Fällen die Resultanten stets auf die Identität $0 = 0$ hinauslaufen müssen.

In der That würde bei zwei Subsumtionen der Form α):

$$ax \mathrel{=\!\!\!\in} b \quad \text{und} \quad cx \mathrel{=\!\!\!\in} d \quad (\text{oder } c \mathrel{=\!\!\!\in} d + x_1)$$

die vereinigte Gleichung lauten: $(ab_1 + cd_1)\,x + 0 \cdot x_1 = 0$, sonach bei Elimination des x nur fordern, dass $(ab_1 + cd_1) \cdot 0 = 0$ sei, was von selbst der Fall ist. Und ähnlich verhält es sich bei irgend zwei Subsumtionen der Form β), wie:

$$a \mathrel{=\!\!\!\in} b + x \quad \text{und} \quad c \mathrel{=\!\!\!\in} d + x \quad (\text{oder } cx_1 \mathrel{=\!\!\!\in} d),$$

welche vereinigt $0 \cdot x + (ab_1 + cd_1)\,x_1 = 0$ geben. Im übrigen müsste, dass hier die Gesamtheit der Einzelresultanten die volle Resultante darstellt, doch eigentlich noch bewiesen werden!

Fünfter Prozess. Derselbe bezweckt (in Verbindung mit dem nächstfolgenden und letzten Prozesse) das Äquivalent dessen zu leisten, was wir seinerzeit als die *Auflösung* des Propositionensystems *nach einer Unbekannten* (x) bezeichneten. Nach § 21, o) kommt diese hinaus auf die Ermittelung erstens eines (x nicht als Operationsglied enthaltenden) Prädikates, zu welchem x Subjekt ist, und zweitens eines (ebenfalls von x freien) Subjektes, zu welchem x Prädikat ist.

Im fünften Prozess werden zunächst alle Subjekte, sowie alle Prädikate von x (unter den im Prämissensystem vorkommenden Symbolen oder Termen) aus den vorliegenden Subsumtionen einzeln herausgelesen; im sechsten werden sie hernach zu einem einzigen Subjekte resp. Prädikate zusammengefasst.

Nachdem vorstehend *hingebracht* war, *dass alle Subjekte höchstens Produkte, alle Prädikate aber höchstens Summen sind* (wofern sie nämlich überhaupt noch als zusammengesetzte, nicht schon als einfache Symbole erscheinen), *können wir* nach Belieben gemäss Th. 41) *jedes Operationsglied aus dem Subjekte in's Prädikat bringen, oder umgekehrt*, indem wir dasselbe erstens in seine Negation verwandeln, zugleich aber auch zweitens die Art seiner Verknüpfung (mit den andern Symbolen) dualistisch abändern, nämlich diese aus einer Addition in eine Multiplikation oder umgekehrt verwandeln — vergl. den Wortlaut jenes Theoremes, nach welchem ja:

$$a \Subset b + x_1 \quad \text{mit} \quad ax \Subset b \quad \text{und} \quad ax_1 \Subset b \quad \text{mit} \quad a \Subset b + x$$

gleichbedeutend ist.

Keineswegs dürfte dagegen

$$a + x_1 \Subset b \quad \text{in} \quad a \Subset bx \quad \text{oder auch} \quad a \Subset bx_1 \quad \text{in} \quad a + x \Subset b$$

(oder umgekehrt) verwandelt werden, wie man, die Subsumtionen rechts auf 0 bringend leicht erkennt, wo sie besagen:

$$(a + x_1)\, b_1 = 0, \quad a\,(b_1 + x_1) = 0 \text{ resp. } a\,(b_1 + x) = 0, \quad (a + x)\, b_1 = 0$$

und augenscheinlich einander durchaus nicht decken. Mit Subsumtionen von vorstehender Form können wir es aber hier nicht mehr zu thun bekommen, da, wenn solche vorkamen, sie nach dem dritten Prozess zerlegt sein mussten.

Wo es etwa erforderlich wird, ein Symbol auf die andre Seite der Subsumtion „hinüberzuschaffen" (zu „transponiren"), welches auf der einen Seite isolirt steht, so lässt es die Einheit zurück, falls es Subjekt war, die Null falls es Prädikat gewesen. Schematisch: soll in einer Subsumtion $a \Subset b$ das a hinübergeschafft werden, so sagt man: $1 \cdot a \Subset b$ und folgert nach der Regel: $1 \Subset a_1 + b$; sollte aber das b herübergeschafft werden, so denkt man sich die gegebene Subsumtion in der Gestalt angeschrieben: $a \Subset b + 0$, und folgert regelrecht: $a \cdot b_1 \Subset 0$. —

Demnach kann stets die Negation x_1 der Unbekannten, wo sie irgend vorkommt, in Gestalt von x transponirt werden, wodurch erzielt wird, dass das vorliegende Subsumtionensystem nur mehr x selbst, aber nicht mehr x_1 enthält. Und weiter können diejenigen Operations-

glieder, mit welchen nun x noch verknüpft erscheint, ebenfalls auf die andere Seite geschafft werden, sodass in jeder einzelnen Subsumtion (in der die Unbekannte überhaupt vorkommt) diese jetzt endlich *isolirt* erscheinen wird, und zwar entweder als das Subjekt, oder als das Prädikat derselben. Die regelrechte Ausführung dieser Operationen macht den fünften Prozess aus.

Sechster Prozess. Man vereinige schliesslich die gewonnenen Subsumtionen, welche die Unbekannte x zum Prädikate haben in eine einzige Subsumtion mit ebendiesem Prädikate x, indem man die Summe ihrer Subjekte bildet, ebenso diejenigen Subsumtionen, welche gemeinsam die Unbekannte x zum Subjekte haben in eine einzige Subsumtion mit ebendiesem Subjekte x und dem Produkt ihrer Prädikate als Prädikat — auf Grund der jetzt im umgekehrten Sinne, wie beim dritten Prozess, anzuwendenden Schemata der Def. (3).

Hiermit wird man schliesslich die Doppelsubsumtion (mit x als dem Mittelterme) erhalten, welche die „Berechnung“ der Unbekannten leistet und das Problem löst.

Zur Illustration dieser Methode wollen wir mit Peirce das als 1. Aufgabe in § 25 von uns gelöste Problem von Boole nochmals behandeln, dessen Data waren:

$$a_1 c_1 \leqslant (bd_1 + b_1 d)e, \quad ade_1 \leqslant bc + b_1 c_1, \quad a(b+e) = cd_1 + c_1 d,$$

und bei welchem verlangt wird, erstens diejenigen Aussagen über a zu finden in welchen nur noch von b, c, d die Rede ist (which „involve“ only b, c, d), zweitens anzugeben welche Relation zwischen b, c, d allein besteht, drittens zu finden, was von (und mit) b in Bezug auf a, c, d ausgesagt werden kann und viertens zu ermitteln, welche Relation zwischen a, c und d besteht.

Auflösung gemäss Peirce. Durch die ersten drei im Kopf ausgeführten Prozesse lösen wir die drei Prämissen bezüglich auf in die nachfolgend zusammengestellten Subsumtionen:

$$a_1 c_1 = \begin{cases} b+d \\ b_1 + d_1, \\ e \end{cases} \quad ade_1 \leqslant \begin{Bmatrix} b+c_1 & ab \\ & , \\ b_1 + c & ae \end{Bmatrix} \leqslant \begin{Bmatrix} c+d & cd_1 \\ & \text{nebst} \\ c_1 + d_1 & c_1 d \end{Bmatrix} \leqslant \begin{cases} a \\ \\ b+e. \end{cases}$$

Es war hiebei blos zu berücksichtigen, dass

$$bd_1 + b_1 d = (b+d)(b_1 + d_1), \quad bc + b_1 c_1 = (b + c_1)(b_1 + c),$$

ähnlich $cd_1 + c_1 d = (c+d)(c_1 + d_1)$ und endlich $a(b+e) = ab + ae$ ist.

Zuerst müssen wir e eliminiren, „von welchem wir nichts wissen wollen“, von welchem abgesehen werden soll.

Zum System der Resultanten gehören erstens diejenigen unter den obigen Subsumtionen, welche c überhaupt nicht enthalten; diese sind:

$$\delta) \qquad a_1 c_1 \Subset \begin{cases} b + d \\ b_1 + d_1 \end{cases}, \quad ab \Subset \begin{cases} c + d \\ c_1 + d_1 \end{cases} \quad \text{und} \quad \left.\begin{matrix} cd_1 \\ c_1 d \end{matrix}\right\} \Subset a.$$

Zweitens tragen dazu bei die Resultanten der Elimination des c aus je einer Subsumtion der Gruppe:

$$a_1 c_1 \Subset c, \quad ade_1 \Subset \left\{\begin{matrix} b + c_1 \\ b_1 + c \end{matrix}, \quad \begin{matrix} cd_1 \\ c_1 d \end{matrix}\right\} \Subset b + c$$

mit je einer solchen der Gruppe:

$$ac \Subset \begin{cases} c + d \\ c_1 + d_1 \end{cases}$$

und nur diese, weil in den Subsumtionen jener Gruppe wesentlich c im Prädikat (oder, was auf dasselbe hinausläuft, c_1 im Subjekt), in den Subsumtionen dieser Gruppe aber c im Subjekte auftritt.

Nach der Regel des vierten Prozesses gebildet sind nun unsre Resultanten sämtlich hingeschrieben folgende:

$$(0 =) a_1 c_1 a \Subset \begin{cases} 1 + c + d (= 1) \\ 1 + c_1 + d_1 = 1 \end{cases},$$

$$ada \Subset \begin{cases} b + c_1 + c + d = 1 \\ b + c_1 + c_1 + d_1 = b + c_1 + d_1 \\ b_1 + c + c + d = b_1 + c + d \\ b_1 + c + c_1 + d_1 = 1 \end{cases}, \quad \left.\begin{matrix} acd_1 \\ ac_1 d \end{matrix}\right\} \Subset \begin{cases} b + c + d \\ b + c_1 + d_1 \end{cases}$$

wovon aber nur diese eine:

$$\varepsilon) \qquad ad \Subset b + c_1 + d_1$$

wirklich zu notiren gewesen, die andern — nämlich: $0 \Subset 1$, $ad \Subset 1$, $ad \Subset b_1 + c + d$, etc. bis $ac_1 d \Subset b + c_1 + d_1$ — als selbstverständlich schon mittelst „Kopfrechnung“ erkannt und sofort hätten weggelassen werden können.

Die zuletzt gefundne Einzelresultante ε) kann nun auch noch, indem man d_1 der Regel des Th. 41) gemäss nach links wirft, vereinfacht werden zu:

$$ad \Subset b + c_1.$$

Und ferner geht die zweite von den Subsumtionen δ): $a_1 c_1 \Subset b_1 + d_1$ augenscheinlich in der letzten $c_1 d \Subset a$ auf, wie man in Peirce's Manier am schnellsten sehen wird, indem man erstere mittelst Umstellung zweier Terme umwandelt in $c_1 d \Subset b_1 + a$, was aus $c_1 d \Subset a$ und Th. 6_+) doch a fortiori schon folgt.

Es wird darnach jene fortzulassen sein.

Die Gesamtresultante der Elimination des c, zunächst durch das System der koexistirenden Subsumtionen δ) und ε) vollständig dargestellt erscheinend, zieht sich demnach zusammen zu:

$$\zeta) \qquad a_1 c_1 \Subset b + d, \quad ab \Subset \begin{Bmatrix} c+d & cd_1 \\ c_1+d_1, & c_1 d \end{Bmatrix} \Subset a, \quad ad \Subset b + c_1.$$

Dieses System von sechs Subsumtionen bildet nunmehr die Prämissen zu allen weiter verlangten Schlussfolgerungen.

Die zweite, dritte und sechste von diesen gibt die Prädikate von a an; dieselben sind:

$$b_1 + c + d, \quad b_1 + c_1 + d_1 \quad \text{und} \quad b + c_1 + d_1.$$

Es muss a eingeordnet sein ihrem Produkte:

$$a \Subset (b + c_1 + d_1)(b_1 + c + d)(b_1 + c_1 + d_1)$$

oder ausmultiplizirt:

$$a \Subset b_1(c_1 + d_1) + cd_1 + c_1 d = b_1 c_1 d_1 + cd_1 + c_1 d.$$

Um zu finden, ob irgend eine Relation zwischen b, c und d besteht, suchen wir auch die Subjekte von a zusammen. Diese sind aus der ersten, vierten und fünften Subsumtion ζ) zu entnehmen in Gestalt von: $b_1 c_1 d_1$, cd_1 und $c_1 d$; es muss also ihre Summe dem a eingeordnet sein:

$$b_1 c_1 d_1 + cd_1 + c_1 d \Subset a.$$

Augenscheinlich resultirt durch Elimination des a aus den beiden letzten Subsumtionen, welche hier schon durch den Schluss Barbara nach Prinzip II erfolgen wird, weiter nichts als eine analytische, „leere", das Prinzip I der Identität exemplifizirende Formel (an „empty" proposition), sodass zwischen b, c und d keine unabhängige Beziehung zu bestehen braucht.

Um die Prädikate von b zu finden, kombiniren wir die zweite und dritte Subsumtion ζ) und erhalten (analog, wie bei a des genaueren angegeben wurde):

$$b \Subset (a_1 + c + d)(a_1 + c_1 + d_1) \quad \text{oder} \quad b \Subset a_1 + cd_1 + c_1 d$$

als drittes der verlangten Ergebnisse.

Durch Sammlung der Subjekte von b geht aus der ersten und der letzten Subsumtion ζ) hervor:

$$a_1 c_1 d_1 + acd \Subset b.$$

Durch Elimination von b aus diesem und dem vorigen Ergebnisse gemäss Prinzip II geht dann hervor:

$$acd + a_1 c_1 d_1 \Subset a_1 + cd_1 + c_1 d,$$

oder vereinfacht: $acd = 0$, was mit der vierten und fünften Subsumtion gibt:

$$cd_1 + c_1 d \Subset a \Subset c_1 + d_1$$

in Beantwortung der letzten von den gestellten Fragen. —

Anmerkung. Unter dem zweiten Prozesse empfiehlt Peirce, um einen Ausdruck in seine letzten

Summanden	*Faktoren*

„entwickelnd" zu zerlegen, falls er nämlich von vornherein ein

Produkt (von Summen) | eine *Summe* (von Produkten)

gewesen, das folgende Verfahren. Man bilde

jedes denkbare Produkt | jede Summe

aus allen in dem Ausdruck vorkommenden Buchstabensymbolen und deren Negationen, sodass darin jeder Buchstabe nur *ein*mal (negirt oder aber unnegirt) vertreten ist.

Gemäss der fundamentalen Formel des Th. 6):

$$ab ⋹ b ⋹ b + c$$

untersuche man, ob

das gebildete Produkt ein Subjekt ist von jedem Faktor | die Summe ein Prädikat ist von jedem Gliede

des gegebenen Ausdruckes. Trifft dies zu, so ist es, resp. sie ein

letzter Summand | Primfaktor

ebendieses Ausdruckes, andernfalls nicht.

Man fahre in dieser Weise fort, bis so viele letzte Summanden resp. Faktoren gefunden sind, als der Ausdruck besitzen muss.

Um diese Zahl zu finden (unter obenerwähnter Voraussetzung, die ja schon nach § 14 sich immer vorgängig erfüllen lassen würde), gibt Peirce ohne Herleitung den arithmetischen Ausdruck an:

$$2^m + n - mp - p,$$

wo m die Gesamtanzahl der verschiedenen Buchstabensymbole bedeutet, die im Ausdruck vorkommen, falls ein Symbol und seine Negation nicht als verschieden angesehen werden, wo ferner n die Gesamtzahl der im Ausdruck als Operationsglieder überhaupt auftretenden Symbole vorstellt, mögen diese verschieden sein oder nicht (nach Berücksichtigung übrigens der Tautologie- und Absorptionsgesetze behufs einfachstmöglicher Schreibung des Ausdrucks), endlich p die Anzahl der

Faktoren | Glieder

des Ausdrucks ist (mit dem gleichen Vorbehalte wie soeben, ohne welchen sonst ja die Zahlen n und p beliebig hoch angesetzt werden könnten).

Es sei hienach z. B. der Ausdruck $x + yz$ „dual zu entwickeln" [„dual", das soll heissen: in die Form eines Produktes, gemäss Th. $44_\times$) — sintemal die „Entwickelung" schlechtweg, in unsrer Terminologie sich stets bezieht auf die Zerlegung in eine Summe gemäss Th. 44_+)]. Nach Peirce ist zu bemerken, dass hier $m = 3$, $n = 3$, $p = 2$ ist, womit sich die Anzahl der gesuchten Faktoren (arithmetisch) berechnet zu

$$2^3 + 3 - 3 \times 2 - 2 = 8 + 3 - 6 - 2 = 3.$$

Man sollte nun alle acht Ausdrücke, welche durch additive Vereinigung dreier von den sechs Symbolen x, y, z, x_1, y_1, z_1 mit verschiedenen Buchstaben gebildet werden können eigentlich durchprobiren in folgender Weise. Da

$$x ⋹ x + y + z \quad \text{und} \quad yz ⋹ x + y + z,$$

so ist $x + y + z$ ein Faktor unseres Ausdrucks $x + yz$. Um die Probe mit $x + y + z_1$ zu machen, haben wir zu bemerken, dass:

$$x \mathrel{=\!\!\!\in} x + y + z_1 \quad \text{und} \quad yz \mathrel{=\!\!\!\in} x + y + z_1$$

ist, sodass dies ebenfalls einer von den gesuchten Faktoren sein musste. Das nämliche stellt sich heraus, wenn wir mit $x + y_1 + z$ den Versuch machen, womit also (hier zufällig bei den drei ersten Versuchen) die gesuchten Faktoren schon vollzählig gefunden sind. Dagegen würde z. B. mit $x + y_1 + z_1$ der Versuch fehlgeschlagen haben, indem zwar $x \mathrel{=\!\!\!\in} x + y_1 + z_1$ aber *nicht* $yz \mathrel{=\!\!\!\in} x + y_1 + z_1$ sein müsste, und bezüglich $x_1 + y_1 + z_1$ liesse sich weder einsehen, dass x, noch dass yz demselben eingeordnet sein müsste. Etc.

Sollte ebenso beispielsweise der Ausdruck:

$$(a + b + c)(a + b_1 + c_1)(a_1 + b + c)$$

— diesmal in die Form einer Summe, also schlechtweg — „entwickelt" werden, so wäre $m = 3$, $n = 9$, $p = 3$, sodass

$$2^3 + 9 - 3 \times 3 - 3 = 5$$

die a priori bestimmte Anzahl der zu gewärtigenden Entwickelungsglieder ist. Von den acht Konstituenten der Entwickelung (von 1) nach a, b, c sind daher nur dreie hier ausgeschlossen, und zwar sind es diese:

$$a_1b_1c_1, \quad a_1bc, \quad ab_1c_1,$$

welche allein nicht in allen drei Faktoren, nämlich in den gerade darüberstehenden nicht, sich enthalten erweisen. Der Ausdruck ist sonach:

$$= abc + abc_1 + ab_1c + a_1bc_1 + a_1b_1c. \text{ —}$$

Die Vorausbestimmung der Anzahl Glieder resp. Faktoren der gesuchten Entwickelung erscheint mir zwar verdienstlich, das ganze Verfahren auch in der That nicht schwierig, jedoch (im allgemeinen) als zu umständlich und ermüdend gegenüber denjenigen Verfahrungsweisen, vor welchen ihm Peirce den Vorzug zuerkennen will, und die schon im § 13 auseinandergesetzt wurden.

Ich würde bei Aufgaben der letzterwähnten Art judiziöses Ausmultiplizieren vorziehen, wo noch Faktoren fehlen dieselben in Gestalt von $1, = x + x_1$, hinzufügend, wiederholten Ansatz eines Gliedes aber vermeidend. So haben wir, in dem Beispiel, durch Vereinigung des ersten mit dem dritten Faktor sogleich:

$$(b + c)(a + b_1 + c_1) = a(bc + bc_1 + b_1c) + a_1(bc_1 + b_1c)$$

— etwa bei $(b_1 + c_1)$ den Faktor a_1 gemäss Th. 33_+) Zusatz beifügend, und $b + c$ beim Multipliziren mit a vollends entwickelnd gemäss Th. 33_+) selbst.

Bei den Aufgaben der vorigen Art aber scheint mir das Schema des Th. $27_\times$) am bequemsten verwendet zu werden, wonach in obigem Beispiel zuerst $x + yz$ in $(x + y)(x + z)$ übergeht, sodann weil $x + y$ den Buchstaben z, $x + z$ aber den y noch nicht, wie es erforderlich wäre, enthält, weiter:

$$x + y = x + y + zz_1 = (x + y + z)(x + y + z_1)$$

und analog $x + z = x + z + yy_1 = (x + y + z)(x + y_1 + z)$

genommen, im Produkte:

$$x + yz = (x + y + z)(x + y + z_1)(x + y_1 + z)$$

aber der erste Faktor rechts nur *ein*mal angesetzt wird. Um den Gedankengang darzulegen musste ich dies alles niederschreiben; man kann jedoch das Ergebniss leicht gleich aus dem Kopfe hinsetzen.

Zum Glücke aber brauchen wir, wie oben betont, uns bei den Problemen hiermit überhaupt nicht zu plagen. Gleichwol aber schien mir Peirce's Manier im „Entwickeln“ der Funktionen es wert zu sein, der Aufmerksamkeit des Lesers unterbreitet zu werden, sollte sie auch blos dazu dienen, die Mannigfaltigkeit und Fülle der Weisen, auf welche in unsrer Disziplin zuwerke gegangen werden kann, auf's neue zu illustriren.

Ich will nun diejenige Modifikation der Peirce'schen Methode auseinandersetzen, welche mir, wie eingangs angedeutet, als die allernatürlichste und einfachste zugleich erscheint.

Wie der Leser wol bereits herausgefühlt hat, besteht der Vorzug der Natürlichkeit gegenüber der Boole'schen Methode bei der Peirce-schen darin, dass sie — nicht wie jene mit *Gleichungen* — sondern vielmehr mit *Subsumtionen* operirt, sonach mit Subjekten und Prädikaten zu thun hat, die den Urteilsfunktionen im gewöhnlichen Denken sich durchaus anpassen. Die Prämissen brauchten nicht mehr rechterhand auf 0 gebracht, auch nicht mehr zu einer einzigen Aussage vereinigt zu werden — Operationen, deren erstere zuweilen mühsam auszuführen ist, deren letztere, so leicht sie ist, ein schwülstiges (cumbrous) Ergebniss aufweisen kann. Bei Peirce's Verfahren mussten indess dafür andere Weitläufigkeiten in Kauf genommen werden, die wir nun vermeiden wollen unter Beibehaltung der Vorzüge.

Aus irgend einem System von in Form von Subsumtionen angeschriebenen Prämissen ein Symbol x zu eliminiren, desgleichen dasselbe (im mehrerwähnten Sinne) zu „berechnen“ ist unsre Aufgabe.

Mit der „Berechnung“ ist bekanntlich allemal die Elimination der Unbekannten zu verbinden, die uns die Auflösbarkeitsbedingung liefert; desgleichen geht schon nach § 21 und wie weiterhin zu sehen mit der Elimination auch die Auflösung oder Berechnung von selber Hand in Hand. Sollte also etwa ein Symbol zu eliminiren und *ein anderes* zu berechnen verlangt sein, so wende man nacheinander in Hinsicht auf jedes der beiden für sich das Verfahren an, welches wir nun bezüglich des einen x beschreiben werden. Ebenso, wenn mehrere Unbekannten zu eliminiren daneben irgend welche zu berechnen sind, wird man (wie schon früher erwähnt) die Eliminanden immer einzeln successive (in irgend einer Reihenfolge) beseitigen, weil dabei mit jedem Schritte schon eine erhebliche Vereinfachung des fernerhin die Prämissen zu vertreten habenden Propositionen-

systems erzielt wird — wogegen, wenn man die Operationen behufs simultaner Elimination an das ursprüngliche Prämissensystem anküpfen wollte, man dieses Vorteils verlustig gehen würde. Wir werden es demnach in der That immer nur mit *einem* Symbol, als Eliminanden oder Unbekannte, auf einmal zu thun bekommen, und brauchen nur darauf Bedacht zu nehmen, wie wir uns in Bezug auf dieses (somit auch jedes) am besten aus der Schlinge ziehen.

In jeder Prämissensubsumtion (welche x überhaupt enthält) *entwickele man* die linke Seite, *das Subjekt*, falls x in demselben vorkommt, *nach x in Form einer Summe* gemäss Th. 44_+) die rechte Seite oder *das Prädikat*, falls x in ihm vorkommt, *in Form eines Produktes* gemäss Th. $44_\times$). Darnach lässt sich:

$$ax + bx_1 \subseteq (\alpha + x_1)(\beta + x)$$

als die allgemeine Form einer jeden x enthaltenden Prämisse hinstellen, wobei nur, wenn x auf einer Seite von selbst herausfällt oder fehlte, dasselbe nicht extra eingeführt zu werden braucht, vielmehr dann in Gestalt von

$$ax + bx_1 \subseteq \gamma \quad \text{resp.} \quad c \subseteq (\alpha + x_1)(\beta + x)$$

mit der betreffenden Prämisse weiter zu operiren ist. Es brauchen auch etwa ausfallende Glieder, wie $0 \cdot x$ oder $0 \cdot x_1$ oder Faktoren, wie $1 + x$ oder $1 + x_1$, durchaus nicht angesetzt zu werden, vielmehr kommen in solchen Fällen auch die beim allgemeinen Schema anzuführenden Operationen, soweit sie sich auf jene zu beziehen hätten, einfach in Wegfall.

Man löse jetzt die betreffende Subsumtion gemäss Definition (3) *auf in* die *einfacheren Subsumtionen:*

$$\left.\begin{matrix} ax \\ bx_1 \end{matrix}\right\} \subseteq \left\{\begin{matrix} \alpha + x_1 \\ \beta + x \end{matrix}\right. \quad \text{resp.} \quad \left.\begin{matrix} ax \\ bx_1 \end{matrix}\right\} \subseteq \gamma, \quad \text{resp.} \quad c \subseteq \left\{\begin{matrix} \alpha + x_1 \\ \beta + x \end{matrix}\right.$$

wobei wieder, falls ein Term fehlte, derselbe auch vorstehend nicht vertreten sein wird.

Das allgemeine Schema repräsentirt nur zwei (nicht vier) Subsumtionen, nämlich die beim Lesen einer jeden Zeile sich ergebenden: $ax \subseteq \alpha + x_1$, $bx_1 \subseteq \beta + x$, da die über's Kreuz durch das Subsumtionszeichen verbundenen Terme nur analytische Identitäten $ax \subseteq \beta + x$, $bx_1 \subseteq \alpha + x_1$ liefern.

Nach der Regel von Peirce's Theorem 41) *werfe man das Operationsglied x_1 jetzt* (als x) *auf die andere Seite*, was beim allgemeinen Schema auf eine Unterdrückung des Terms x_1 hinausläuft, und für sämtliche angeführten Fälle gibt:

$$\begin{matrix} ax \subseteq \alpha \\ b \subseteq \beta + x \end{matrix} \quad \text{resp.} \quad \begin{matrix} ax \subseteq \gamma \\ b \subseteq \gamma + x \end{matrix} \quad \text{resp.} \quad \begin{matrix} cx \subseteq \alpha \\ c \subseteq \beta + x. \end{matrix}$$

Sodann isolire man x vollends durch Hinüberwerfen des mit ihm verknüpften Operationsgliedes nach derselben Regel, wodurch entsteht:

$$b\beta_1 \mathrel{\substack{=\\ \in}} x \mathrel{\substack{=\\ \in}} a_1 + \alpha, \quad \text{resp.} \quad b\gamma_1 \mathrel{\substack{=\\ \in}} x \mathrel{\substack{=\\ \in}} a_1 + \gamma \quad \text{resp.} \quad c\beta_1 \mathrel{\substack{=\\ \in}} x \mathrel{\substack{=\\ \in}} c_1 + \alpha.$$

Hierdurch ist dann die Prämisse verwandelt in eine *Doppelsubsumtion* mit dem Mittelgliede x und einem davon freien Subjekte sowol als Prädikate. Dieselbe ist m. a. W. für sich schon „aufgelöst" nach x; zugleich erscheint x eliminirt, sobald man es beim Lesen der Doppelsubsumtion gemäss Prinzip II überspringt. In der That wird beim allgemeinen Schema $b\beta_1 \mathrel{\substack{=\\ \in}} a_1 + \alpha$ die Resultante der Elimination des x vorstellen.

Wenn von dem allgemeinen Schema einzelne Terme fehlten, so kann es sich ereignen, dass man statt einer Doppelsubsumtion nur eine einfache Subsumtion erhält von der Form

$$d \mathrel{\substack{=\\ \in}} x \quad \text{oder aber} \quad x \mathrel{\substack{=\\ \in}} \delta.$$

Diese ist jedoch leicht zu einer Doppelsubsumtion zu ergänzen in Gestalt von:

$$d \mathrel{\substack{=\\ \in}} x \mathrel{\substack{=\\ \in}} 1 \quad \text{resp.} \quad 0 \mathrel{\substack{=\\ \in}} x \mathrel{\substack{=\\ \in}} \delta$$

und ist ersichtlich, dass alsdann durch die Elimination des x aus der Einzelprämisse nur eine Identität: $d \mathrel{\substack{=\\ \in}} 1$ resp. $0 \mathrel{\substack{=\\ \in}} \delta$ resultiren würde, die bei Aufstellung der Gesamtresultante nicht weiter berücksichtigt zu werden braucht (weil 0 links Summand, 1 rechts Faktor würde — wie sogleich zu sehen).

Um nunmehr das ganze System von Prämissen nach der Unbekannten x aufzulösen, nachdem die x enthaltenden sämtlich zu solchen Doppelsubsumtionen umgeformt sind, *braucht man nur die Subjekte dieser* letzteren *additiv zu einem einzigen Subjekte, ihre Prädikate multiplikativ zu einem einzigen Prädikate von x zu vereinigen.* Man wird dadurch eine Doppelsubsumtion mit dem Mittelgliede x und davon unabhängigen extremen Gliedern erhalten, welche nach Def. (3) äquivalent sein muss dem System jener Doppelsubsumtionen, welche also zusammen mit der Gruppe der x von vornherein nicht enthaltenden Prämissen das ursprüngliche Prämissensystem vollständig vertritt. Die volle Resultante der Elimination des x besteht aus dem System der Prämissen eben dieser letztern Gruppe in Verbindung mit der aus der „vereinigten" Doppelsubsumtion durch Überspringen des x gemäss Pr. II sich ergebenden Resultante, welche die Summe der Subjekte des x einordnet dem Produkt seiner Prädikate. —

Um dies an dem klassischen Problem von Boole, 1 Aufg. des § 25, zu erläutern, so schreiben wir behufs Elimination von c die erste Prämisse in der Gestalt an:

$$a_1 c_1 \mathrel{\substack{=\\ \in}} \begin{cases} b d_1 + b_1 d \\ c \end{cases}, \quad \text{die zweite als:} \quad ad(bc_1 + b_1 c) \mathrel{\substack{=\\ \in}} c,$$

indem wir eine Doppelumstellung an ihrem früheren Ansatz vornehmen, nämlich den Faktor e_1 von links als Summanden e nach rechts warfen, sodann den Summanden $bc + b_1c_1$ negirt als Faktor $bc_1 + b_1c$ von rechts nach links — oder beides a tempo.

Die dritte Prämisse, welche Gleichung war, lösen wir als vorwärtige und rückwärtige Subsumtion bezüglich auf zu:

$$ab \Subset cd_1 + c_1d \quad \text{resp.} \quad cd_1 + c_1d \Subset a$$
$$e \Subset cd_1 + c_1d + a_1 \qquad b_1(cd_1 + c_1d) \Subset e.$$

Die Resultante der Elimination des e besteht aus dem System der drei von den vorstehenden Subsumtionen, welche e gar nicht enthalten, zusammen mit derjenigen, welche die Summe der drei Subjekte von e subsumirt unter das eine Prädikat desselben. Letztre lautet:

$$a_1c_1 + ad(bc_1 + b_1c) + b_1(cd_1 + c_1d) \Subset cd_1 + c_1d + a_1.$$

Hiermit ist diese Elimination bereits vollzogen. Bei keiner allgemeinen Methode wird man sich aber der Anforderung entziehen können, die systematisch von ihr gelieferten Rechnungsergebnisse jeweils nach Möglichkeit — mit Rücksicht auf die besonderen Verhältnisse des gerade vorliegenden Falles — zu vereinfachen, *zu reduziren!* Das letzte vereinfacht sich zu:

$$ab_1cd = 0 \quad \text{oder} \quad acd \Subset b,$$

wie man augenblicklich erkennt, wenn man das Glied a_1 von rechts als Faktor a und ebenso das Glied $cd_1 + c_1d$ von rechts als Faktor $cd + c_1d_1$ nach links wirft.

Der Übersicht wegen reproduziren wir die (bereits da stehende) Gesamtresultante, zugleich die Elimination von a vorbereitend; sie besteht aus dem Systeme:

$$(bd + b_1d_1)c_1 \Subset a, \quad a \Subset b_1 + cd_1 + c_1d, \quad cd_1 + c_1d \Subset a, \quad a \Subset b + c_1 + d_1.$$

Mithin ist ihre Auflösung nach a:

$$(bd + b_1d_1)c_1 + cd_1 + c_1d \Subset a \Subset (b_1 + cd_1 + c_1d)(b + c_1 + d_1)$$

in welcher Doppelsubsumtion die extremen Glieder sich nach leichter Reduktion als gleich herausstellen, sodass die Elimination von a ergebnisslos bleibt, und

$$a = cd_1 + c_1d + b_1c_1d_1$$

geschrieben werden kann.

Um sodann b zu eliminiren, nehmen wir am besten die letzte als die einfachste Zusammenfassung der nun als Prämissen dienenden Ergebnisse, und zerlegen die Gleichung als vor- und rückwärtige Subsumtion in:

$$a(cd + c_1d_1) \Subset \begin{Bmatrix} b_1 \\ c_1d_1 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} b_1c_1d_1 \\ cd_1 + c_1d \end{Bmatrix} \Subset a.$$

Die Elimination von b_1 aus der ersten und der in $b_1 \Subset a + c + d$ umgeschriebenen dritten von diesen vier Subsumtionen liefert augenscheinlich nur ein identisches Ergebniss, weshalb die Resultante der Elimination

von b (somit b_1) blos aus den von b freien Subsumtionen dieser Gruppe besteht, die sich in

$$cd_1 + c_1 d \Subset a \Subset c_1 d_1 + cd_1 + c_1 d \quad \text{oder} \quad c_1 + d_1$$

zusammenziehen. Auch liest man sofort heraus die Auflösung nach b_1:

$$a\,(cd + c_1 d_1) \Subset b_1 \Subset a + c + d,$$

woraus sich diejenige nach b durch Umstellen der Terme, oder auch beiderseitiges Negiren ergibt zu:

$$a_1 c_1 d_1 \Subset b \Subset a_1 + cd_1 + c_1 d,$$

wo letzteres Prädikat (nur) mit Rücksicht auf die vorhergehende Relation (zwischen a, c, d) auch in $a_1 + c + d$ zusammenziehbar ist (indem man ihm $a_1 cd$ ohnehin, aber auch noch acd, welches 0 ist, zufügen kann).

So gelangten wir also zu den früheren Ergebnissen.

Es möge ferner noch die 7. Aufgabe des § 25 (von Boole) entsprechend behandelt werden. Die Prämissen waren:

$$wg \Subset sc, \qquad ra \Subset bc, \qquad sc \Subset wg, \qquad bc \Subset ra$$

und werden im Hinblick auf die beabsichtigte Elimination von c zu schreiben sein:

$$wg \Subset \begin{cases} s \\ c \end{cases}, \qquad ra \Subset \begin{cases} b \\ c \end{cases}, \qquad c \Subset wg + s_1, \qquad c \Subset ra + b_1,$$

oder

$$wg \Subset s, \qquad ra \Subset b, \qquad \left.\begin{matrix} wg \\ ra \end{matrix}\right\} \Subset c \Subset \begin{cases} wg + s_1 \\ ra + b_1 \end{cases},$$

mithin stellt das System:

$$wg \Subset s, \qquad ra \Subset b, \qquad wg \Subset ra + b_1, \qquad ra \Subset wg + s_1$$

die Resultante der Elimination von c vor.*)

Um die Elimination und Berechnung von g vorzubereiten, schreiben wir letzteres:

$$g \Subset \begin{cases} s + w_1 \\ ra + b_1 + w_1 \end{cases}, \qquad ra \Subset b, \qquad \begin{matrix} ras \Subset w \\ ras \Subset g \end{matrix},$$

woraus folgt:

$$ras \Subset g \Subset (s + w_1)\,(ra + b_1 + w_1) \quad \text{oder} \quad w_1 + s\,(ra + b_1)$$

wie früher — eine Behandlung, die mir derjenigen des § 25 entschieden vorzuziehen scheint.

Ich meine gleichwol, dass das von mir modifizirte Verfahren Boole's durch diese neue Methode keineswegs überflüssig gemacht wird. Nicht nur behält es den einen Vorzug, dass man dabei mehr rein mechanisch — um nicht zu sagen: gedankenloser — zuwerke gehen kann, womit ich mir zum Teil den Umstand erkläre, dass, wie Herr Peirce seinerzeit mir schrieb,

*) Es wird, wie hier, nicht selten vorzuziehen sein, dass man beim Eliminiren die Einzelresultanten unvereinigt lasse.

seine Schüler mein Verfahren dem seinigen vorzuziehen pflegten, sondern auch zum vollen Verständniss der ganzen Disziplin wird dasselbe stets unentbehrlich bleiben. Endlich kann man auch die *an jeder einzelnen* Prämissensubsumtion zu vollziehenden Operationen der Auflösung und Elimination mindestens geradesogut nach jenem Boole'schen Schema ausführen, als nach der vorstehend illustrirten Peirce'schen Methode, wie eine vergleichende Bearbeitung der typischen 18. Aufg. des § 25 nach den beiden Manieren zu erkennen gibt. —

Das Verfahren, welches Herr McColl ganz selbständig, indessen immerhin sehr nachträglich, zur Lösung der Probleme des Boole'schen Kalkuls ersonnen, ist doch nicht ganz so sehr, wie er selbst glaubt, von dem modifizirten Boole'schen verschieden — und muss ich hierin Herrn Venn[1] p. 372 beipflichten (vergl. ebenda). Sofern nur *eine* Prämisse in Betracht kommt — und die Boole'schen Prämissen lassen sich ja stets in eine einzige zusammenziehen — möchte ich dasselbe überhaupt nicht als eine neue Methode, sondern höchstens als eine eigene „Manier" in der Anwendung der Boole'schen Methode gelten lassen.

Ein Fortschritt tritt erst da zutage, wo es sich um Elimination und Auflösung bei *Systemen* Boole'scher Prämissen handelt und ist eben darin zu erblicken: dass McColl *deren vorgängige Vereinigung zu einer einzigen Prämissengleichung entbehrlich macht*, womit er denn Peirce vorgearbeitet und eine neue Behandlungsweise der Probleme angeregt, mitbegründet hat.

Vorwiegend scheinen mir Herrn McColl's Verdienste auf einem andern Felde zu liegen: auf dem der *Anwendungen* — worüber u. a. unser Anhang 7 zu vergleichen ist.

McColl's Verfahren basirt auf den beiden Gleichungen:

$$x f(x) = x f(1) \qquad \text{und} \qquad x_1 f(x) = x_1 f(0),$$

welche wir schon in § 19 als Anm. 2 zu Th. 44_+) angeführt haben, und die er auch für beliebig viele Argumente zusammenfassend erweitert zu dem Satze:

$$xyz \cdots u_1 v_1 \cdots f(x, y, z \cdots u, v, \cdots) = xyz \cdots u_1 v_1 \cdots f(1, 1, 1, \cdots, 0, 0, \cdots).$$

Die Gültigkeit auch dieser Gleichung ist unmittelbar ersichtlich aus der allgemeinen Boole'schen Formel 44_+) für die Entwickelung einer Funktion $f(x, y, z, \cdots u, v, \cdots)$ beliebig vieler Argumente nach ebendiesen — in Anbetracht, dass bekanntlich $f(1, 1, 1 \cdots 0, 0, \cdots)$ der Koeffizient ist, mit welchem der Konstituent $xyz \cdots u_1 v_1 \cdots$ in jener Entwickelung behaftet erscheinen wird, und dass die übrigen Glieder derselben Entwickelung, als mit dem angegebnen disjunkte Konstituenten habend, in diesen multiplizirt verschwinden müssen.

Charakteristisch ist aber die Art, wie McColl zu obiger Gleichung gelangt. Seine Rechnungsweisen sind wesentlich aus dem Aussagenkalkul („calculus of equivalent statements") hervorgewachsen, und könnten eigentlich erst unter diesem ganz ungehindert besprochen werden, weshalb wir auch noch einmal auf sie zurückkommen — § 46 am Schlusse. Bedeuten ihm nun $x, y, z, \cdots u, v, \cdots$ verschiedene Aussagen, so wird diesen Symbolen der Wert 1 zukommen, wenn sie wahr und der Wert 0, wenn sie falsch sind (vergl. unten § 28). Wird nun angesetzt das Produkt $xyz \cdots u_1 v_1 \cdots$, so sind damit die Faktoraussagen als gleichzeitig gültige hingestellt oder angenommen (vergl. § 28), d. h. es ist $x = y = z \cdots = 1$ und ebenso $u_1 = v_1 = \cdots = 1$, sonach $u = v = \cdots = 0$ gesetzt; und deshalb dürfen in der That die genannten Symbole in einer etwa noch dahinter tretenden (d. h. gleichzeitig gemachten) ferneren Aussage $f(x, y, z, \cdots, u, v, \cdots)$ durch diese ihre Werte $1, 1, 1, \cdots 0, 0, \cdots$ bezüglich ersetzt werden.

Es müsste dies auch gültig bleiben, wenn etwa $f(x, y, \cdots, u, \cdots)$ nicht mehr blos einen Funktionsausdruck des identischen Kalkuls in unserm bisherigen Sinne, sondern auch, wenn es irgend ein System von Propositionen vorstellte, in welchem nur als Aussagensymbole die Argumente vorkämen. Gelegentlich macht, um Schlüsse zu ziehen, McColl auch in dieser Weise von dem Satze Gebrauch. Doch lässt von dem wie wir sehen werden *engeren* „Aussagen"kalkul (in welchem nämlich die Symbole lediglich der Werte 0 und 1 fähig sind) der Satz auch auf den *weiteren* „Klassen"kalkul (in welchem sie beliebige Werte haben können) sich nicht ohne weiteres übertragen (cf. § 46, 18. Studie).

Ist nun z. B. eine Subsumtion:

$$\varphi(x) \Subset \psi(x)$$

nach der Unbekannten x aufzulösen, oder auch diese zu eliminiren, so wird gefolgert:

$$\varphi(x)\, \psi_1(x) \Subset 0$$

was dasselbe besagt, wie, dass es $= 0$ sei; und hieraus durch beiderseitiges Multipliziren mit x_1 oder x, unter Anwendung des angeführten Satzes:

$$x_1 \varphi(x)\, \psi_1(x) = x_1 \varphi(0)\, \psi_1(0) \Subset 0, \quad x \varphi(x)\, \psi_1(x) = x \varphi(1)\, \psi_1(1) \Subset 0,$$

oder, was dasselbe besagt, $= 0$. Nach Th. 38) lassen nun aber diese letzten Subsumtionen sich umschreiben in:

$$\varphi(0)\, \psi_1(0) \Subset x, \qquad \varphi(1)\, \psi_1(1) \Subset x_1$$

oder auch, nach Belieben, in:

$$x_1 \Subset \varphi_1(0) + \psi(0), \qquad x \Subset \varphi_1(1) + \psi(1).$$

Multiplizirt man überschiebend die Subsumtionen der ersten, oder addirt ebenso man die der zweiten Zeile, so ergeben sich mit Rücksicht auf Th. 30) und Th. 5) die Formen, in deren erster McColl die Resultante der *Elimination* von x ansetzt:

$\varphi(0)\varphi(1)\psi_1(0)\psi_1(1) = 0$ resp. $1 = \varphi_1(1) + \varphi_1(0) + \psi(1) + \psi(0)$ — oder auch $\Subset$ für $=$ geschrieben.

Ich denke, man erkennt, dass dies nur eine andere Manier ist, zu derselben Resultante zu kommen, zu welcher Boole gelangen würde, indem er die Gleichung $\varphi(x)\psi_1(x) = 0$ links nach x entwickelte und das Produkt der Koeffizienten $= 0$ setzte.

Verbände man dagegen diagonal oder über's Kreuz je zwei Subsumtionen aus den beiderlei Zeilen vermittelst des Syllogismus Barbara (oder Prinzips II) um x oder x_1 zu eliminiren, so würde sich diese Resultante auf eine dem Verfahren von Peirce näher kommende Weise ergeben in den Formen:

$$\varphi(0)\psi_1(0) \Subset \varphi_1(1) + \psi(1), \qquad \varphi(1)\psi_1(1) \Subset \varphi_1(0) + \psi(0).$$

Die beiden Subsumtionen *einer* (der ersten) *Zeile* aber stellen für McColl die *Auflösung* nach der Unbekannten x vor — wofür meines Erachtens wieder diejenigen der Hauptdiagonale den Vorzug verdienen würden, gleichwie dann auch die Subsumtionen der Nebendiagonale die Auflösung nach x_1 am besten darstellen werden. —

Die Art, wie hienach McColl mit *Systemen* von Subsumtionen operirt, erhellt aus folgendem.

Nachdem jede einzelne von den gegebenen Prämissensubsumtionen, wie oben gezeigt in zweie von der Form $\alpha \Subset x$, $\beta \Subset x_1$ aufgelöst, zerfällt ist, können wir als unser Prämissensystem ansehen:

$$\begin{array}{lll} \alpha^1 \Subset x, & \alpha^2 \Subset x, \cdots, & \alpha^n \Subset x, \\ \beta^1 \Subset x_1, & \beta^2 \Subset x_1, \cdots & \beta^n \Subset x_1, \end{array}$$

und lassen diese n Paare nach Def. (3_+) sich zusammenziehen in:

$$\alpha^1 + \alpha^2 + \cdots \alpha^n \Subset x,$$
$$\beta^1 + \beta^2 + \cdots \beta^n \Subset x_1,$$

welche beiden Subsumtionen zusammen dessen „Auflösung“ nach x vorstellen, wogegen deren überschiebend gebildetes Produkt:

$$(\alpha^1 + \alpha^2 + \cdots + \alpha^n)(\beta^1 + \beta^2 + \cdots \beta^n) \Subset 0$$

die Resultante der Elimination des x sein wird.

Ein Beweis für die Vollständigkeit dieser Resultante — nämlich der $\alpha\beta = 0$ für die Prämissen $\alpha \Subset x$, $\beta \Subset x_1$ — wäre nach unsern Betrachtungen in § 21 leicht zu erbringen (resp. ist dort selbst implicite bereits erbracht), ist jedoch von McColl nicht gegeben.

Nach vorstehendem Schema behandelt McColl verschiedene Probleme, namentlich von Boole, darunter auch die bekannte 1. Aufgabe des § 25 und diese mittelst zwei (ein halb) Druckseiten Rechnung. Irgendwelche Vorteile in Hinsicht der Druckersparniss, Vermehrung

der Übersicht oder Erleichterung der Arbeit gegenüber den schon auseinandergesetzten (und teilweise allerdings der McColl'schen sich nähernden) Behandlungsweisen vermag ich aber nicht dabei wahrzunehmen. .—

Wo mehrere Argumente als Eliminanden oder Unbekannte gleichzeitig in Betracht kommen, verfährt übrigens McColl nicht etwa rein nach dem oben geschilderten Schema für eines nach dem andern von diesen. Vielmehr müssen wir, um vollständig sein Zuwerkegehen charakterisirt zu haben und den bis incl. zu unserm § 32 vorgeschrittenen Leser in den Stand zu setzen, die von McColl behandelten Probleme genau in seiner Weise (nach-)rechnen zu können, etwas vorgreifend noch folgendes bemerken.

Sei $F(x, y, z, ..)$ ein Prämissensystem, z. B. ein aussagenrechnerisch angesetztes „Produkt" von Subsumtionen, so wird dasselbe laut Voraussetzung gelten, somit den Wert der 1 des Aussagenkalkuls haben. Irgend ein Konstituent (einer Entwickelung) nach den Argumenten $x, y, z, ..$, z. B. $x y_1 z_1 ..$, wird daher mit diesem Faktor $F(x, y, z ..)$, der ja 1 ist, versehen werden dürfen, sodass

$$xy_1z_1 \cdot\cdot = xy_1z_1 \cdots F(x, y, z \cdot\cdot).$$

Nach dem im Schlusspassus der S. 589 gegebenen Satze (und mit Rücksicht auf dessen zulässige im Kontext der folgenden Seite schon angedeutete Erweiterung) ist aber die rechte Seite dieser Gleichung $= xy_1z_1 \cdots F(1,0,0,\cdot\cdot)$ und somit $\Subset F(1,0,0,\cdot\cdot)$ kraft Th. $6_\times$). Sonach ergibt sich in der Gestalt:

$$xy_1z_1 \cdot\cdot \Subset F(1, 0, 0, \cdot\cdot)$$

ein Prädikat zu dem gedachten Konstituenten, welches sich zunächst wiederum als ein Produkt von Subsumtionen darstellt, worin aber die Argumente nicht mehr vorkommen. Dasselbe wird nun nach den in § 32 gegebnen Schemata, insbesondre dem λ), sich umschreiben lassen in einen von allen Subsumtionszeichen befreiten Ausdruck, der auch als ein solcher des Klassenkalkuls deutungsfähig geworden.

Aus den zu sämtlichen Konstituenten auf diesem Wege gewonnenen Prädikaten leitet hernach McColl durch überschiebendes Addiren sich seine Eliminationsergebnisse ab, die sich so als Prädikationen ergeben für die Konstituenten nach den als Unbekannte zu berechnenden Argumenten. Z. B. aus den Prädikaten zu xy_1z_1 und zu xy_1z fliesst so ein Prädikat zu xy_1, aus diesem und einem ähnlich gewonnenen Prädikate zu xy ergibt sich ein Prädikat zu x (welches durch Kontraposition schliesslich in ein Subjekt zu x_1 verwandelt wird). Etc.

Dass dieses Zuwerkegehen nicht eben vorteilhaft ist, zeigt deutlichst eine Vergleichung der von McColl gegebnen Lösungsarbeit — z. B. bei der 28. Aufgabe des § 25 — mit der — dort — von mir geleisteten. —



Anhänge.

Anhang 1.

Beiläufige Studie über identische Multiplikation und Addition.

(Zu § 6. Überschlagbar.)

Das Verständniss der Betrachtungen wird sehr erleichtert, wenn sich der Leser die geringe Mühe nimmt, sich dieselben mittelst Flächengebieten zu veranschaulichen.

Um einzusehen, *dass es immer gewisse Gebiete c gibt, welche den Forderungen der Def. (5) genügen*, nämlich (S. 205) die Eigenschaft haben, dass *für alle* x, für welche

$\alpha)$ $x ⋹ a$ und zugleich $x ⋹ b$ | $a ⋹ x$ und zugleich $b ⋹ x$

ist, auch

$\beta)$ $x ⋹ c$ | $c ⋹ x$

sein muss, könnte man folgende Überlegung anstellen.

Gesetzt ausser 0 resp. 1 gebe es *kein* x, für das die Beziehungen $\alpha)$ erfüllt sind. Dann genügt bereits der Wert

$c = 0$ | $c = 1$

der obigen Forderung, fernerhin also jedes *beliebige* Gebiet c.

Ist diese Annahme aber *nicht* erfüllt, so gibt es ausser 0 resp. 1 mindestens *ein* x — ein solches heisse x^1 — von solcher Beschaffenheit, dass die Bedingungen $\alpha)$ bezüglich erfüllt sind, d. h. dass wir haben:

$x^1 ⋹ a,\ x^1 ⋹ b$ | $a ⋹ x^1,\ b ⋹ x^1.$

Alsdann ist auch für alle solchen x, für welche

$\beta^1)$ $x ⋹ x^1$ | $x^1 ⋹ x$

ist, a fortiori die Bedingung $\alpha)$ erfüllt.*)

Wenn nun auch das *Umgekehrte* gilt, dass nämlich für *jedes* x, für

---

*) Es wird nachher $x^1 = x'$ als das gemeinsame Anfangsglied zweier von da divergirenden Wertreihen: $x', x'', x''', \ldots$ und $x^1, x^2, x^3, \ldots$ erscheinen, bei deren letzterer die Exponenten auch nur als Indices aufgefasst werden sollen. Man hat demnach für dieses erste x die Wahl unter den Bezeichnungen x^1 und x.

das die Bedingungen α) zutreffen, auch die Subsumtion β^1) besteht, dann ist in Gestalt von

$$c = x^1$$

bereits ein die Forderungen der Def. (5) erfüllender Wert des c gefunden.

Gilt er diese Umkehrung *nicht*, so gibt es mindestens ein x — ein solches heisse x'' — derart, dass die Voraussetzung α) zutrifft, d. h. dass wir haben:

$$x'' ⋹ a, \quad x'' ⋹ b \qquad | \qquad a ⋹ x'', \quad b ⋹ x''$$

ohne dass doch für dieses x auch β^1) erfüllt wäre, d. h. ohne dass wir hätten:

$$x'' ⋹ x' \qquad | \qquad x' ⋹ x''.$$

In diesem Falle kann nach Def.

(3_+) aus $x^1 ⋹ a$ und $x'' ⋹ a$ | $(3_\times)$ aus $a ⋹ x^1$ und $a ⋹ x''$

gefolgert werden, dass

$$x^1 + x'' ⋹ a \qquad | \qquad a ⋹ x^1 x''$$

sein muss, und analog ergibt sich, dass *zugleich* auch ist:

$$x^1 + x'' ⋹ b \qquad | \qquad b ⋹ x^1 x''.$$

Nennen wir aber

$$x^1 + x'' = x^2 \qquad | \qquad x^1 x'' = x^2,$$

so ist dieses Gebiet x^2 jetzt ein solches, für welches x'' bei jener Umkehrung *keine* Ausnahme mehr bildet, desgleichen, nach wie vor, auch x^1 keine. Wir haben nämlich nach Th.

6_+) $x^1 ⋹ x^1 + x''$, also $x^1 ⋹ x^2$ | $6_\times$) $x^1 x'' ⋹ x^1$, also $x^2 = x^1$

desgleichen:

$$x'' ⋹ x^2 \qquad | \qquad x^2 ⋹ x''.$$

Dieses x^2 ist jetzt der den Forderungen unsrer Def. (5) genügende Wert des c selber, es ist:

$$c = x^2,$$

wenn es jetzt überhaupt kein x mehr gibt, welches den Voraussetzungen α) genügte, ohne mit x^2 die Beziehungen einzugehen:

β^2) $\qquad x ⋹ x^2 \qquad | \qquad x^2 ⋹ x.$

Gibt es aber noch solche x, welche sich dem x^2 — will ich kurz sagen — „nicht *fügen*", d. h. für welche zwar die Voraussetzungen α) aber nicht die Subsumtion β^2) erfüllt ist, so kann man ebenso weiter schliessen.

Es sei dann x''' irgend eines derselben; so haben wir:

$$x''' ⋹ a, \quad x''' ⋹ b \qquad | \qquad a ⋹ x''', \quad b ⋹ x'''$$

aber doch nicht

$$x''' ⋹ x^2 \qquad | \qquad x^2 ⋹ x'''.$$

Dann folgt nach Def. (3) aus:

$$x^2 ⋹ a \quad \text{und} \quad x''' ⋹ a \qquad\Big|\qquad a ⋹ x^2 \quad \text{und} \quad a ⋹ x'''$$

dass

$$x^2 + x''' ⋹ a \qquad\Big|\qquad a ⋹ x^2 x'''$$

und analog auch:

$$x^2 + x''' ⋹ b \qquad\Big|\qquad b ⋹ x^2 x'''$$

ist. Nennen wir nunmehr

$$x^2 + x''' = x^3 \qquad\Big|\qquad x^2 x''' = x^3,$$

so ist x^3 ein solches Gebiet, welchem sich alle bisherigen x „fügen", sogar das letzte: x''', da wir nach Th. 6) haben:

$$x''' ⋹ x^3 \qquad\Big|\qquad x^3 ⋹ x'''$$

während α) ja ohnehin von diesem x''' erfüllt wird.

Gibt es jetzt kein x mehr, welches α) erfüllt, ohne auch die Subsumtion:

$$\beta^3) \qquad x ⋹ x^3 \qquad\Big|\qquad x^3 ⋹ x$$

zu erfüllen, so ist: $c = x^3$ als ein die Anforderungen der Def. (5) erfüllendes c gefunden.

Gibt es aber noch ein x — es heisse x'''' — welches sich bei der Umkehrung dem x^3 „nicht fügt", so kann man, ebenso weiter schliessend, ein:

$$x^3 + x'''' = x^4 \qquad\Big|\qquad x^3 x'''' = x^4$$

konstruiren, für welches sich x'''' samt allen früheren Gebieten x „fügt".

In dieser Weise fortfahrend kann man aus jedem angebbaren sich „nicht fügenden" und dem zuletzt gewonnenen x allemal ein neues x ableiten, bezüglich dessen sich alle bisherigen „fügen"; man kann das sich nicht fügende sozusagen endgültig beseitigen.

Man könnte sich hienach zu dem Schluss berechtigt glauben, es müsse ein c existiren, für das sich jedes x „fügt". In der That sieht man sich vor die Alternative gestellt, entweder diese Existenz zuzugeben, oder unbegrenzt in der angegebenen Weise fortzuschliessen.

Jener Schluss wäre gleichwol *nicht stichhaltig*. Beispielsweise können wir dies aus dem bekannten Paradoxon von Achilles mit der Schildkröte lernen, wo die Alternative vorliegt, entweder zuzugeben, dass jener diese nicht einholen könne, oder aber auf den zehntel, hundertel, tausendtel etc. Schritt, der noch fehlt, ohne Ende fortzuschliessen. Die Abneigung vor letzterem ist kein zwingender Grund, sich für ersteres zu entscheiden. —

Dass es Gebiete c gibt, die den Forderungen der Def. (5) genügen ist stichhaltig ja schon in § 6 bewiesen.

Man könnte es nebenher auch so einsehen. Da nach Th. 6_+) resp. $6_\times$):

$$a ⋹ a + b, \quad b ⋹ a + b \qquad\Big|\qquad ab ⋹ a, \quad ab ⋹ b$$

sein muss, so ist für jedes die Bedingungen α) erfüllende x auch sicher:

$$x ⋹ a + b \qquad\Big|\qquad ab ⋹ x,$$

folglich ist unter anderm auch

$$c = a + b \qquad\qquad \Big| \qquad\qquad c = ab$$

ein die Forderungen der Def. (5) erfüllendes c. —

Ungeachtet der Analogie mit Def. (5), welche in unsrer Theorie die Def. (4) — vergl. Th. 7) — darbietet, lässt sich an letztere doch eine Studie, welche analog der vorstehenden erschiene, nicht knüpfen. Vielmehr ist man hier augenblicklich mit den Überlegungen fertig:

Dass es c gebe, welche den Forderungen der Def. (4) genügen, nämlich die Eigenschaft haben, dass für alle x, welche der Subsumtion β) genügen, auch die beiden Subsumtionen α) erfüllt seien, ist sofort schon klar, wenn man nur das Gebiet:

$$c = 0 \qquad\qquad \Big| \qquad\qquad c = 1$$

in's Auge fasst. Nach Th. 5) kann nämlich für dieses c die Subsumtion β), also die

$$x \subseteq 0 \qquad\qquad \Big| \qquad\qquad 1 \subseteq x$$

überhaupt nur bestehen, wenn

$$x = 0 \qquad\qquad \Big| \qquad\qquad x = 1$$

selbst ist, und dieses einzige x, welches β) erfüllt, erfüllt dann auch gemäss Def. (2) die beiden Subsumtionen α).

Das angeführte c ist also bereits ein die Forderungen der Def. (4) schon erfüllendes.

Anhang 2.

Exkurs über Klammern.

(Zu § 10.)

Derselbe ist vorzugsweise bestimmt für nicht mathematischgebildete Leser.

Indessen dürfen doch auch in einer vollständigen Theorie die fundamentalen Auseinandersetzungen über ein so wichtiges Element der Zeichensprache, als welches die Parenthesen sich darstellen, nicht fehlen.

Man versetze sich zunächst auf den Standpunkt zurück, wo eben erst das Th. 13) bewiesen ist, resp. bewiesen werden soll. Dasselbe fordert schon (und erstmalig) die nachstehenden Bemerkungen heraus.

Dass *Klammern* oder *Parenthesen* (brackets) auch im identischen Kalkul vonnöten sind, wird bedingt durch den Umstand, dass man auch in diesem Kalkul oft zu thun, zu operiren, umzuspringen, zu „rechnen" hat mit Gebieten, Klassen oder Aussagen (etc.), die einen *zusammengesetzten*, einen *komplizirten* Namen oder Ausdruck besitzen — einen Namen z. B. von welchem einzelne Bestandteile oder Elemente selbst wieder Gebiete oder Klassen vorstellen mögen, verschieden von dem durch den ganzen Namen vorgestellten Gebiete.

Einfach (simple) — im strengen oder engsten Sinn des Worts — nennen wir einen Namen, Term, wenn er ein Buchstabe ist, wie a oder b, x, α, A, etc., desgleichen, wenn er eine Ziffer, wie 0, 1 (auch ∞).

Zusammengesetzt (compound) heisst der Name in jedem anderen Falle.

Mag es einfach oder zusammengesetzt sein, so muss an ein Zeichen die Anforderung gestellt werden, dass es im Druck *isolirt* stehe, nämlich von andern Zeichen durch unbedruckte *Zwischenräume, Spazien,* geschieden sei. Zusammengesetzt sollte nun eigentlich ein Zeichen immer dann heissen, wenn an ihm selbst sich noch in dieser Weise *getrennte Teile* erkennen lassen, wogegen es einfach zu nennen wäre, sobald in ihm die Druckerschwärze ein *zusammenhängendes* Flächenbild bedeckt. Es machen jedoch hievon die Buchstaben i, j (und die als Namen hier überhaupt nicht verwendeten Vokale $\ddot{a}, \ddot{o}, \ddot{u}$) eine Ausnahme. Dass es unverfänglich ist, auch diese noch den einfachen Zeichen beizuzählen, beruht erstlich auf dem Um-

stand, dass wir einen *über* Buchstaben zu setzenden Punkt oder Tupfen (dot) hier nicht als Operationszeichen verwenden werden, und zweitens auf der nunmehr sogleich im Haupttext folgenden Bemerkung.

Aus einfachen Namen können auch neue, demnach „zusammengesetzte" Namen aufgebaut werden, wobei man jene jedoch *in der Regel* mitsamt den etwa sie verbindenden Knüpfungszeichen *einer bestimmten Zeile entlang* zu setzen und zu lesen hat. Für die meisten Zwecke wird es darum zulässig sein, auch solche Namen als „einfache" (im weiteren Sinne) gelten zu lassen, die nur *auf der Zeile wenigstens* keine getrennten Bestandteile aufweisen.

So darf der als einfacher Name zu behandelnde Buchstabe allenfalls noch mit einem *Accente* oder aber *Suffixum*, unteren *Index*, also überhaupt mit einem (Stellen-) *Zeiger* versehen sein, wie a' (sprich: a strich, oder a prim, englisch: a dash), a'', .. a_0, a_1, a_2, .. a_n (gesprochen: a null, a eins, a zwei, ... a unten n), desgleichen — im identischen Kalkul wenigstens, und dies entgegen der sonstigen mathematischen Gepflogenheit — auch mit einem *Exponenten*, wie a^0, a^1, a^2, .. a^n (spr. a hoch null, etc.) indem hier S. 261 sq. die Exponenten stets nur als „obere Indices" angesehen werden, (das Kapitel über die „Logik der Beziehungen" vielleicht ausgenommen).

Wie schon in B der Einleitung S. 45, erwähnt, wird durch die Zeiger der Vorrat an „einfachen" Namen, die zum Benennen zur Verfügung stehen, der sich sonst auf die Buchstaben der paar Alphabete beschränken würde, fast unbegrenzt vermehrt.

Durch ihre Stellung über oder unter dem Niveau der Zeile aber, sowie durch ihren kleineren Druck in dieser andern Höhenlage, sollen die Zeiger sich als zu dem ihnen unmittelbar links vorangehenden Buchstaben gehörige zu erkennen geben, und ähnliches gilt auch von dem „Negationsstrich".

Der *Negationsstrich* nimmt im identischen Kalkul eine Sonderstellung ein, indem er hier als ein *Operationszeichen* gebraucht werden wird, um die „Verneinung" des mit ihm behafteten Ausdrucks zu fordern, darzustellen. Demgemäss werden wir a_1 (gelesen: a nicht) eigentlich als einen zusammengesetzten Namen anzusehen haben und können ihn als einfach nur in den (oben charakterisirten) Fällen gelten lassen, wo auch a' z. B. als einfach angesehen werden dürfte, nämlich wo über ihn hinweg *streng auf der Zeile* weiterzulesen ist.

[In der 25. Vorlesung gilt auch der Accent sowie das Suffixum 0 als ein Operationszeichen, indem dort a' steht für das „Bild" von a und a_0 für die „Kette" von a, was dort also zu ähnlichen Bemerkungen in Bezug auf den Accent und das Suffixum 0, wie soeben in Bezug auf den Negationsstrich Veranlassung geben würde.]

Abgesehen von diesem Operationszeichen, mit welchem bereits an *einem* einzigen Symbole (dem es rechts unten anzufügen) operirt werden kann, verwenden wir als „Operationszeichen" fast nur noch Knüpfungszeichen, und zwar solche, welche mindestens zwei Symbole auf der Zeile verbinden. Wesentlich kommen sogar nur zweierlei solche Knüpfungszeichen: plus und mal, für uns in Betracht, als + und · (oder ×), und nur

vorübergehend, in § 24, treten zu diesen noch Subtraktions- und Divisionszeichen hinzu, unter letztern der Bruchstrich, der zwei Symbole in vertikaler Richtung verbindet.

Ausser durch Operationszeichen, werden aber Ausdrücke auch noch durch *„Beziehungszeichen“* zu Aussagen verbunden, wie $=$, $\neq\!\!\!\in$, $\neq$ etc. die sämtlich nur auf der Zeile zwischen sie zu treten haben.

Ein *Wort*, sofern es nicht blos aus *einem* Buchstaben besteht, sowie eine Verbindung von Worten zu einer Beschreibung oder zu einer Aussage, würde als ein „zusammengesetzter“ Name oder Ausdruck hinzustellen sein.

Solche führen wir aber nicht in die Rechnung ein, da sie sich für die Bezeichnungszwecke der exakten Logik als zu umständlich erweisen.

Unser Hauptbestreben bleibt ja darauf gerichtet, eine *Ökonomie der Zeichen* zu verwirklichen und zwar, da an die Zeichen auch die Gedanken geknüpft sind, damit auf möglichste *Ersparniss an Gedankenarbeit* hinzuwirken.

Wenn darum — etwa in einer Textaufgabe — eine Klasse mit Worten gekennzeichnet ist, und es angezeigt erscheint, dieselbe der „Rechnung“ zu unterwerfen, sie in Subsumtionen, Gleichungen, Formeln oder auch Ausdrücke eingehen zu lassen, überhaupt sie zum Gegenstande anhaltender Überlegungen zu machen, so werden wir wie gesagt dieselbe jeweils möglichst einfach uns darstellen, demgemäss also von vornherein einen Buchstaben, einen *„einfachen“* Namen für sie einführen.

Muss ja doch bei den an ein Objekt geknüpften Untersuchungen — vollends beim Rechnen mit demselben — sein Name erfahrungsmässig in häufiger Wiederholung gedacht und ausgesprochen werden, und verursacht (S. 44) ein umständlicher Name, ein unbequemes Zeichen, doch allemal, so oft es nur gebraucht werden muss, einen höchst ärgerlichen Aufenthalt!

Hauptsächlich auf diesem Umstand, dass sie die Wiederholung meistens langwieriger Namen ersparen durch den Hinweis auf ihre einmal vollendete Aussprache, beruht — nebenbei bekanntlich — der grosse Wert der Pronomina demonstrativa für die Wortsprache.

Solcher nun bedürfen wir im Kalkul nicht (können sie da auch nicht brauchen!) und sichern uns den gleichen Vorteil in noch höherem Maasse, indem wir für den verwickelten Namen einen Buchstaben einführen, denselben dann in jedem Bedarfsfalle wiederholend.

Wenn nun bei den anzustellenden Überlegungen unsre einfachen Namen vermittelst der Rechnungs- und Beziehungszeichen des identischen Kalkuls zusammenzusetzen sind zu *„Ausdrücken“*, welche vielleicht selbst wieder zur Bildung noch komplizirterer Ausdrücke oder

Aussagen als deren Operations- oder Beziehungsglieder weiterzuverwenden sein werden, wenn also an solche noch fernere Überlegungen angeknüpft werden müssen, welche ein (eventuell wiederholtes) Herstellen, Ansetzen ihres Namens erfordern —, so würde es nach bisheriger Maxime angezeigt erscheinen, auch für sie wiederum „einfache" oder Buchstaben als Namen neu einzuführen — wo wir dann gänzlich der Klammern entraten könnten.

In der That würde diese Praxis: für jede in Betracht zu ziehende Klasse, für jeden Ausdruck sofort einen einfachen Namen zu schaffen, am besten durchweg eingehalten, wenn nicht ihre strikte Befolgung einen Misstand nach sich zöge, durch die Rücksichtnahme auf welchen die Wirksamkeit jener Maxime wieder eingeschränkt werden muss. Resultiren würde nämlich eine Überladung der Untersuchungen mit einer allzugrossen Menge aparter (wenn auch einfacher) Zeichen, deren Bedeutung, da sie doch wenigstens während gedachter Untersuchungen festgehalten werden muss, im Gedächtnisse zu behalten, demselben eine übergrosse Last aufbürden hiesse.

Aus diesem Grunde verwenden wir zur Bezeichnung von solchen Gebieten oder Klassen, die zu andern bereits einfach benannten in einer einfachen Beziehung stehen, anstatt willkürlich zu erfindender „einfacher", doch oft lieber „zusammengesetzte" Namen, und zwar solche, welche durch die Art ihrer Zusammensetzung stetsfort erkennen lassen, in welcher Beziehung jene gedachten Gebiete zu diesen erwähnten stehen sollen.

Im Ganzen kommt es also darauf an, den goldenen Mittelweg zu gehen zwischen Gebundenheit an bemühend schwerfällige Ausdrucksweisen einerseits und Überlastung des Gedächtnisses andrerseits, m. a. W. darauf: dass man das an sich gerechtfertigte Bestreben nach möglichster Erleichterung und Vereinfachung der Ausdrucksmittel zügeln lasse durch die Rücksicht auf eine nur mässige Inanspruchnahme des Gedächtnisses, namentlich auf Entlastung des mechanischen Gedächtnisses — durch Beizug des judiziösen — vermittelst mässigen Gebrauches von zusammengesetzten und zwar von *rationell* zusammengesetzten Namen.

Sobald nun bei einem zusammengesetzten Ausdruck eine Operation angedeutet, *an* oder *mit* ihm vorgenommen werden soll, wird die Anbringung von Klammern zum unabweislichen Bedürfniss: damit einer Mehrsinnigkeit der Bezeichnungsergebnisse vorgebeugt werde.

Um dies näher darzulegen, wollen wir vorzugsweise die Fälle in's Auge fassen, wo jene Beziehungen darstellbar, wo nämlich zusammen-

gesetzte Ausdrücke herzustellen sind durch die Knüpfungszeichen des identischen Kalkuls.

Sind a, b, c Gebiete oder Klassen, so werden $a \cdot b$, $b \cdot c$, $a + b$, $b + c$, etc. die nächstliegenden Beispiele von neuen, aus den vorliegenden abgeleiteten Gebieten oder Klassen sein, für welche sich uns die angeführten Symbole als „zusammengesetzte" Namen zur Verfügung stellen.

Wenn wir nun z. B. ein Gebiet a zu multipliziren haben mit dem Gebiete $b + c$, so dürfen wir für das sich dadurch ergebende Gebiet nicht ohne weiteres schreiben:

$$a \cdot b + c$$

aus dem Grunde, weil dieser Ausdruck ebensogut gehalten werden könnte für das Ergebniss der Addition eines Gebietes c zu dem Gebiete $a \cdot b$. Und diese beiden Ergebnisse wären doch verschieden, wie schon die Veranschaulichung derselben für das nächste beste Beispiel zeigt; sie dürften also durchaus nicht verwechselt werden. Solcher Verwechselung vorzubeugen ist die Klammer bestimmt.

Das Malzeichen in obigem Ausdruck $a \cdot b + c$ erscheint faktisch nur neben den Bestandteil b des zusammengesetzten Namens $b + c$ gestellt, und niemand vermag dem Ausdruck anzusehen, dass es sich auf diesen ganzen Namen beziehen sollte.

Ebenso bliebe in Hinsicht des Pluszeichens der Zweifel offen, ob es sich auf das ganze Produkt $a \cdot b$ oder nur auf den ihm zunächst stehenden Faktor b desselben beziehen solle.

Solche Unbestimmtheit (hier Zweideutigkeit, Doppelsinnigkeit) zu heben vermögen wir vermittelst der Klammern, und zwar, indem wir als obersten Grundsatz adoptiren:

Sooft an oder mit einem „zusammengesetzten" Ausdruck eine Operation ausgeführt werden soll, welche durch ein an demselben anzubringendes Operationszeichen darzustellen ist — wie z. B. auch durch eine bestimmte Art der Verknüpfung des Ausdruckes mit noch anderen Symbolen — *so muss derselbe eingeklammert werden*, und zwar: damit man erkenne, das Operations- resp. Verknüpfungszeichen beziehe sich auf den ganzen Ausdruck und nicht etwa blos auf den ihm zunächst stehenden Bestandteil desselben.

Hienach erscheinen denn in der That die beiden vorhin noch in der Gefahr einer Verwechselung befindlichen Ausdrücke als $a \cdot (b + c)$ — sprich a mal *Klammer* b plus c, *geschlossen* — und $(a \cdot b) + c$ — spr. Klammer a mal b geschlossen, plus c — nun auch äusserlich ge-

bührend unterschieden, und war es von diesen der erstere $a \cdot (b + c)$, den wir zu bilden vorhatten.

Die Klammer ( ) mag angesehen werden als Überrest einer einfach geschlossenen (unverknoteten) Kurve, welche den zusammengesetzten Namen oder Ausdruck als ihren Inhalt umfassen, einhegen soll und ihn so zu einem Ganzen zusammenschliesst, welches nur als solches zu allem, was ausserhalb befindlich in Beziehung treten kann. So in unserm Beispiele:

$a \cdot$ ($b+c$) Von dieser Ellipse brauchen aber nur die in die Zeile fallenden beiden Teile wirklich ausgezogen oder forterhalten zu werden, weil eben nur dieser entlang der Ausdruck gelesen wird. Zugleich erhellt aus dieser Bemerkung, wie zuweilen auch ein wagrechter Strich oder Haken ⌣ als „*Vinculum*“ die Klammer zu ersetzen vermag — so in der Arithmetik der verlängerte Wurzelstrich, sowie der *Bruchstrich*, zum Exempel bei $\frac{b+c}{a}$.

Sich die Befolgung obiger Regel zu erlassen, ein Dispens von derselben, ist nur zulässig auf Grund bewusster Überlegungen (oder durch solche gerechtfertigter Übung), die wir nachher erörtern werden.

Ist der verknüpfte ein einfacher Name wie a oder b', so ist dessen Einklammerung unnötig, indem bei $a \cdot b'$ niemand auf die Meinung verfallen kann, das Malzeichen beziehe sich nur etwa auf die rechte Hälfte des Buchstabens a, und nicht auf diesen ganzen Buchstaben und niemand auch in den Irrtum geraten wird, es beziehe sich au das b ohne seinen Accent. [Sollte freilich einmal — zu irgendwelchem Zwecke — das Produkt $a \cdot b$ accentuirt werden, so müsste es eingeklammert, es müsste dann $(a \cdot b)'$ geschrieben werden.]

Sofern also alle in Betracht gezogenen Gebiete oder Klassen mit einfachen Namen benannt sind, ist das Institut der Klammern überflüssig.

Die „überflüssige“ Klammer bildet ein noch für andere Zwecke disponibles Merkzeichen, und mag man z. B. in einer Untersuchung mit (a), (b), etc. ganz andere Dinge wie a, b, $\cdots$ bezeichnen.

Auch in den andern Fällen wird die Klammer entbehrlich, sobald man die erforderliche Menge von einfachen Namen einführt.

Der obige Ausdruck $a \cdot (b+c)$ z. B. kann auch ohne Klammern dargestellt werden in Gestalt von $a \cdot z$, sobald wir $b+c = z$ nennen, und ebenso lässt sich, indem $a \cdot b = x$ genannt wird, ohne jegliche Klammer $x+c$ schreiben für dasjenige was wir oben mit $(a \cdot b)+c$ darstellen mussten.

Um noch ein Beispiel anzuführen, so lässt sich das Assoziationsgesetz der Multiplikation ohne Klammern dahin aussprechen, dass, wenn $a \cdot b = x$ und $b \cdot c = y$ genannt wird, dann $a \cdot y = x \cdot c$ sein müsse.

Die Klammer, indem sie uns die Einführung noch besondrer einfacher Namen erspart, überhebt uns also auch der Nötigung, die Be-

deutung dieser Namen *ausserhalb* des Textes auseinanderzusetzen, sei es in vorgängiger Erklärung, sei es in nachträglicher Anmerkung zu demselben, wo nicht in Form einer Einschaltung; sie gestattet, von dem, was sie zu bedeuten hätten, *im Zusammenhange* des Textes zu reden. Anstatt „z, welches $b+c$ bedeutet" sagen wir sogar bequemer „$(b+c)$".

Fassen wir den Zweck der Klammern noch unter einem andern Gesichtspunkt in's Auge. Sobald in einem Ausdruck *mehrere* Knüpfungszeichen zu erblicken sind, fällt den Klammern die Aufgabe, die Mission zu, die Succession oder *Reihenfolge der* betreffenden *Operationen* zu regeln. Nach der Erklärung, welche unsre Operationen der identischen Multiplikation und Addition gefunden haben, hat es nur einen Sinn, zu verlangen, dass zwei Gebiete (zu einem dritten) verknüpft werden. Es wäre aber sinnlos, etwa zu fordern, dass a, b und c gleichzeitig durch Multiplikation und Addition verknüpft werden sollten. Wenn a tempo a mit b multiplizirt und b mit c summirt werden sollte, was sich ja in der That durch verschiedene Personen ausführen liesse, so würden auch *zwei* Ergebnisse $a \cdot b$ und $b+c$ resultiren. Zu *einem* Ergebnisse durch die *beiden* Rechnungen der Multiplikation und Addition lassen sich die drei Gebiete nur vereinigen, wenn diese Rechnungen *nacheinander*, *successive*, *fortschreitend* ausgeführt werden, und da frägt es sich vor allem, in welcher Ordnung oder (Reihen-)Folge.

Wird zuerst b und c summirt, und hernach (mit dem Ergebnisse) a multiplizirt, so entsteht $a \cdot (b+c)$.

Wird dagegen zuerst a mit b multiplizirt, und dann (zu dem Ergebnisse) c addirt, so entsteht $(a \cdot b)+c$.

So wenig man ein Haus bauen und hernach erst die Steine und Balken dazu liefern kann, so wenig kann man an einem Gebiete eine Operation (sei es auch nur andeutungsweise) vollziehen, bevor man (einen Namen für) dies Gebiet selbst hergestellt hat. Ehe man es wenigstens *gedacht*, kann man nichts daran oder damit machen. Auch „die Nürnberger hängen Keinen, sie hätten ihn denn zuvor".

Es ist darnach eine *innerhalb* einer Klammer vorgeschriebene Operation jeweils *vor* derjenigen ausgeführt zu denken, welche an oder mit dem Klammerausdruck selbst vollzogen werden sollte, deren Zeichen also auch nur *ausserhalb* von dessen Klammer zu erblicken sein wird. Man wird in einem jeden Bestandteil des Ausdrucks jeweils leicht die innersten Klammern ausfindig machen, und für die Interpretation sowol als eventuell auch für die „Ausrechnung" von komplizirten Ausdrücken, welche Klammern ev. *in* Klammerausdrücken und wieder in

solchen etc. desgleichen vielleicht auch neben solchen eingeschachtelt enthalten, ist also die Regel gerechtfertigt, diese Prozesse *von innen nach aussen* fortschreitend auszuführen. Auf dieser Bemerkung vor allem beruht die für den Anfänger schon nicht ganz leichte Kunst des richtigen Verstehens und Ansetzens von Ausdrücken, eine Kunst in Bezug auf welche, wie bei jeder Kunst, die Übung ein Übriges, vielleicht das meiste, thun muss.

In prinzipieller Hinsicht ist nun aber noch zweierlei zu bemerken.

Erstens ist das Einschachteln von Klammerausdrücken in neue Klammern u. s. w. sowie überhaupt das häufige Anbringen von solchen, immerhin ein lästiger Notbehelf; der erstere Fall sogar nicht selten ein die Übersicht erschwerender Umstand. Man sucht diesen Misstand dadurch zu verringern, dass man da, wo im nämlichen Ausdruck Klammern von einer andern umschlossen werden, für die eingeschlossenen und für die umschliessende verschiedene Klammerhaken mit Vorliebe verwendet, so diejenigen der *runden* $(\cdots)$, der geschwungenen oder *geschweiften* $\{\cdots\}$ und der *eckigen* $[\cdots]$ Klammer.

Zudem aber sucht man überhaupt den Gebrauch der Klammern *möglichst einzuschränken.*

Ein für allemal sei bemerkt, dass man übereingekommen ist, die zusammengesetzten Ausdrücke, welche durch ein logisches *Beziehungszeichen* zu verknüpfen sind, welche also die linke oder rechte *Seite* einer Subsumtion, oder einer Gleichung, einer Ungleichung, etc. bilden sollen, im (Gebiete)Kalkul *niemals einzuklammern.* Also man schreibt z. B.:

$$ab \mathrel{=\!\!\!\in} a + b \quad \text{und nicht:} \quad (ab) \mathrel{=\!\!\!\in} (a + b).$$

Erst im „Aussagenkalkul", wo jene Ausdrücke Aussagen bedeuten, die selbst wieder derartige Beziehungszeichen enthalten mögen, kann solche Einklammerung nötig werden, und würde in der That z. B. $a \mathrel{=\!\!\!\in} b = c$ ganz etwas anderes bedeuten, als $(a \mathrel{=\!\!\!\in} b) = c$ — jenes nämlich kund geben, dass a in b enthalten sei, welches einerlei mit c, dieses aber, dass c die Aussage bedeute (oder ihr äquivalent sei), dass a in b enthalten. Das Nähere wird sich aus dieser Disziplin ergeben.

Der Gebrauch der Klammer ist dort durch die Konvention geregelt, dass, wo nicht eine solche Klammer das Gegenteil vorschreibt, die Zeichen der identischen Operationen stets *vor* den Beziehungszeichen interpretirt werden müssen.

Darnach dürften wir im Gegensatz zum obigen Beispiel in einem Ausdruck des Aussagenkalkuls, wie $a(b \mathrel{=\!\!\!\in} a) + b$, die Klammer jedenfalls nicht weglassen.

Doch kehren wir wieder zum Gebietekalkul zurück.

Ausserdem sich von der Klammer zu dispensiren gelingt zunächst *in der Hälfte der Fälle.*

Wo es nämlich, wie in den angeführten Beispielen lediglich darauf ankommt, vermittelst der Klammer zwei verschiedene Auffassungsmöglichkeiten für einenunddenselben Ausdruck zu unterscheiden genügt es, und ist es folglich erlaubt, die Klammer bei der einen Auffassungsweise konsequent wegzulassen, wofern man nur sie bei der andern konsequent beibehält.

Man ist in der Mathematik übereingekommen, *beim Addiren von Produkten die Klammern* (um diese herum) *wegzulassen**), und diesem Gebrauche wird es zweckmässig sein, sich auch im identischen Kalkul anzuschliessen. Sonach schreiben wir für

$$(a \cdot b) + c \quad \text{hinfort bequemer} \quad a \cdot b + c \quad \text{oder} \quad ab + c.$$

Um so gewissenhafter muss dann aber beim Multipliziren von Summen die Klammer (um letztere herum) beibehalten werden und ist es niemals erlaubt, einen Ausdruck $a(b+c)$ in $ab+c$ abzukürzen.

Beispielsweise kann hienach der Ausdruck $a \cdot b + c \cdot d$ nur mehr als $(ab)+(cd)$, nicht aber als $a(b+c)d$, auch weder als $a(b+cd)$ noch als $(ab+c)d$ verstanden oder gedeutet werden.

So wird ferner — wenn wir hier vorgreifend auch den Negationsstrich mit in den Bereich der Betrachtungen ziehen — bei $a \cdot (b_1) = ab_1$ und $a + (b_1) = a + b_1$ die Klammer sich sparen lassen, wofern sie nur bei Ausdrücken der Form $(a \cdot b)_1$ und $(a+b)_1$ festgehalten wird, und indem wir ersteres thun wird hingebracht, dass nun, den Kommutationsgesetzen 12) entsprechend, das ohnehin nicht missverständliche $b_1 a$ resp. $b_1 + a$ ohne weiteres umgestellt werden darf in ab_1 und $a + b_1$. Sofern nicht eine Klammer es anders vorschreibt, wird also die Negation jeweils *vor* den beiden andern Spezies ausgeführt zu denken sein.

Ebenso mögen wir definiren: $a_1' = (a')_1$, da wo vielleicht $(a_1)'$ noch einen andern Sinn behält. —

Für die Zeichen Π und Σ werden hinsichtlich des Klammergebrauchs in § 30 noch besondere Festsetzungen getroffen.

Ferner aber kann die Klammer auch in beiden Fällen weggelassen, sie kann *durchaus gespart* werden überall da, wo die durch die Klammerstellung von einander unterschiedenen Ausdrücke denknotwendig denselben Wert haben müssen, wo sie nur als verschiedene Namen für das nämliche Gebiet, für ein und dieselbe Klasse erscheinen.

Ein erstes Beispiel liefert uns das Assoziationsgesetz 13) selbst.

Nach diesem — welches wir nur etwa für die Multiplikation in's Auge fassen wollen — ist es für den Wert des Produktes gleichgültig, auf welche Weise man in dem Ausdruck

---

*) Über die allgemeineren Konventionen, von welchen die obige nur einen Sonderfall vertritt, vergleiche mein Lehrbuch [1] p. 217 sqq.

$$a \cdot b \cdot c$$

eine Klammer anbringt. Eine solche *kann* nur entweder die beiden ersten oder aber die beiden letzten der drei als Faktoren angesetzten Symbole — bei Festhaltung von deren Reihenfolge — umschliessen, da a und c durch das mittlere Symbol b getrennt erscheinen, folglich deren Einschliessung ohne b in eine Klammer unthunlich ist. Eine Einklammerung des ganzen Ausdrucks abc ist ja, solange nicht weitere Operationen an ihm vorzunehmen sind, als unnötig zu verwerfen, und ebenso eine Einklammerung der einfachen Symbole a, b oder c selbst bereits ausgeschlossen.

Auf eine der beiden angegebenen Arten aber *muss* die Klammer auch gesetzt gedacht werden, wenn überhaupt dem Ausdruck ein Sinn untergelegt werden soll. Denn wir können auch zwei Multiplikationen nicht gleichzeitig ausführen: eine von beiden — entweder die von a mit b oder die von b mit c — muss den Vortritt haben, m. a. W. ein Produkt ist bis jetzt nur für zwei Faktoren definirt worden; ein Produkt von dreien aber zur Zeit noch unerklärt.

Wir könnten demnach unter $a \cdot b \cdot c$, wenn überhaupt etwas, so nur entweder $(a \cdot b) \cdot c$ oder $a \cdot (b \cdot c)$ verstehen. Welches von beiden wir thun, ist aber, wegen $a(bc) = (ab)c$, also kraft des Assoziationsgesetzes gleichgültig und folglich braucht darüber auch keine Vorschrift gegeben zu werden. Wir schreiben künftig unterschiedslos, bequemer und übersichtlicher für die genannten beiden Ausdrücke den einen

$$abc$$

und sind so naturgemäss zu dem Begriff des *Produktes von drei* (zunächst noch in bestimmter Ordnung gegebenen) *Faktoren* a, b und c gelangt, als welches wir — unter dem Namen abc — zu verstehen haben den kraft des Assoziationsgesetzes übereinstimmenden Wert der Produkte $a(bc)$ und $(ab)c$.

Als eine Art von psychologischem *Postulat*, neu hinzutretend zu den auf die Interpretation bezüglichen und in § 7 schon angeführten Postulaten, kann es allerdings vielleicht hingestellt werden, dass wir uns schliesslich dieses Gebiet abc noch auf eine (anscheinend) dritte Weise, nämlich: als das *den dreien* a, b und c schlechtweg *gemeinsame* Gebiet, im Geist zu erzeugen und vorzustellen vermögen, ohne dabei einen der vorher angedeuteten Bildungsprozesse wiederholen, mit Bewusstsein durchlaufen zu müssen.

Indem wir diese Überlegungen nun analog auch auf beliebig viele Faktoren ausdehnen, schliessen sich hier ebenso naturgemäss an die Betrachtungen des folgenden Anhangs.

Anhang 3.

Ausdehnung von Begriff und Sätzen über Produkt und Summe von zweien auf beliebig viele Terme.

(Zu § 10.)

Ich werde zunächst nur vom Produkte reden. Um den Begriff eines Produktes von beliebig viel — sagen wir n — Faktoren zu gewinnen, bedürfen wir ausser dem speziellen Assoziationsgesetz $13_{\times}$) und dem speziellen Kommutationsgesetz $12_{\times}$) noch wesentlich des Satzes $16_{\times}$), dass Gleiches mit Gleichem multiplizirt Gleiches gibt (so wenigstens im Falle der Anwendung von nie mehr als zwei Faktoren) — wobei, wie in dieser ganzen Disziplin „gleich" ja eigentlich nur Identisches genannt wird. Dieses Th. 16), welches wir im System erst ein wenig später aufzuführen vorzogen, könnte, samt dem dasselbe vorbereitenden Th. 15), auch unmittelbar hinter Th. 13) angereiht werden, und ist für die nachfolgenden Überlegungen vorausgeschickt zu denken.

Diese Überlegungen, welche als ebenso scharfsinnig, wie einfach und fundamental zu bezeichnen sind, rühren wesentlich von Hermann Grassmann her. Von Hermann Hankel und von mir reproduzirt, wobei sie vielleicht noch ein wenig gewonnen haben, sind sie neuerdings auch von O. Stolz in dessen Vorlesungen über allgemeine Arithmetik aufgenommen worden. Es könnte in ihrem Betreff auf dieses letztere Werk sowol wie auf mein Lehrbuch[1] verwiesen werden. Doch will ich, um ein möglichst lückenloses Gebäude hier aufzurichten, das für unsere Disziplin Unentbehrliche davon hier einfügen, und zwar mit der Vereinfachung, welche Herr Stolz[1] der Darstellung noch hat angedeihen lassen.

Was auf die Anordnung (Reihenfolge) und was auf die Zusammenschliessung (mittelst Klammern, Gruppirung) der Faktoren sich bezieht, ist nach Grassmann's Vorgange scharf auseinander zu halten. Wenn wir zunächst von der letzteren, also von der Klammerstellung, handeln wollen, so ist demnach die Reihenfolge der als Faktoren zu verwendenden Symbole von vornherein gegeben zu denken und im Verlauf der Untersuchung unabänderlich festzuhalten.

Es empfiehlt sich, diese Faktoren mit numerirten Buchstaben zu bezeichnen, sie etwa

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots\ a_{n-1},\ a_n$$

zu nennen.

Das Th. $13_\times$) zeigte uns, dass die Klammerstellung bei drei Faktoren gleichgültig ist. Dazu gilt der

Satz $13)^n$. *Wenn die Klammerstellung bei weniger als n Faktoren irrelevant ist, so muss sie es auch bei n Faktoren sein.*

Beweis. Nach der Voraussetzung ist es bei 3, 4, · · bis inclusive $n-1$ Faktoren bereits als für den Wert des Ergebnisses gleichgültig erkannt, in welcher Weise man dieselben vermittelst Klammern so in Gruppen scheidet, dass ein Ausdruck entsteht, welcher durch lauter Multiplikationen von immer nur zwei Faktoren hergestellt ist. Der laut Annahme stets übereinstimmende Wert des Ergebnisses für alle die verschiedenen hierbei noch denkbaren Bildungsweisen des Ausdrucks kann demnach schon *ohne jede Klammer* geschrieben und schlechtweg das „*Produkt*" der in dem Ausdruck vorkommenden Symbole oder „Faktoren" (für die bestimmte Reihenfolge in der sie auf der Zeile stehen) genannt werden.

Es ist dann zu zeigen, dass auf Grund der Theoreme $13_\times$) und $16_\times$) dasselbe auch für n Symbole zutreffen muss, wenn diese in bestimmter Reihenfolge angeschrieben und dann irgendwie mittelst „binärer" Multiplikation (d. i. eben Multiplikation von immer nur zwei Faktoren) zu einem Produkte vereinigt werden.

Nun kann der ganze Ausdruck in zwei Faktoren mittelst Klammern nur auf folgende Arten gespalten werden, für welche wir die zugehörigen Ergebnisse mit den linkerhand eingeführten Namen benennen wollen:

$$x_1 = a_1(a_2 a_3 \cdots a_n)$$

$$x_2 = (a_1 a_2)(a_3 \cdots a_n)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_r = (a_1 a_2 \cdots a_r)(a_{r+1} \cdots a_n)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_{n-1} = (a_1 a_2 \cdots a_{n-1})a_n,$$

wo r irgend eine der Indexzahlen von 1 bis $n-1$ bedeuten mag, mithin $1 < r \leq n-1$ zu denken ist.

Die Bildungsweise für die beiden Hauptfaktoren oder Teilprodukte:

$$a_1 a_2 \cdots a_r = s_r, \qquad a_{r+1} a_{r+2} \cdots a_n = t_r$$

von irgend einem dieser Ausdrücke

$$x_r = s_r t_r$$

braucht nach dem Gesagten nicht weiter angedeutet oder mittelst fernerer innerhalb derselben anzubringender Klammern angegeben, vorgeschrieben zu werden, da diese Teilprodukte jedenfalls weniger als n (höchstens $n - 1$) Faktoren enthalten, während sogar $s_1 = a_1$ und $t_{n-1} = a_n$ — wie man sich auszudrücken pflegt — „nur aus *einem* Faktor bestehen", eigentlich nämlich gar nicht Produkte sind.

Zu zeigen ist, dass die obigen $n - 1$ Ausdrücke $x_1, x_2 \cdots x_{n-1}$ einander gleich sein müssen, und dies wird nach Th. 4) Zusatz geleistet sein, wenn wir darthun, dass allgemein (nämlich für jedes der gedachten r bis zum letzten hin)

$$x_r = x_{r+1}$$

sein muss, womit ja $x_1 = x_2$, $x_2 = x_3$, $\cdots x_{n-2} = x_{n-1}$ dann erkannt sein wird.

Nun ist zufolge der den Symbolen t_r und t_{r+1} beigelegten Bedeutung (kraft der bei solchen Teilprodukten beliebig anbringbaren Klammern):

$$t_r = a_{r+1} t_{r+1}$$

und kann nach Th. $16_\times$) dies in $x_r = s_r t_r$ eingesetzt werden. Darnach wird sich dann x_r aus drei Faktoren zusammensetzen und kraft Th. $13_\times$) sich ergeben:

$$x_r = s_r (a_{r+1} t_{r+1}) = (s_r a_{r+1}) t_{r+1}.$$

Es ist aber zufolge der den Symbolen s_r und s_{r+1} zukommenden Bedeutung auch (wegen der Unterdrückbarkeit von Klammern in denselben):

$$s_r a_{r+1} = s_{r+1}$$

und kann dies wiederum nach $16_\times$) in das letzte Ergebniss eingesetzt werden. Dadurch entsteht:

$$x_r = s_{r+1} t_{r+1} = x_{r+1}$$

was zu beweisen war.

Nun war bei drei Faktoren die Klammerstellung ohne Einfluss auf den Wert des Ergebnisses; nach dem eben Bewiesenen muss sie es auch für $3 + 1$ oder 4 Faktoren sein; ist sie es sonach für viere, so muss sie es auch sein für $4 + 1$ oder 5 Faktoren und so weiter. Es kann in dieser Weise ohne Ende fort geschlossen werden, und jedenfalls auch so lange, bis man irgend eine vorgedachte Faktorenzahl erreicht hat (*Schluss von $n - 1$ auf n* resp. n *auf* $n + 1$, oder Bernoulli'scher *„Schluss der vollständigen Induktion"*).

Gilt also nur das *spezielle* Assoziationsgesetz (für drei Faktoren), so gilt auch stets das *allgemeine* Assoziationsgesetz (für beliebig viele Faktoren). Letzteres lautet:

Satz 13)[b] („*Allgemeines Assoziationsgesetz*"). *Auch bei irgend einer Anzahl,* bei einer beliebigen Reihe *von multiplikativ zu verknüpfenden Symbolen ist die Klammerstellung für den Wert des Ergebnisses gleichgültig.*

(Definition.) Den für jede denkbare Art der Klammerstellung übereinstimmend erhältlichen Wert des Ergebnisses der Verknüpfung nennt man kurz das *Produkt der sämtlichen,* in ihrer gegebenen Reihenfolge verwendeten, *Symbole* und pflegt man dasselbe dadurch auszudrücken, dass man diese Symbole als „Faktoren" in jener bestimmten Reihenfolge gemeinhin ohne alle Klammern nebeneinander stellt.

Die hier angestellten Betrachtungen sind nicht nur für die identische, wie für die numerische Multiplikation in gleicher Weise gültig, sondern überhaupt für jede Art von *eindeutiger Verknüpfung,* die man sich unter dem vorstehend gebrauchten Namen „Multiplikation" irgend vorstellen mag. Nichts hindert, den Punkt, wo er als Malzeichen in Gedanken zu setzen gewesen, wirklich hinzuschreiben und ihn dabei durch ein beliebiges Knüpfungszeichen $\circ$ (wie Herr Stolz es thut) zu ersetzen. Die an unsre Voraussetzungen angeknüpften Schlussfolgerungen müssen dabei unverändert stichhaltig bleiben, weil sie eben (von der Materie unabhängig) nach allgemeinen Schemata mit Denknotwendigkeit erfolgten. Sofern also für die gedachte Knüpfung nur die Voraussetzungen $13_\times$) und $16_\times$) zutreffen, muss auch das allgemeine Assoziationsgesetz für diese Knüpfung gelten und kann der Begriff der ursprünglich nur „binären" Knüpfung erweitert werden zu demjenigen einer beliebig viele Terme auf einmal (in bestimmter Reihenfolge) verbindenden Knüpfung der nämlichen Art.

Namentlich sind unsre Ergebnisse auch auf die identische gleichwie auf die numerische *Addition* ohne weiteres übertragbar und gilt dies nicht minder von dem hiernächst noch weiter Folgenden. Als Knüpfungszeichen wird hier eben nur das Pluszeichen zu figuriren haben.

Die so ausgedehnten, dergestalt erweitert anzulegenden Betrachtungen gehören sich eigentlich eingefügt in den Rahmen einer *allgemeinen Theorie der Verknüpfung,* welche — passend wol „absolute Algebra" zu nennen — dieselben für die verschiedenen Unterdisziplinen ein für allemal erledigte. Doch sei bemerkt, dass, abgesehen von vereinzelten Bruchstücken, solche Theorie noch nicht geschrieben ist!

Nebenbei gesagt gibt es auch Operationen, die nur assoziativ, nicht kommutativ sind — wie z. B. die Multiplikation der Substitutionen und die der Quaternionen und unzählige andere — sowie auch umgekehrt Operationen sich angeben lassen, welche kommutativ aber nicht assoziativ sind.

Hier indess haben wir nur noch mit der Verbindung beider Eigenschaften der Assoziativität und Kommutativität uns zu beschäftigen.

Auf Grund der bisherigen aus $13_\times$) abgeleiteten Theoreme (und Definition) lässt sich nun der Satz beweisen:

Satz 13)[c]. *In einem Produkt von n Faktoren dürfen irgend zwei benachbarte miteinander vertauscht werden.*

Wird: $a_1 a_2 \cdots a_n = x$ genannt, so gilt auch:

$$x = a_2 a_1 a_3 \cdots a_n =$$
$$= a_1 a_2 \cdots a_{r-1} a_{r+1} a_r a_{r+2} \cdots a_{n-1} a_n =$$
$$= a_1 a_2 \cdots a_{n-2} a_n a_{n-1}.$$

Beweis. Da man nach 13)[b] Klammern auch beliebig anbringen darf, so können wir schreiben:

$$x = (a_1 a_2 \cdots a_{r-1})(a_r a_{r+1})(a_{r+2} \cdots a_n) =$$
$$= s_{r-1}(a_r a_{r+1}) t_{r+1}.$$

Nach Th. $12_\times$) ist aber $a_r a_{r+1} = a_{r+1} a_r$, und darnach wird — gemäss $16_\times$):

$$x = s_{r-1}(a_{r+1} a_r) t_{r+1} = s_{r-1} a_{r+1} a_r t_{r+1}.$$

Setzt man hierin wieder die Werte von s_{r-1} nebst t_{r+1} ein, und lässt die dabei um diesen ihren zusammengesetzten Namen ursprünglich anzubringenden Klammern kraft 13)[b] weg, so ist der mittlere (allgemeine) Teil unsrer Behauptung bewiesen.

Ebenso beweist man die beiden andern Teile, indem für die extremen oder Rand-Fälle ($r = 1$ und $r = n - 1$) sein muss:

$$x = (a_1 a_2) t_3 = (a_2 a_1) t_2 = a_2 a_1 t_3$$

und

$$x = s_{n-2}(a_{n-1} a_n) = s_{n-2}(a_n a_{n-1}) = s_{n-2} a_n a_{n-1}.$$

q. e. d.

Satz 13)[d]. *Ist* aber *Vertauschung benachbarter Faktoren erlaubt, so kann man aus irgend einer gegebenen auch jede gewünschte Anordnung der Faktoren herleiten.*

Man suche unter den Faktoren der gegebenen Anordnung denjenigen heraus, welcher (in der gewünschten Anordnung) an die erste Stelle treten soll. Steht er nicht bereits an dieser, so lasse man ihn durch nötigenfalls fortgesetzte Vertauschung mit dem ihm jeweils unmittelbar vorangehenden Faktor, nach und nach bis an die erste Stelle vorrücken. Sobald er dieselbe inne hat, lasse man ihn an dieser fortan unverändert stehen. Man suche hierauf denjenigen Faktor in der nunmehr als gegeben vorliegenden Anordnung auf, welcher in der verlangten die zweite Stelle einnehmen soll. Hat er diese Stelle nicht schon selber inne, so ist er jedenfalls hinter derselben zu finden, weil vor ihr nach dem Bisherigen bereits ein andrer Faktor steht. Man lasse ihn dann ebenso — in fortgesetztem Platzwechsel mit dem augenblicklich unmittelbar vor ihm stehenden resp. vor ihn getretenen — bis an die zweite Stelle vorrücken, und wenn er sie erreicht, in der-

selben verharren, und fahre so fort, bis jeder Faktor die ihm zugewiesene Stelle eingenommen hat. Dies muss endlich eintreten weil mit jedem neu vorgenommenen Faktor, die Zahl der noch nicht an ihre Stellen gebrachten immer um 1 abnimmt, und weil die neu, die an den folgenden Stellen, hinzutretenden Erfolge die früher errungenen nicht wieder umstossen.

Soll beispielsweise aus der Anordnung $a_5 a_2 a_4 a_1 a_3$ die Reihenfolge $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$ hergestellt werden, so wird der Reihe nach zu bilden sein:

$$a_5 a_2 a_1 a_4 a_3$$
$$a_5 a_1 a_2 a_4 a_3$$
$$a_1 a_5 a_2 a_4 a_3$$
$$a_1 a_2 a_5 a_4 a_3$$
$$a_1 a_2 a_5 a_3 a_4$$
$$a_1 a_2 a_3 a_5 a_4$$
$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$$

Hienach ist erkannt, dass eine (multiplikative) Verknüpfung, welche assoziativ ist gemäss Th. $13_\times$) und ausserdem dem speziellen Kommutationsgesetze $12_\times$) unterworfen, welche somit „bei zwei Faktoren kommutativ“ ist, dies auch bei beliebig viel Faktoren sein muss, d. h. es gilt für sie der

Satz $13)^c$ *(„Allgemeines Kommutationsgesetz“). Auch bei einem Produkte von beliebig vielen Faktoren ist deren Reihenfolge gleichgültig.*

Legt man von vornherein die Voraussetzungen $12_\times$) und $13_\times$) in ihrer Verbindung mit einander zugrunde, so kann man zu den allgemeinen Ergebnissen $13)^b$ und $13)^c$ auch noch auf andre Weisen gelangen, über welche am vollständigsten wol mein Lehrbuch[1] Aufschluss gibt.

Hiermit nun sind wir zu dem Abschlusse gelangt, den wir erstrebten.

Ich gestatte mir nur noch eine Bemerkung darüber, was von der ganzen mathematisch so musterhaft strengen Betrachtung in Bezug auf ihre *Stellung zur Logik* zu halten.

Es wurde hier als ein — sollte man meinen — der Logik (im *engsten* Sinne) eigentlich fremdes Element, die *Zahl*, mit in den Kreis der Untersuchungen hereingezogen — allerdings nur die natürliche Zahl oder Anzahl, jedoch — in Gestalt von r und n — auch die allgemeine oder Buchstabenzahl. Dies geschah teils nebensächlich, teils wesentlich. Ersteres insofern wir die Zahlen als Suffixe des Buchstabens a verwendeten: es boten eben $a_1, a_2, .. a_n$ sich als zweck-

mässige Namen für die (irgendwievielen) n Faktoren dar, und diese Namen sind so gut wie irgendwelche andere. *Letzteres* bei dem „Schlusse von n auf $n+1$“ durch welchen allein der Satz 13)" bewiesen werden konnte und auf den wir auch schon sub Th. 4) Zusatz hinweisen mussten.

Der rein logischen Rechtfertigung dieses Schlusses (der vollständigen Induktion) in Verbindung mit solchen logischen Grundbetrachtungen, wie sie die Gewinnung des Begriffes der „Anzahl“ (der Einheiten einer Menge) vorzubereiten helfen müssen, ist der § 51 im 2. Bande gewidmet. Aus dem gegenseitigen Hinübergreifen der beiden Disziplinen ist aber allerdings zu entnehmen, dass sich die Elemente der *Logik* und diejenigen der *Arithmetik* in Hinkunft wol nicht mehr ganz in der bisher beliebten scharfen Sonderung von einander vorzutragen empfehlen werden (resp. streng und gründlich abhandeln lassen), welche ich für die ersteren hier noch nach Möglichkeit aufrecht zu erhalten mich bestrebt habe. Die elementarsten (nämlich die „Anzahl-“) Begriffe der *„quantitativen“* Logik müssen wenigstens bei den *Buchstaben* oder Symbolen schon zur Anwendung kommen dürfen, mittelst deren wir die Überlegungen der *„qualitativen“* Logik formuliren — mögen wir diese jener auch vorangehen lassen. Wie denn auch umgekehrt die Überlegungen der Arithmetik nie entbunden zu werden vermögen von der Befolgung jener denknotwendigen Gesetze, welche die (des Zählens sich noch enthaltende) allgemeine Logik aufstellt. Inzwischen mögen auch noch folgende Erwägungen zur Beachtung empfohlen sein.

Es wurde im Bisherigen von Reihenfolge oder (An-)*Ordnung* und von *Gruppirung* oder Zusammenfassung der Faktoren gehandelt, so gelegentlich früher auch von *Eindeutigkeit* der Operationen. Und sei bemerkt, dass wir hier nicht etwa aus den *„Begriffen“* von „Eindeutigkeit“ resp. „Ordnung“ und „Gruppirung“ (welcher letztere eigentlich hier erstmalig zu gewinnen gewesen) werden abstrakte Folgerungen zu ziehen haben. Wir haben uns dafür vielleicht noch lange nicht weit genug in diese Begriffe und deren Definition vertieft, über die sich jedenfalls noch manches sagen liesse. Vielmehr begnügten wir uns, diese Begriffe hier genetisch einzuführen, sie auf synthetischem Wege an dem Substrat der Faktoren entstehen zu lassen, gewissermassen den Anfänger zu denselben zu erziehen. Es war die Einflechtung dieser Begriffe in den Text für uns nur das Schema, die Formel, unter der wir das in den Sätzen bereits in seinem Wesen Erkannte nachträglich allgemein und mnemonisch zusammenfassten.

Um zu erkennen, dass mit alledem keine fremden Elemente in unsre Disziplin wesentlich hereingezogen sind, braucht man sich nur etwa dasjenige, was wir hier allgemein als durchführbar erkannt haben,

in jedem Falle seiner künftigen Anwendung wirklich durchgeführt zu denken. Z. B. solche Umformungen, die wir kraft des allgemeinen Kommutations- und Assoziationsgesetzes an Produkten uns künftighin gestatten werden, mag man jeweils auf die strikte Anwendung der Schemata $12_\times$), $13_\times$) und $16_\times$) zurückführen, wie ich es zum Schlusse noch für ein Beispiel darlegen will. Es möge zum Exempel für die Gleichung:

$$(ab)\cdot(cd) = (ad)\cdot(bc)$$

der Beweis verlangt werden, weil man vielleicht den einen dieser beiden Ausdrücke in den andern zu verwandeln wünscht. Hier kann man unter Anwendung der darüber und darunter angesetzten Schemata wie folgt zum Ziele der gewünschten Umwandlung beweiskräftig gelangen:

$$\underset{A\,B}{(ab)}(cd) \underset{12_\times}{=} \underset{B\,A}{(ba)}\overset{A\,B}{(cd)} \overset{12_\times}{=} \underset{A}{(ba)}\underset{(BC)}{\overset{B\,A}{(dc)}} \underset{13_\times}{=} \{\underset{(A\,B)}{\overset{(AB)}{(ba)}}\overset{C}{d}\}\underset{C}{c} \overset{13_\times}{=} \{\overset{A}{b}\overset{(BC)}{(\underset{A}{a}\underset{B}{d})}\}c \underset{12_\times}{=} \{\overset{(A\;\;B)}{(a\underset{B}{d})}\underset{A}{b}\}\overset{C}{c} \overset{13_\times}{=} \overset{A}{(ad)}\overset{(BC)}{(bc)}.$$

In dieser Weise durchweg zu verfahren, hiesse nun freilich, auf den Nutzen unserer allgemeinen Sätze zu verzichten, durch deren Anwendung wir ja ohne weiteres den einen Ausdruck in den andern (mittelst blosser Abänderung der Faktorenfolge) hätten umschreiben können. Allein der Hinblick darauf, dass man Obiges doch überall thun *könnte*, offenbart uns, dass die ganze Theorie doch nur auf den Prinzipien der §§ 4 und 12 wesentlich beruht.

Anhang 4.

Logischer Kalkul mit „Gruppen“ — hiernächst von Funktionalgleichungen, mit Algorithmen und Kalkuln.

(Zu § 12.)

Der gegenwärtige Anhang dient einem doppelten Zwecke: einem ausserhalb des Interessenkreises dieses Buches liegenden, und einem in denselben fallenden.

Der erste Zweck ist: die Grundzüge einer eigenen *Zeichensprache* zu entwickeln und systematisch zu erläutern, von der ich in anderweitigen Mitteilungen bereits beiläufigen Gebrauch gemacht habe und — behufs Aufstellung einer *allgemeinen Theorie der Verknüpfung* — einen noch viel umfassenderen Gebrauch zu machen haben werde — einer Zeichensprache, die es mir namentlich durch ihre Einfachheit erst ermöglichen wird, die zahlreichen Ergebnisse meiner Untersuchungen über *Funktionalgleichungen* übersichtlich mitzuteilen und in knappster Form zu begründen.

Dieselbe lehnt sich übrigens an die allgemeine Zeichensprache des identischen Kalkuls auf das innigste an.

Ihr Gebrauch wird auch in Anhang 5, wo sie nicht entbehrt werden kann, illustrirt.

Dem zweiten Zweck soll gegenwärtiger Anhang 4 nicht für sich allein dienstbar sein, sondern in Verbindung mit dem nächstfolgenden, gewissermassen sekundirt von Anhang 5. Er besteht in der Lieferung des schuldig gebliebenen *Beweises* für eine in § 12 unsrer Disziplin aufgestellte, für die Theorie der Erkenntniss wol nicht belanglose Behauptung: dass nämlich ein gewisses Gesetz des folgerichtigen Denkens, die „zweite Subsumtion des Distributionsgesetzes“, *nicht* syllogistisch bewiesen werden kann.

Behufs Erreichung dieses Zieles werde ich aus meinen Untersuchungen über Funktionalgleichungen eine kleine aber interessante Episode (ganz elementarer Natur) herauszugreifen und in Anhang 5 vorzuführen haben.

Dieselbe dient zugleich als eine Exemplifikation, sie liefert ein spezielles Substrat für die allgemeinen Betrachtungen des Anhang 4,

und zwar ein solches, *über dessen Realität kein Zweifel obwalten kann*, indem ich zu allen in Betracht zu ziehenden Funktionalgleichungen auch Lösungen angebe, welche ohne Vorkenntnisse von jedermann leicht als solche erkannt und verifizirt werden können — so schwierig sie mitunter auch zu entdecken waren. Durch die Existenz von Lösungen wird dargethan, dass jene Funktionalgleichungen wirklich bestehen können und für gewisse Funktionen (für eben diese Lösungen) in der That als allgemeine Formeln gelten.

Von mathematischen Bildungselementen dürfte hierbei kaum mehr als der Begriff der eindeutigen Funktion (wenigstens von zwei Argumentzahlen) vorausgesetzt erscheinen.

Bei den Auseinandersetzungen werde ich wiederholt zwei meiner Abhandlungen zu citiren haben — die erstere lediglich, um für Diejenigen, die sie kennen, den Zusammenhang mit dem Gegenwärtigen herzustellen. Von der zweiten werde ich das zum Verständniss des Ganzen und der beabsichtigten Nutzanwendungen *Unentbehrliche* nachstehend ebenfalls kurzmöglichst zusammenstellen, sodass der Leser, welcher verstehen will, nicht gezwungen sein wird, Einsicht von derselben zu nehmen. Immerhin dürfte aber solche Einsichtnahme hier als wünschenswert zu bezeichnen sein, wenigstens soweit die hier angezogenen einleitenden Paragraphen dieser zweiten Abhandlung in Betracht kommen. Ich werde diese Abhandlungen in Anhang 4 und 5 immer mit (l. c.)[7] und (l. c.)[8] citiren, — siehe unter „Schröder" das Literaturverzeichniss.

Gegenstand der Untersuchung sei eine *Mannigfaltigkeit* U von *Sätzen*, deren jeder für sich betrachtet gelten oder auch nicht gelten kann, im ersten Fall aber auch die Geltung von noch andern Sätzen derselben Mannigfaltigkeit nach sich zieht auf Grund von „Prinzipien" $\mathfrak{P}$, welche selbst der gedachten Mannigfaltigkeit nicht durchaus anzugehören brauchen. Die sämtlichen Sätze der Mannigfaltigkeit seien ferner mit einander und mit den Prinzipien *verträglich*.

Derartige Sätze wären z. B. diese:

„Das Dreieck ABC ist rechtwinklig",

„Die Funktion $f(x, y)$ ist symmetrisch" —

denen wir im Aussagenkalkul als „Gelegenheitsurteilen" wieder begegnen werden. Es kommt ganz darauf an, von welchem Dreieck, von welcher Funktion, die Rede ist — je nachdem werden die angeführten Sätze gelten oder nicht gelten. Die Geltung des ersten Satzes zieht die Geltung einer ganzen Reihe anderer auf das Dreieck ABC bezüglicher Sätze oder Aussagen nach sich, nämlich aller derjenigen, welche Eigenschaften konstatiren, die auf Grund der „Prinzipien" (Axiome) der Euklidischen Geometrie aus der Rechtwinkligkeit folgen. Ebenso zieht die Geltung des zweiten Satzes beispielsweise die Folgerung nach sich, dass die beiden Umkehrungen der Funktion $f(x, y)$ mit einander identisch sind — auf Grund der Voraussetzung, die man hier als zu den „Prinzipien" gehörig ansehen mag, dass die Funktion eine eindeutige Umkehrung überhaupt zulasse.

Nachdem hiermit der allgemeine Charakter des Substrates unsrer Untersuchung hinlänglich gekennzeichnet sein dürfte, empfiehlt es sich, ein spezielles Substrat dieser Art nunmehr hervorzuheben, eine ganz bestimmte Mannigfaltigkeit von Sätzen namhaft zu machen und jeweils *zur Illustration* zu benutzen:

Die „Sätze“ der Mannigfaltigkeit seien — analog dem zweiten der vorstehenden Beispiele „$f(x, y) = f(y, x)$“ — durch arithmetische *Formeln* darstellbare, nämlich *Funktionalgleichungen.*

Als eine „Formel“ hingestellt zu werden verdient eine Funktionalgleichung insofern, als sie *für eine Funktion, die ihr genügt,* den Charakter der *Allgemein*gültigkeit besitzt, nämlich gelten wird *für jedes* erdenkliche *Wertsystem der Argumente,* welches man irgend aus dem Gebiete der Zahlen herausgreifen mag. Keineswegs aber braucht die Funktionalgleichung auch erfüllt zu sein *für jede Funktion,* vielmehr haftet ihr auch ein synthetischer Charakter an insofern als sie dienlich sein kann, gewisse Funktionen (oder Klassen von solchen) als solche, die ihr genügen sollen, zu bestimmen. So bestimmt ja in der That die Funktionalgleichung $f(x, y) = f(y, x)$, wenn sie analytisch („allgemein“, für alle Wertepaare x, y) gelten soll, die Funktion f als eine symmetrische; für eine solche aber ist sie dann als eine Formel erfüllt.

Der Name „Formel“, den wir hier den Funktionalgleichungen beilegen, rechtfertigt sich ausserdem durch die nachfolgend für sie einzuführende symbolische Schreibweise, in welcher sie einen ähnlichen Anblick darbieten werden, wie die bekannten Formeln der allgemeinen Arithmetik — wie z. B. Kommutations- und Assoziationsgesetz — gelegentlich auch geradezu mit solchen zusammenfallen.

Und zwar mögen unsre Funktionalgleichungen sich nur beziehen auf eine Funktion *zweier* Argumente *nebst ihren beiden Umkehrungen,* die ich nach den (l. c.)[8], § 1 dargelegten Grundsätzen symbolisch als *Produkt*, *Verhältniss* und *Bruch* schreibe und alle drei als *vollkommen eindeutig* voraussetze.

Die dreifache Voraussetzung dieser Eindeutigkeit nebst den, den Gegensatz der drei Grundoperationen (oder die Definition von zweien derselben durch die dritte) zum Ausdruck bringenden sechs „Fundamentalbeziehungen“ [die ich sogleich angeben werde — vergl. auch (l. c.)[8], § 2] konstituiren alsdann die „Prinzipien“ $\mathfrak{P}$, nach denen Folgerungen zu ziehen sein werden.

Für $f(a, b)$ werde also kürzer blos ab geschrieben, und dies ein „symbolisches Produkt“ genannt. Zu jedem beliebigen Wertepaar a und b soll es stets einen und nur einen Wert von $f(a, b)$ oder ab im Gebiete der Zahlen geben. Die Aufsuchung dieses Wertes für gegebene a, b ist eine Operation, die wir demnach als die „erste Grundoperation“ (oder „symbolische Multiplikation“) bezeichnen werden. Für ein gewisses Wertepaar a, b sei c der Wert von ab, sonach $ab = c$.

Für die im Anhang 5 gegebenen Beispiele wird sich allemal der Wert c in einer die Funktion ab definirenden Tabelle (Funktionstafel — in Gestalt eines symbolischen Einmaleinses) aufschlagen lassen.

Nun kann man aber auch, wenn b und c gegeben sind, nach dem Werte (oder den Werten) von a fragen, die so beschaffen sind, dass ab gerade gleich dem gegebenen c ist, und ebenso, wenn a und c gegeben sind, nach dem oder denjenigen Werten von b, für welche $ab = c$ wäre.

Die Operationen, durch welche wir Antwort auf diese beiden Fragen erlangen, nennen wir die „umgekehrten" oder *„inversen"* Operationen von der als symbolische Multiplikation bezeichneten „direkten" Operation. Wir bezeichnen sie als „symbolische Divisionen" und zwar bezüglich mittelst Doppelpunktes als „symbolische Messung" und mittelst Bruchstrichs als „symbolische Teilung"; sie bilden die beiden andern von den „drei Grundoperationen". Auch sie werden jeweils äusserst leicht an der die Funktion ab erklärenden Funktionstafel auszuführen sein.

Wir nehmen nun ferner an, dass die Antwort auf die gestellten Fragen *stets* (für jedes Wertepaar von a und c, sowie von b und c) und immer nur auf *eine* Weise gegeben werden könne, oder wie man sagt, dass die beiden symbol. Divisionen (gleichwie die Multiplikation) „unbedingt ausführbar" und „nie mehrdeutig" seien. M. a. W. wir erklären, nur mit solchen Funktionen ab uns beschäftigen zu wollen, bei welchen solche Eindeutigkeit der Umkehrungen zutrifft. Sooft dann $ab = a'b$ sein sollte, wird auch $a = a'$ sein müssen; ebenso, wenn $ab = ab'$ ist, wird $b = b'$ folgen.

Dasjenige b, für welches bei gegebnen a, c:

$$ab = c \quad \text{ist, nennen wir} \quad b = c:a$$

und dasjenige a, für welches bei gegebnen b, c:

$$ab = c \quad \text{ist, nennen wir} \quad a = \frac{c}{b}$$

und nach der Voraussetzung wird es immer ein und nur ein solches geben, sodass das symbolische Verhältniss $a:b$ und der symbolische Bruch $\frac{c}{b}$ uns in jedem Falle (für gegebene Operationsglieder desselben) eine ganz bestimmte Zahl vorstellen werden.

Nach diesen Definitionen sind dann

$$ab = c, \qquad b = c:a \quad \text{und} \quad a = \frac{c}{b}$$

drei einander äquivalente Aussagen, und substituirt man den Ausdruck, welchen uns irgend eine dieser Gleichungen für den auf ihrer einen Seite isolirten Buchstaben als einen neuen diesem eben zukommenden Namen zur Verfügung stellt, in die beiden andern Gleichungen, so ergeben sich die sechs Beziehungen:

$$b = (ab):a, \quad a = \frac{ab}{b}, \quad a(c:a) = c, \quad a = \frac{c}{c:a}, \quad \frac{c}{b}b = c, \quad b = c:\frac{c}{b}$$

welche für die beiden, je in sie eingehenden Buchstaben den Charakter von allgemein gültigen Formeln haben müssen, da zweie von den drei Buch-

staben von vornherein beliebig angenommen werden konnten (wodurch sich erst der dritte bestimmte).

Es wird deshalb gestattet sein, in obigen Beziehungsgleichungen die Buchstaben auch durch irgend welche andere zu ersetzen, und kann man sich für einen solchen Buchstabenwechsel entscheiden, dass in jeder von den Gleichungen nur mehr a und b — und zwar der letztere b auf einer Seite isolirt — vorkommen. Darnach werden sich die sechs „Fundamentalbeziehungen“ zu dem übersichtlichen Schema zusammenziehen lassen:

$$\begin{array}{ccccc} & a\,(b:a) & & \frac{b}{a}\,a & \\ \frac{a}{a:b} & & b & & a:\frac{a}{b} \\ & \frac{ba}{a} & & (ab):a & \end{array}$$

in welchem die im regelmässigen Sechseck angeordneten Ausdrücke dem im Mittelpunkt stehenden b gleichgesetzt zu denken sind, natürlich aber auch unter sich einander gleich gesetzt werden dürfen.

Endlich seien aber die zu betrachtenden Funktionalgleichungen auch von einer bestimmten Form. Sie seien diejenigen der „Sorte“

$$a, b, c = a, b, c$$

von (l. c.)[8], § 4, d. h. solche Gleichungen, in welchen beiderseits die Ergebnisse der Verknüpfung der nämlichen drei Buchstabenzahlen a, b und c durch irgend welche zwei successive von den drei symbolischen Grundoperationen stehen — wo diesen Buchstaben nun von einander unabhängig beliebige Werte zukommen sollen.*)

Unsre „Mannigfaltigkeit“ umfasst darnach 990 (nicht durch Buchstabenvertauschung auf einander zurückführbare und nicht identische) Gleichungen, die man leicht vollständig hinschreiben kann, und deren Gesamtheit ich also U hier zu nennen haben werde. [In Anhang 5 werden nur wenige Gruppen von diesen Gleichungen wirklich in's Auge zu fassen sein.]

Derselben gehören die „Prinzipien“ $\mathfrak{P}$ hier überhaupt nicht an.

Die in diesen Funktionalgleichungen auftretenden Argumente oder Operationsglieder a, b, c mussten dabei stets als *allgemeine* Zahlen eines bestimmten, sei es diskreten, sei es kontinuirlichen, begrenzten oder auch unendlichen Zahlengebietes aufgefasst werden. [Wirklich in Betracht kommen werden für uns aber nur Zahlengebiete, die aus einigen wenigen Ziffern bestehen.]

Indem (l. c.)[8], § 9 eine Funktion von mir konstruirt ist, welche

*) D. h. unter c soll jetzt nicht mehr der durch a und b bestimmt gewesene Wert des vorigen Kontextes, sondern ein ganz beliebiger Wert verstanden werden.

für das ganze Gebiet der komplexen Zahlen die 990 besagten Gleichungen gleichzeitig erfüllt — aber schon dadurch auch, dass eingangs des Anhang 5 eine Funktion angegeben ist, welche dies wenigstens für ein Zahlengebiet aus zwei oder vier Ziffern thut — ist die Existenz von Lösungen für alle diese Funktionalgleichungen sowie die Verträglichkeit der letztern miteinander dargethan.

Die 990 „Formeln" unsrer Mannigfaltigkeit U würden in der üblichen Gestalt von „Funktionalgleichungen" erscheinen, wenn man für jedes symbolische Produkt ab wieder $f(a, b)$, für die symbol. Quotienten $a:b$ und $\frac{b}{a}$ aber etwa $\varphi(a, b)$ und $\psi(a, b)$ bezüglich schriebe. Beispielsweise müsste so die Formel:

$$\frac{a}{b:c} = b\,\frac{c}{a} \quad \text{eigentlich lauten:} \quad \psi\{\varphi(b, c), a\} = f\{b, \psi(a, c)\}.$$

Subsumtion.

Um hinfort nicht allzu abstrakt zu reden, halte ich mich schon bei der Darstellung der allgemeinsten Begriffserklärungen und Theoreme an das hervorgehobene spezielle Substrat U.

Unter A, B, C verstehen wir lauter *„Algorithmen"*, d. h. irgendwelche *Gruppen* von Funktionalgleichungen, herausgegriffen aus der „Mannigfaltigkeit", d. i. dem Gebiete der 990 Formeln U.

Ich unterscheide dabei, wie anderwärts, zwischen Formel*gruppen* und Formel*systemen*, indem ich unter einer „Formelgruppe" verstehe ein solches System von Formeln des Gebietes, welches keine ihm nicht bereits angehörige Formel des Gebietes kraft der „Prinzipien" nach sich zieht — also ein System, welches ergänzt worden ist durch den Zuzug aller seiner Konsequenzen, so weit diese wieder dem Gebiete U angehören.

Von andern Formelsystemen, als den in dieser Weise zu Algorithmen kompletirten Gruppen sei hier überhaupt nicht die Rede. Nur sei in Bezug auf die *ohne* Rücksicht auf logischen Zusammenhang gebildeten „Formelsysteme" bemerkt, dass sich auf sie ohne weiteres jener Kalkul anwenden lässt, der für Gebiete einer Mannigfaltigkeit überhaupt in der Algebra der Logik aufgestellt worden ist, und den wir in dieser Anwendung den *„identischen* Kalkul mit Formelsystemen" zu nennen haben werden im Gegensatz zu dem sogleich zu begründenden *„logischen* Kalkul mit Algorithmen".

Wenn A aus B (kraft der „Prinzipien") folgt, aber nicht umgekehrt, so werden wir *hier* schreiben:

$$\alpha) \qquad A \subset B.$$

Es ist dann in der That das Formelsystem des Algorithmus A kleiner, *nur* ein Teil (m. a. W. „*echter* Teil“) des Formelsystems des Algorithmus B.

Allerdings ist auch die umgekehrte Schreibweise berechtigt und wird im „Aussagenkalkul“ vorgezogen — vergl. Bd. 2 § 28 — im Hinblick darauf, dass die *Zeit*, während welcher (resp. die Klasse der Gelegenheiten bei welchen) die von einer andern B einseitig bedingte Aussage A als wahr anzuerkennen ist, nur ein Teil sein wird der Zeit (resp. etc.) während welcher die Aussage A gilt:

Wenn (wann, solange, sooft) B gilt, gilt auch A aber nicht umgekehrt; A kann auch gelten ohne B.

Ebenso ist nun auch hier die Gesamtheit der Fälle *in* welchen (die Klasse der Funktionen, *für* welche) der Algorithmus B erfüllt wird, nur ein Teil von derjenigen, für welche es der Algorithmus A ist. Unter diesem Gesichtspunkt müsste man eigentlich die Schreibung:

$$\beta) \qquad B \subset A$$

zur Darstellung des vorausgesetzten Sachverhalts wählen.

Wenn demnach das Zeichen $\subset$ der Unterordnung genau dem Zeichen $<$ entsprechend verwendet werden soll, so hat man doch für einunddieselbe Beziehung *a priori unter zwei Schreibweisen die Wahl,* nämlich einer *extensiven* α), bei der mehr auf die *räumliche* (Flächen-)Ausbreitung der — etwa geschrieben gedachten — Sätze oder Formelsysteme gesehen, und einer *intensiven* β), bei welcher mehr auf ihre *zeitliche* Ausdehnung, ihre Gültigkeitsdauer, das Augenmerk gerichtet wird, oder — sofern man von einer solchen nicht sprechen mag — auf die Klasse der Gelegenheiten, wo sie Anwendung finden, hier also die Fälle des Erfülltseins oder die Klasse der *Lösungen* der Funktionalgleichungen.

Durch die Bevorzugung der extensiven vor der intensiven Schreibung unterscheidet sich der hier vorzutragende Kalkul schon in der Anlage von dem später vorzutragenden Aussagenkalkul.

Ich würde mich unter Umständen wol auch der zweiten Schreibweise anschliessen, muss aber hier der ersteren den Vorzug geben.

Folgt nicht nur A aus B, sondern auch B aus A, so sind die Formelsysteme der Algorithmen A und B identisch dieselben, und schreiben wir:

$$A = B \quad \text{oder} \quad B = A.$$

Denn da wir nur mit Algorithmen zu thun haben wollen, so ist das Formelsystem A ergänzt zu denken durch Zuziehung aller seiner Konsequenzen, zu denen nach der Voraussetzung auch B gehört, und umgekehrt, d. h. beide sind eines.

Um lediglich auszudrücken, dass A aus B folgt, während unbekannt ist oder unentschieden, offen gelassen werden soll, ob auch umgekehrt B aus A folge, werden wir schreiben:

$$A \mathrel{=\!\!\!\!\in} B \quad \text{desgl.} \quad B \mathrel{\ni\!\!\!\!=} A,$$

was man wie bisher als „eingeordnet“ oder „sub“ lesen kann, daneben auch: A folgt aus B, ist Teil von B, in B enthalten; B bedingt, umfasst A, schliesst A in sich, involvirt es („implies“ A).

Darnach müssen die beiden Axiome zugegeben werden:

I. $$A \mathrel{=\!\!\!\!\in} A.$$

II. Wenn $A \mathrel{=\!\!\!\!\in} B$ und $B \mathrel{=\!\!\!\!\in} C$, so ist auch $A \mathrel{=\!\!\!\!\in} C$.

Auch kann man, das Zeichen $\mathrel{=\!\!\!\!\in}$ „der *eventuellen* Unterordnung“ als das ursprüngliche ansehend, durch dieses das Gleichheitszeichen definiren mittelst der

Definition (1). Wenn $A \mathrel{=\!\!\!\!\in} B$ und zugleich $B \mathrel{=\!\!\!\!\in} A$, so werde $A = B$ genannt.

Versinnlichen wir uns die Algorithmen durch Flächengebiete der Ebene, so stellt — wenn nur *grosse* anstatt kleine Buchstaben in sie eingetragen gedacht werden — die Figur 1, S. 155, die Beziehung $A \subset B$, und die Figur 2 ibid. die $A = B$ dar, und falls $A \mathrel{=\!\!\!\!\in} B$, so findet entweder das eine oder das andre statt.

Diese Versinnlichung ist aber hier noch mehr als blosse Analogie, auch mehr als eine Abbildung: Man kann sich geradezu die Flächengebiete in soviele Parzellen zerlegt denken, als wie viele Gleichungen des Gebietes U der zugehörige (gleichnamige) Algorithmus umfasst, und in diese Parzellen — wie in die Felder auf einem Bogen karrirten Papiers — diese Gleichungen selbst hineingeschrieben, so wird damit *das wirkliche Verhältniss* der Formelgruppen A, B zu einander direkt zur Anschauung gebracht.

Multiplikation.

Wir definiren jetzt das *„logische“ Produkt* $A \cdot B$ oder AB und die *„logische“ Summe* $A + B$ zweier Algorithmen, und bringen alsdann die Grundeigenschaften der so eingeführten Gebilde zum Ausdruck.

Hiebei wollen wir für alle Definitionen und Sätze durchweg dieselben Chiffren verwenden, welche den entsprechenden im identischen Kalkul zukamen, wenn diese auch hier in etwas anderem Zusammenhange vorgebracht werden, weil ja gerade die anfängliche Übereinstimmung der beiden Kalkuln von erster Wichtigkeit ist.

AB stelle den, den beiden Algorithmen A und B *gemeinsamen* Formelkomplex vor, es sei also das „logische“ Produkt der Formel*gruppen* einerlei mit dem „identischen“ Produkt der betreffenden Formel*systeme*, cf. Fig. $9_\times$, S. 214.

Dasselbe werde 0 genannt, also $AB = 0$ geschrieben, wenn A

und B *innerhalb* U *keine* Gleichung gemein haben, und diese 0 werde als ein uneigentlicher, der „*Null-Algorithmus*“ mit zu den Algorithmen gezählt.

Im andern Falle ist AB auch nicht blos ein Formelsystem, sondern selbst wieder ein Algorithmus, indem es alle Gleichungen, die es innerhalb U nach den „Prinzipien“ zur Folge haben kann, bereits in sich schliessen muss.

Ersichtlichermassen gilt nämlich (auch wenn AB nur Formelsystem wäre):

Th. $6_\times$) $$AB \mathrel{=\!\!\!\in} A \quad \text{und} \quad AB \mathrel{=\!\!\!\in} B.$$

Hat nun AB innerhalb U eine Konsequenz C, so folgt diese, weil mit A auch AB gegeben ist, nach Prinzip II auch aus A, d. h. es ist $C \mathrel{=\!\!\!\in} A$; und ganz ähnlich folgt $C \mathrel{=\!\!\!\in} B$, d. h. es muss C den Algorithmen A und B schon gemeinsam sein, sich *in* AB befinden.

Die Multiplikation von Algorithmen ist ein ungemein fruchtbares Mittel, um neue Algorithmen AB zu *limitiren*, sie als vollständige oder „Gruppen“ nachzuweisen, die Grenzen ihrer Konsequenzen (innerhalb U) zu erkennen, wenn bereits diejenigen der Faktoren A, B bekannt, diese selbst limitirt sind. (Beispiele weiter unten, Anhang 5 sub „Beleg 1“.)

Aus der Übereinstimmung der logischen mit der („extensiv“ aufgefassten) identischen Multiplikation geht hervor, dass jene auch die Grundeigenschaften von dieser besitzt; sie ist kommutativ und assoziativ, auch gilt z. B. Th. $14_\times$) $A \cdot A = A$ — was alles übrigens auch ganz direkt einleuchtet.

Speziell seien hier aber zum Bewusstsein gebracht die der Definition (3) der Theorie entsprechenden beiden Sätze:

$(3_\times)'$ *Sooft* $X \mathrel{=\!\!\!\in} A$ *und zugleich* $X \mathrel{=\!\!\!\in} B$, *so ist auch* $X \mathrel{=\!\!\!\in} AB$.

$(3_\times)''$ *Jedesmal, wenn* $X \mathrel{=\!\!\!\in} AB$ *ist, muss auch* $X \mathrel{=\!\!\!\in} A$ *und* $X \mathrel{=\!\!\!\in} B$ *sein.*

Der letztere $(3_\times)''$ von diesen beiden Sätzen erscheint im Hinblick auf Th. $6_\times$) und II als geradezu selbstverständlich: Wenn X aus dem dem A und B gemeinsamen Formelsystem schon folgt, so folgt es a fortiori aus A, desgl. aus B.

Nicht in gleichem Grade (der Unmittelbarkeit) leuchtet aber der erste Satz $(3_\times)'$ ein. Liesse man hier ausser Acht, dass die Formelgruppe X ganz dem Gebiet U angehören muss, so würde sich der Satz $(3_\times)'$ leicht durch Beispiele widerlegen lassen. In der That ist der Fall denkbar, dass gewisse Behauptungen resp. Formeln X nach

den ja *ausserhalb* U liegenden „Prinzipien“ zwar aus den Prämissen A folgen, desgl. aus den Prämissen B, ohne jedoch aus den, den beiden Prämissensystemen gemeinsamen Elementen oder Gleichungen zu folgen, welche letztere sogar 0 sein, ganz fehlen können. (Betreffs wirklichen Vorkommens solchen Falles siehe Anhang 5, „Beleg 2“.)

Wenn dagegen, wie vorauszusetzen, X, A, B komplete Algorithmen desselben Gebietes U sind, so muss, falls X aus A folgt, das Formelsystem der Gruppe X geradezu ein Teil desjenigen von A sein, ebenso, falls auch X aus B folgt, ein Teil von B, und dann also ein Teil des dem A und B gemeinsamen Formelkomplexes (welcher mithin sicher vorhanden ist).

Sonach gelten also in der That die beiden Teile von $(3_\times)$, einem Satze, von dem wir sahen, dass durch ihn das identische Produkt ausreichend *definirt* werden konnte. Diese Definition hätten wir anstatt der von uns gewählten unmittelbar intuitiven auch hier zu Grunde legen können.

Desgleichen gilt hier das Analogon der

Definition $(2_\times)$: $\qquad 0 \preccurlyeq A,$

und zwar hat dieses einfach den Sinn, dass mit dem Gebiet der Felder, in welche die Formeln irgend eines Algorithmus eingetragen sind, auch jederzeit unbeschriebene Felder verbunden gedacht werden mögen. „Nichts“ oder „leere Felder“ bilden die *Bedeutung des Nullalgorithmus*, wenn wahr sein soll, dass jeder Algorithmus seine eigenen Formeln und ausserdem 0 enthält.

Zöge man indess die 18 Identitäten der Formelsorte $a, b, c = a, b, c$ mit in den Bereich der alsdann 1008 Gleichungen umfassenden Mannigfaltigkeit U herein, so würden diese 18 den Inhalt des Nullalgorithmus ausmachen. Seine Bedeutung würde die Aussage sein, dass die Formeln $a(b:c) = a(b:c)$, etc., allgemein gelten, und würden diese als konstanter unvermeidlicher Bestandteil sich in jedem Algorithmus mit vorfinden. Durch sie würde aber offenbar über Geltung oder Nichtgeltung von noch andern Formeln des Gebietes kein Präjudiz gegeben.

Addition.

Als die *„logische Summe“* $A + B$ definiren wir denjenigen Formelkomplex, welcher nicht nur die Gleichungen von A und die von B sämtlich enthält, sondern auch noch alle diejenigen Gleichungen des Gebietes U dazu, welche aus diesen, wenn sie gleichzeitig als wahr

angenommen werden, auf Grund der „Prinzipien" hinzugefolgert werden können.*)

Diese logische Summe $A + B$ greift über die „identische Summe" $A (+) B$ der Formelsysteme im Allgemeinen hinaus — wie sich nachher leicht durch Beispiele belegen lassen wird (Anhang 5, „Beleg 3").

Die letztere bedeutet bekanntlich das Formelsystem, zu welchem die Systeme A und B sich gegenseitig ergänzen; dieselbe wird im Allgemeinen kein „Algorithmus" sein, weil aus A und B zusammen als Prämissen sich oft noch weitere Gleichungen schliessen lassen werden, die weder dem A noch dem B für sich angehören.

Es ist demnach die logische Summe zweier Algorithmen etwa in folgender Weise durch eine Figur zu versinnlichen.

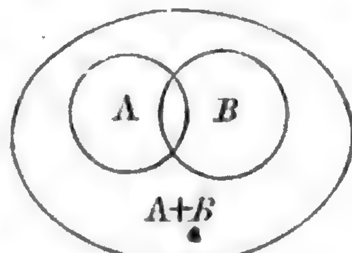


Fig. 31.

Sehr oft ereignet es sich, dass die logische Summe $A + B$ *sämtliche* Gleichungen des Gebietes U umfasst. Diese konstituiren ja zusammen selbst einen Algorithmus: U_0, welcher innerhalb des zur Illustration gewählten Substrates mit dem Formelsystem U zusammenfällt.

Dieser Algorithmus U_0 möge — für den Augenblick — mit dem Zahlzeichen 1 bezeichnet werden, eine Konvention, die sich dadurch rechtfertigt, dass alsdann die Gleichung $A \cdot 1 = A$ allgemein gelten wird. Dann gilt für jedes Individuum A in der Mannigfaltigkeit der zur Betrachtung vorliegenden Algorithmen auch das Analogon der

Definition (2_+): $\quad A \Subset 1.$

Und endlich gelten die beiden Sätze, welche in der Theorie die Definition (3_+) der identischen Summe zusammensetzten:

$(3_+)'$. *Wenn* $A \Subset X$ *und* $B \Subset X$, *so ist auch* $A + B \Subset X$.

$(3_+)''$ *Wenn* $A + B \Subset X$, *so ist auch* $A \Subset X$ *und* $B \Subset X$.

Da nach unsrer Definition der logischen Summe offenbar:

Th. 6_+) $\quad A \Subset A + B \quad$ und $\quad B \Subset A + B$

sein muss, so erscheint der letztere Satz $(3_+)''$ nach II als geradezu selbstverständlich: Wenn A nebst B und allem, was beide noch zur Folge haben, aus X folgt, so folgt natürlich auch A aus X und B aus X.

Weniger unmittelbar leuchtet der erstere Satz $(3_+)'$ ein.

Wäre X kein Algorithmus, sondern blos ein Formelsystem, aller-

*) Bei der „intensiven" Deutung würde unsre obige „Summe" als „Produkt" zu bezeichnen sein (unser „Produkt" aber nicht als „Summe").

dings ganz aus U, jedoch irgendwie, herausgegriffen, so wäre ein Fall denkbar, wie ihn die folgende Figur versinnlicht: wo zwar A und B ganz in X liegen, dagegen $A + B$ doch nicht in X enthalten ist (vgl. Anhang 5, „Beleg 4"). Es brauchte dann $(3_+)'$ nicht zu gelten.

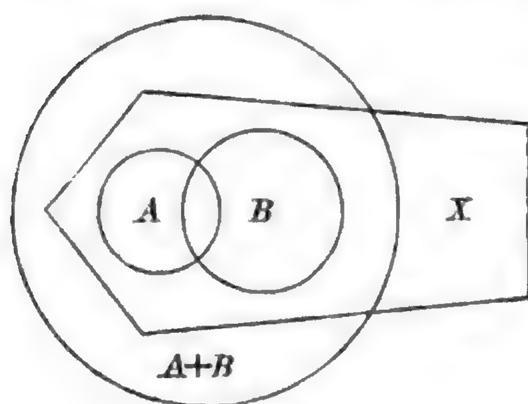


Fig. 32.

Nun aber sollte X einen *Algorithmus* (innerhalb U) bedeuten, komplettirt durch Hinzuziehung aller seiner nach den „Prinzipien" bedingten Konsequenzen. Wenn dieser A zur Folge hat, dessen ganzes Formelsystem in sich schliesst, desgl. B zur Folge hat, so hat er auch alles das zur Folge, was kraft der Prinzipien aus A und B zusammen noch weiter gefolgert werden kann, d. h. er hat auch $A + B$ zur Folge und schliesst dessen ganzes Formelsystem von Hause aus in sich.

Hiermit ist sorgfältigst erkannt, dass die Axiome I und II, sowie die Definitionen (1), (2), (3) des „identischen Kalkuls" auch in dem „logischen Kalkul" mit Algorithmen*) unmodifizirt Geltung haben.

Diese aber bildeten ausschliesslich die formale Grundlage für den ersten Teil jenes Kalkuls, soweit er in den Paragraphen 4, 5 bis 10, 11 der Theorie dargestellt ist. Folglich können wir auch alle aus dieser Grundlage streng deduktiv dort abgeleiteten Sätze jetzt ohne weiteres in den logischen Kalkul herübernehmen, die kleinen Buchstaben von ebendort in grosse umschreibend — *einschliesslich der ersten Subsumtion*, Th. $25_\times$), *des Distributionsgesetzes.*

Dass die *zweite* $26_\times$) *nicht* gilt, werden wir gegen Schluss belegen (Anhang 5, „Beleg 5"); doch sei bemerkt, dass von dem nur *diesen* Zweck im Auge Habenden die vorhergehenden und nachfolgenden Belege des Anhang 5 überschlagen werden können.

Was vorstehend erörtert und festgesetzt worden an dem Substrat der resp. für die „Algorithmen" oder „Gruppen von Funktionalgleichungen", das lässt sich noch allgemeiner und für die *Gruppentheorie* überhaupt aufrecht erhalten.

Der Begriff der „Gruppe" hat neuerdings fast in der gesamten Mathematik eine rapid steigende Bedeutung und zunehmend verbreitete Anwen-

*) Hätten wir ein umfassenderes Substrat gewählt, so wäre dieser auch als ein Kalkul mit *Kalkuln* zu bezeichnen.

dung gefunden. Sind doch Herrn Dedekind's Zahlenkörper, Kronecker's Rationalitätsbereiche, etc. nichts anderes wie „Gruppen", und wie die Substitutionentheorie sich fast nur um Gruppen von Substitutionen dreht, so haben auch für die Geometrie Herrn Walter Dyck's gruppentheoretische Untersuchungen, für die höhere Analysis Herrn Sophus Lie's Transformationsgruppen etc. eine fundamentale Wichtigkeit erlangt. Nicht minder sah die Mechanik sich genötigt „Gruppen" von Bewegungen (Translationen und Rotationen) zu studiren, und ist mit deren Studium durch Camille Jordan u. a. die Bravais-Sohncke'sche Erklärung der Krystallstruktur erwachsen, u. s. w.

Unter solchen Umständen dürfte es wohl verlohnen, die Gesetze, nach welchen alle Forscher, die sich mit Gruppen beschäftigen, wenn auch vielleicht unbewusst, denken, sich einmal gründlich zum Bewusstsein zu bringen, zumal diese Gesetze in ihren elementarsten Grundzügen sich als keine andern erweisen als die der Logik überhaupt und des identischen Kalkuls, bis *exclusive* zur zweiten Subsumtion des Distributionsgesetzes.

Ist ein System von Dingen gegeben, die wir *„Elemente"* nennen wollen, und kennen wir einen *Prozess*, durch welchen aus irgendwelchen von diesen Elementen sich neue Gebilde erzeugen, herstellen, „ableiten" lassen, so vermögen wir auch die letzteren als weitere „Elemente" zu dem System der bisherigen hinzuzuschlagen, sie sozusagen dem Systeme als neue Errungenschaft „anzugliedern".

Auf diese Weise kann man fortfahren, und den gleichen Prozess auch auf die (oder irgendwelche) Elemente des so erweiterten Elementesystems anwenden, solange überhaupt der Prozess noch neue Dinge als Elemente zu liefern vermag und auf die hinzutretenden anwendbar bleibt.

Den Prozess haben wir uns hienach begrifflich bestimmt zu denken als eine gewisse *Art* von Prozessen. Sofern wir ihn eigenmächtig ausführen können, mögen wir ihn auch eine „Operation" nennen, oder, wenn sich an dieser verschiedene Stadien unterscheiden lassen, ihn hinstellen als ein „System von Operationen" (den Teiloperationen der vorerwähnten alsdann „zusammengesetzten" Operationen); die Reihenfolge solcher Teiloperationen kann eine vorgeschriebene, oder auch ganz oder teilweise in unser Belieben gestellte sein, je nach der Art, wie der Prozess begrifflich bestimmt erscheint. Operationen können (als „uni-näre"?) schon aus *einem* Elemente (zuweilen oder immer) ein neues erzeugen, oder aber als „Knüpfungen" deren zweie oder mehrere bedürfen um ein neues Element hervorzubringen („binäre", „ternäre" und „multi-näre"? Knüpfungen). Als auf Beispiele sei auf Negation und Multiplikation als solche Operationen hingewiesen.

Durch die Vorschrift, welche die Natur des Prozesses bestimmt und durch die ursprünglich gegebenen Elemente ist in allen Fällen die Mannigfaltigkeit der Objekte des Denkens bestimmt, welche durch den Prozess aus jenen Elementen ableitbar sind.

Vorbehaltlich jedoch dessen, dass die als gegeben hingestellten Elemente nicht bereits unverträglich miteinander seien und dass als Elemente nicht etwa „*Klassen* von Elementen“ figuriren. Die erstere Forderung erscheint sofort als eine selbstverständliche. Bei Nichtbeachtung der letztern aber müsste späterhin Verwirrung, Konfusion entstehen, es müssten Widersprüche sich ergeben insofern keine Sicherheit, keine Garantie dagegen vorläge, dass wir nicht — bei den nötig fallenden Unterscheidungen zwischen den Elementen — ein bestimmtes Element als solches (bei einer bestimmten Betrachtung) auszuschliessen und zugleich dasselbe als ein Individuum einer solchen Gattung oder Klasse, die selbst Element ist, zuzulassen hätten. Nur höchstens *kollektive* Zusammenfassungen von Elementen zu einem *Systeme* solcher, nicht aber *generelle* (zu einer Gattung von solchen) wird man wiederum als „Elemente“ gelten lassen dürfen. M. a. W. das *System der* dem Prozess der Gruppenbildung zu unterwerfenden *Elemente* wird von vornherein — in dem in den §§ 7, 9 und 16 erläuterten Sinne — eine *konsistente* sowol als *reine*, wird eine *gewöhnliche* Mannigfaltigkeit sein müssen, und auch der Prozess der Gruppenbildung ist der Einschränkung zu unterwerfen, muss so beschaffen sein, dass jenes System bei seiner Erweiterung zur „Gruppe“ eine solche Mn. stets bleiben wird.

Die also aus den gegebenen Elementen ableitbaren Elemente bilden mit diesen selbst zusammen ein System, welches die durch die erstern bestimmte, denselben zugehörige „*Gruppe*“ zu nennen ist, und dürfen jene als ausreichende „Bestimmungselemente“ dieser Gruppe hingestellt werden.

Der Begriff der Gruppe ist hienach ein engerer als der des „Elementesystems“; jede Gruppe ist ein Elementesystem, aber nicht jedes Elementesystem ist eine Gruppe.

Hienach ist klar, dass (zunächst) die Begriffserklärungen der Einordnung oder Subsumtion, der Gleichheit und der Unterordnung auf die Gruppen ebenso anwendbar sein werden, wie auf die Elementesysteme überhaupt, und bedarf der Ansatz: $A \neq\!\!\!\in B$, oder die damit äquivalente Redensart: die Gruppe A ist „*Untergruppe*“ der B, keiner neuen Erklärung.

Die in der Wissenschaft eingeführte Arbeitsteilung bringt es mit sich, dass auch gruppentheoretische Untersuchungen sich immer nur auf eine (begrifflich) bestimmte Mannigfaltigkeit von Objekten des Denkens zu beziehen haben, aus welcher nur die Bestimmungselemente aller in Betracht zu ziehenden Gruppen allein hervorzuheben sind. Diese Mannigfaltigkeit (die wir, wie gesagt als eine „gewöhnliche“ vorauszusetzen haben) bestimmt ihrerseits eine Gruppe, oder besser gesagt, sie *ist* — wenn mit Rücksicht hierauf eben vollständig, umfassend genug, charakterisirt — schon selbst eine Gruppe.

Diese Gruppe, die umfassendste, welche alle denkbaren Gruppen

des vorliegenden Untersuchungsfeldes in sich schliessen wird — und, als blosses Elementarsystem aufgefasst, etwa „die zugrundeliegende Mannigfaltigkeit“ zu nennen wäre — mag *„die vollständige Gruppe“* (schlechtweg) genannt werden. Sie entspricht der „identischen Eins“, 1, des Aussagen- und Gebietekalkuls und würde nicht unpassend auch als „die Gruppe 1“ hingestellt werden.

Dieselbe ist jedoch — bei den Substitutionen z. B. — nicht mit der „identischen Substitution“ 1 zu verwechseln, welche letztere vielmehr, wie nachher erhellt, eine „Nullgruppe“, „die Gruppe 0“ konstituiren wird.

Als „Produkt“ $A \cdot B$ oder AB zweier Gruppen A und B gilt uns das System der Elemente, welche sowol der Gruppe A als auch der B angehören — m. a. W. das „identische Produkt“ der zugehörigen Elementesysteme, die „Gemeinheit“ dieser Systeme in Herrn Dedekind's[1] Ausdrucksweise. Dasselbe muss, sofern es kein leeres (oder „Nullsystem“) ist, allemal selbst eine Gruppe sein.

Denn wäre dies nicht der Fall, so müsste durch den Prozess der Gruppenbildung aus seinen Elementen ein neues ableitbar sein, welches ihm selbst, dem Systeme AB, nicht angehört, und darum auch nicht dem System A und dem B zugleich angehören kann, vielmehr wenigstens einem dieser beiden — sagen wir dem System A — nicht angehören wird. Da laut Definition die Elemente von AB aber sämtlich auch Elemente von A (sowie von B) sind, so wäre es hienach auch gelungen, aus den Elementen des Systems A ein neues, diesem nicht angehöriges Element abzuleiten — im Widerspruch mit der Voraussetzung, dass A eine Gruppe gewesen.

„Nullgruppe“ oder „Gruppe 0“ nennen wir das Produkt aller erdenklichen Gruppen, welche in der vollständigen Gruppe (als Untergruppen) enthalten sind (diese selbst also einbegriffen).

Wo etwa auch ein mit 0 bezeichnetes Element auftritt, ist diese „Gruppe 0“ von dem „Elemente 0“ natürlich zu unterscheiden.

Die Nullgruppe wird eine eigentliche Gruppe sein auf jedem solchen Untersuchungsfelde, wo gewisse Elemente in jeder Gruppe enthalten, allen Gruppen gemeinsam sein müssen.

So z. B. wird im Gebiet der Substitutionsgruppen die Nullgruppe bestehen aus der einen identischen Substitution 1; in der Gruppentheorie des identischen Kalkuls — vergl. Anhang 6 — wird die Nullgruppe aus den beiden Elementen 0 und 1 bestehen, und auch auf dem Gebiet der Gruppen von Funktionalgleichungen oder Algorithmen können der Nullgruppe als Inhalt oder ihre Bedeutung eventuell untergelegt werden: die „sechs Fundamentalbeziehungen“ nebst all den Formeln, welche etwa noch auf Grund derselben allgemein, als analytische Gleichungen, gelten.

Andernfalles wird die Nullgruppe als eine uneigentliche, nämlich inhaltlose oder *leere*, zu gelten haben.

Summe $A + B$ zweier Gruppen A und B nennen wir diejenige

Gruppe, welche aus den Elementen von A und B zusammengenommen ableitbar ist, welcher m. a. W. die Elemente der „identischen Summe" der Elementesysteme A und B als Bestimmungselemente dienen. Die erstere greift über die letztere im Allgemeinen hinaus, wie gelegentlich gegebene Beispiele darthun.

Es würde nun blos eine Wiederholung desjenigen sein, was wir im identischen oder Gebietekalkul bereits eingehendst durchgesprochen haben (was uns ferner behufs Angliederung der Dedekind'schen Kettentheorie obliegen wird, in neuer Fassung aufzufrischen) und was wir endlich für das Substrat der Algorithmen im Eingang gegenwärtigen Anhanges erinnernd in Anspruch zu nehmen hatten, wollten wir von neuem darlegen, wie aus den hiemit gegebenen Grundlagen wieder alle Gesetze des identischen Kalkuls bis zu dem in § 12 charakterisirten Divergenz- oder Abzweigungspunkte hin als auch für den „*Gruppenkalkul*" gültige fliessen. Wir dürfen diese Gesetze für ihn hinfort ohne weiteres in Anspruch nehmen.

Ist der gruppenbildende Prozess eine „uninäre" Knüpfung, d. h. eigentlich gar keine Knüpfung, sondern vielmehr eine Operation, mittelst welcher je aus *einem* Elemente immer schon ein eventuell neues als Funktion oder Bild desselben abgeleitet werden kann — wie z. B. im identischen Kalkul die Operation des Negirens, in der Arithmetik die der Quadratwurzelausziehung, oder die Herstellung des Briggs'schen Logarithmus, etc. — so steht nichts im Wege die gedachte „Ableitung" als eine „Abbildung" anzusehen, und deckt sich der Begriff der „Gruppe" mit dem Dedekind'schen Begriff der „Kette". Des Letzteren Ketten sind die durch einen Abbildungsprozess erzeugten Gruppen. Der Gruppentheorie ordnet die Theorie der Ketten als ein besondrer Zweig sich unter.

Es könnte sogar scheinen als ob die letztere sich ebensoweit erstreckte, wie die erstere. Denn ist die eindeutige Abbildung eine solche nur einseitig, nicht auch umgekehrt, ist sie eine „unähnliche", so mögen irgendviele Elemente das nämliche Bild haben. Dieses Bild als das Ergebniss einer *Verknüpfung* jener Elemente hinzustellen, geht aber dann nicht an, weil der Unterschied besteht, dass es diesen nicht erst in ihrer *kollektiven* Verbindung, als dem Systeme derselben, sondern dass es ihnen bereits einzeln genommen, *distributiv* oder generell, eindeutig entspricht. Immerhin ergeben sich aus diesem Verhältnisse vielleicht Anknüpfungspunkte für beide Theorieen.

Die Gruppentheorie ist hienach anzusehen als eine wirkliche Erweiterung der Theorie der Ketten. —

Anhang 5.

Substrat zum vorigen Anhang und Material zu dessen Belegen.

Als solches muss ich jetzt ein paar spezielle Algorithmen des Gebietes U vorstellen.

Voraus bemerke ich, dass ich den logischen Zusammenhang zwischen den 990 Formeln dieses Gebietes längst vollständig erforscht habe und denselben auch auf die einfachste Weise zu begründen vermag. Die Darlegung dieses Zusammenhanges ist aber nicht der Endzweck der gegenwärtigen Mitteilung. Vielmehr beabsichtige ich ja, denselben nur nebenher zu benutzen, um durch gegenteilige Beispiele darzuthun, dass gewisse Sätze im logischen Kalkul keine Geltung zu haben brauchen.

Ich kann mich daher in Bezug auf das — unter vielen denkbaren, ebenfalls schon ziemlich von mir durchforschten Formelgebieten [vergl. (l. c.)[8], § 3 und 4] willkürlich ausgewählte — Gebiet U darauf beschränken, die meinem Hauptzweck dienlichen Thatsachen einfach anzuführen, sofern diese Thatsachen (mit mehr oder weniger Mühe) von jedermann kontrolirbar sind, und brauche ich dabei weder auf die Methoden einzugehen, durch welche sie (im Zusammenhang) *am bequemsten* zu beweisen wären, noch darauf, wie sie gefunden wurden.

Die Ableitung der einen Formeln aus den andern, von denen sie mitbedingt werden, ist zudem *leicht* und ganz elementar zu bewerkstelligen und mag deshalb dem Leser überlassen bleiben. Nur in Bezug auf das schwierige (und hier besonders wichtige) Problem der Abgrenzung jeder Formelgruppe will ich beweiskräftige Angaben machen.

Wesentlich sind es fünf Algorithmen, mit denen wir Bekanntschaft zu machen haben.

1°) *Der Algorithmus* U_0 selbst, bestehend aus den sämtlichen 990 Gleichungen des Formelgebietes U [vergl. (l. c.)[8], § 7 sq.].

Für uns ist nur der Nachweis von Belang, dass es Funktionen gibt, die alle diese Funktionalgleichungen gleichzeitig erfüllen, dass diese also, als „Formeln“ aufgefasst, miteinander verträglich sein müssen.

Der Nachweis ist zu leisten durch Angabe einer Funktion, die sie wirklich erfüllt. Eine solche wird nun für ein Zahlengebiet von vier Elementen, den Ziffern 1, 2, 3, 4, definirt (in Gestalt eines symbolischen Einmaleinses) vermittelst der Tafel:

$$
\begin{aligned}
1 &= 1\cdot 1 = 2\cdot 2 = 3\cdot 3 = 4\cdot 4 \\
2 &= 1\cdot 2 = 2\cdot 1 = 3\cdot 4 = 4\cdot 3 \\
3 &= 1\cdot 3 = 3\cdot 1 = 2\cdot 4 = 4\cdot 2 \\
4 &= 1\cdot 4 = 4\cdot 1 = 2\cdot 3 = 3\cdot 2,
\end{aligned}
$$

desgleichen auch schon für ein Zahlengebiet von nur zwei Elementen, 1 und 2, durch das erste Viertel dieser Tafel — (es sind das die Funktionstafeln $1_{0,0})^2$ und $1_{0,0})^4$ von (l. c.)^7.

Überzeugen wir uns wenigstens für ein Beispiel davon, dass solches in der That der Fall ist. Unter anderm müsste etwa gelten:

$$\frac{b}{a:c} = \frac{c}{a\cdot b}$$

— eine Formel, aus der nebenbei gesagt, alle übrigen von U fliessen, die somit für sich schon eine ausreichende Prämisse des Algorithmus U_0 bildet (dergleichen er 156 innerhalb U besitzt). In der Formel dürfen wir nun für a, b, c irgendwelche von den Ziffern 1, 2, 3, 4 setzen, und müssen, falls sie gültig, allemal eine richtige Gleichung erhalten. So muss sich z. B. herausstellen, dass

$$\frac{3}{2:4} = \frac{4}{2\cdot 3}, \quad \text{sowie auch} \quad \frac{1}{2:2} = \frac{2}{2\cdot 1},$$

etc. ist. Um dies nachzusehen entnehmen wir aus der zweiten Zeile der Tafel vom letzten „Produkte" (als zusammengehalten mit seinem angegebenen Werte 2) dass $2:4 = 3$ ist, aus der vierten Zeile aber, dass $2\cdot 3 = 4$. Durch Einsetzung dieser Werte kommt also die erstere Gleichung hinaus auf: $\frac{3}{3} = \frac{4}{4}$, und dass dieses richtig ist, indem beide Seiten den Wert 1 haben, ist aus der dritten und vierten Zeile der Tafel vom ersten „Produkt" zu entnehmen.

Ebenso kommt die andre Gleichung auf $\frac{1}{1} = \frac{2}{2}$ oder $1 = 1$ hinaus. —

Der Leser vergesse bei diesen Betrachtungen nicht, dass hier keineswegs von „eigentlichen" Produkten und Quotienten die Rede ist, für welche ja das Einmaleins schon anderweitig feststeht. Vielmehr ist vorstehend $1\cdot 1$ und $2\cdot 3$ etc. nur aufzufassen als eine abgekürzte Schreibung ad hoc für $f(1, 1)$ und $f(2, 3)$ etc., und konnten solche Funktionswerte bei der Definition, tabellarischen Erklärung von $f(x, y)$ doch nach Belieben festgesetzt werden!

So leicht es nun auch für ein Beispiel sich erwies, das Erfülltsein einer bestimmten Formel nachzusehen, so würde es doch bei ihr schon sehr weitläufig werden, solches für alle Wertsysteme der Argumente aus dem Zahlengebiete durchzuführen, und vollends kaum durchführbar, fast eine Lebensaufgabe, bei allen 990 Formeln des Formelgebietes U denselben empirischen Weg auszuschreiten.

Der Leser, welcher meinen in jedem beliebig herausgegriffenen Beispiele sich bewährenden Behauptungen gleichwol den Glauben versagt, muss

deshalb verwiesen werden auf die generellen Schlüsse, durch welche ich (l. c.)[8] und an andern Orten das empirische Verfahren vereinfacht oder entbehrlich gemacht habe. —

2⁰) *Der Algorithmus* A_1. Die Gleichung, welche das Assoziationsgesetz ausdrückt:

$$b(ac) = (ba)c$$

ist eine von den 990 Gleichungen U. Aus ihr fliessen noch 15 andere Gleichungen desselben Gebietes, und nur diese. Ich muss dieselben vollständig anführen. Sie lauten:

$$(b:a):c = b:(ac), \qquad \frac{a:c}{b} = \frac{a}{b}:c, \qquad \genfrac{}{}{0pt}{}{c}{ba} = \frac{\genfrac{(}{)}{0pt}{}{c}{a}}{b},$$

Dreieck: $c:(b:a)$, $(ac):b$, $(a:b)c$

Vollständiges Viereck: $c(b:a)$, $\frac{c}{a}\cdot b$, $\genfrac{}{}{0pt}{}{c}{a:b}$, $b:\genfrac{}{}{0pt}{}{a}{c}$

Dreieck: $\genfrac{}{}{0pt}{}{c}{\genfrac{(}{)}{0pt}{}{b}{a}}$, $\genfrac{}{}{0pt}{}{ca}{b}$, $c\genfrac{}{}{0pt}{}{a}{b}$

wo die Seiten der beiden Dreiecke und des vollständigen Vierecks als Gleichheitszeichen zwischen den an die Ecken gesetzten Ausdrücken interpretirt zu denken sind.

Die Ableitung dieser 15 Gleichungen aus der Prämisse gibt zum Überfluss mein Lehrbuch der Arithmetik und Algebra, I. Band, p. 242 sqq.

Die vorstehenden 16 Gleichungen bilden dasjenige, was auf dem Gebiete U der Algorithmus A_1 der (eindeutigen und eindeutig umkehrbaren) *assoziativen* Operationen zu nennen ist.

Dass wirklich keine andern als diese 16 Gleichungen des Gebietes aus dem ganzen Systeme folgen, kann auf die elementarste Weise nachgewiesen werden durch die folgende Tafel von Funktionswerten

$$\begin{aligned}
1 &= 1\cdot 1 = 2\cdot 2 = 3\cdot 3 = 4\cdot 4 = 5\cdot 6 = 6\cdot 5\\
2 &= 2\cdot 1 = 1\cdot 2 = 3\cdot 6 = 6\cdot 4 = 4\cdot 5 = 5\cdot 3\\
3 &= 3\cdot 1 = 1\cdot 3 = 2\cdot 5 = 5\cdot 4 = 4\cdot 6 = 6\cdot 2\\
4 &= 4\cdot 1 = 1\cdot 4 = 2\cdot 6 = 6\cdot 3 = 3\cdot 5 = 5\cdot 2\\
5 &= 5\cdot 1 = 1\cdot 5 = 2\cdot 3 = 3\cdot 4 = 4\cdot 2 = 6\cdot 6\\
6 &= 6\cdot 1 = 1\cdot 6 = 2\cdot 4 = 4\ 3 = 3\cdot 2 = 5\cdot 5
\end{aligned}$$

welche auf einem Zahlengebiet von 6 Zahlen, die mit den Ziffern 1 bis 6 bequemlichkeitshalber benannt sind, in Gestalt eines symbolischen Einmaleinses eine vollkommen eindeutige und ebenso umkehrbare Funktion definirt.

Man sieht leicht, dass dieses Zahlengebiet der einfachsten „Gruppe“, die es gibt, von nicht durchweg vertauschbaren „Substitutionen“ entspricht, indem man das Element 1 mit der „identischen Substitution“, die Elemente 2, 3, 4 mit den „Transpositionen“ $(\alpha\beta)$, $(\alpha\gamma)$ und $(\beta\gamma)$ identifiziren kann, wo dann die Elemente 5 und 6 den „cyklischen“ Substitutionen $(\alpha\beta\gamma)$ und $(\alpha\gamma\beta)$ entsprechen werden, und unsre symbolische Multiplikation zusammenfällt mit der eigentlichen Multiplikation der Substitutionen.

Wie die Multiplikation der Substitutionen überhaupt, so ist also auch die vorliegende jedenfalls assoziativ. Und auch der Nachweis, dass keine andern von den 990 Gleichungen U als die sub A_1 angeführten 16 von der durch die Tafel definirten Funktion durchaus erfüllt werden, unterliegt theoretisch nicht der geringsten Schwierigkeit. Dagegen würde, denselben ohne weitere Vorbereitung direkt zu liefern, allerdings einen Aufwand an Mühe erheischen, welcher der Kenntnissnahme der gesamten das Gebiet U erledigenden Theorie der Verknüpfung, nachdem dieselbe *im Zusammenhange* von mir dargelegt worden wäre, schon allein fast gleichkommen dürfte.

Nebenbei sei noch bemerkt: Lässt man die vertikalen Seiten der beiden Dreiecke, sowie die Diagonalen des Quadrats in A_1 fort, so bleiben diejenigen 12 von den 16 Gleichungen A_1, deren jede für sich als eine „ausreichende Prämisse“ von A_1 zu bezeichnen ist und also innerhalb U die Tragweite 16 hat. Dagegen bilden die fortgelassenen 4 Gleichungen einen dem A_1 untergeordneten Algorithmus K_1, dessen Prämissen eben jene beiden Vertikalseiten (mit der Tragweite 4) sind. Von den Diagonalgleichungen des Quadrats bildet jede für sich einen eigenen Algorithmus: J_2 resp. J_3, indem sie keine weiteren Konsequenzen innerhalb U nach sich zieht.

Diese Eigenschaft, innerhalb U die Tragweite 1 zu haben, kommt unter allen 990 Gleichungen U ausser den beiden genannten nur noch der Gleichung zu:

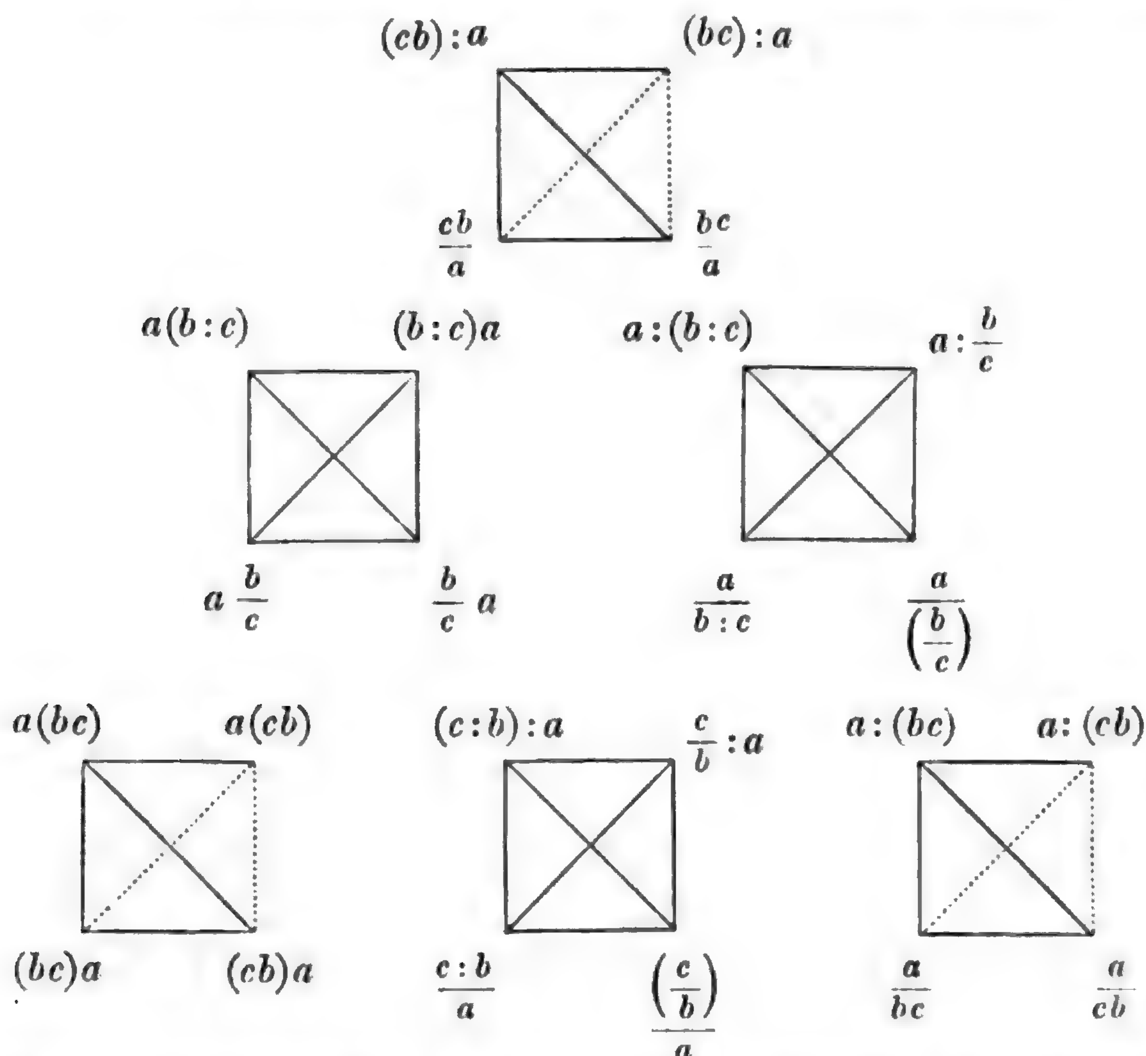
$$(cb):a = \frac{bc}{a},$$

die somit ebenfalls einen eigenen Algorithmus: J_1 vorstellt. (Vergl. unten „Beleg 1“.)

3⁰) *Der Algorithmus* C_1. Eine Prämisse desselben kann zunächst angegeben werden in Gestalt einer jeden von den beiden Gleichungen:

$$qb = ba, \qquad a:b = \frac{a}{b}.$$

Diese gehören zwar dem Gebiete U nicht an; auf letzterem aber ziehen sie folgende 30 Gleichungen als Konsequenzen nach sich, die wir den Algorithmus C_1 (der *kommutativen* Operationen) innerhalb U nennen.



wo die punktirten Linien Wiederholungen (Dubletten) anderer bereits als Seiten ausgezogenen Formeln vorstellen, aus denen sie durch einfache Buchstabenvertauschung hervorgehen und daher nicht mitzuzählen sein werden.

Es ist nun bemerkenswert — wenn auch für unsern Hauptzweck unwesentlich — dass 29 von diesen 30 Gleichungen einzeln als Prämissen des ganzen Algorithmus ausreichen, somit die Tragweite 30 haben. Nur die Diagonalgleichung des obersten Quadrats, d. i. die vorhin erwähnte Gleichung J_1, teilt diese Eigenschaft mit den übrigen nicht, sondern bleibt ein in sich abgeschlossener Unteralgorithmus von C_1 mit der Tragweite 1.

Eine dem Algorithmus C_1 ausschliesslich unterworfene Multiplikation definirt auf einem Gebiete von vier Zahlen die Tafel $11_{1,1})^4$ und, auf eine zweite davon verschiedene Art auch die Tafel $12_{1,1})^4$ meiner Abhandlung (l. c.)[7] — welche lauten:

$1 = 1\cdot 1 = 2\cdot 2 = 3\cdot 4 = 4\cdot 3$	$1 = 3\cdot 3 = 4\cdot 4 = 1\cdot 2 = 2\cdot 1$
$2 = 2\cdot 4 = 4\cdot 2 = 1\cdot 3 = 3\cdot 1$	$2 = 2\cdot 4 = 4\cdot 2 = 1\cdot 3 = 3\cdot 1$
$3 = 3\cdot 3 = 4\cdot 4 = 1\cdot 2 = 2\cdot 1$	$3 = 1\cdot 1 = 2\cdot 2 = 3\cdot 4 = 4\cdot 3$
$4 = 4\cdot 1 = 1\cdot 4 = 2\cdot 3 = 3\cdot 2$	$4 = 4\cdot 1 = 1\cdot 4 = 2\cdot 3 = 3\cdot 2.$

Für jede andre von den 990 Formeln U, welche nicht mit einer von den 30 angeführten zusammenfällt, ist der Leser wenigstens in der Lage, sich zu überzeugen, dass sie von den vorstehenden Funktionen nicht, oder nicht durchaus erfüllt wird.

4⁰) *Der Algorithmus* O_1, (l. c.)[8] § 5 besprochen und limitirt, kann — nach den Elementen der Arithmetik — definirt werden als die logische Summe:

$$O_1 = A_1 + C_1 .$$

Bei genauerem Zusehen zeigt sich leicht, dass aus der Annahme, eine Multiplikation sei assoziativ und kommutativ zugleich, folgt, dass von den 990 Gleichungen U nun 150 erfüllt sind, nämlich alle die von einander verschiedenen Formeln, welche erhalten werden können durch Gleichsetzung irgend zweier der nachstehend vom selben Rechteck umrahmten Ausdrücke:

$$O_1^1 \quad \boxed{\begin{array}{cccccc} a(bc), & b(ca), & c(ab), & (ba)c, & (ac)b, & (cb)a \\ a(cb), & b(ac), & c(ba), & (ab)c, & (ca)b, & (bc)a \end{array}}$$

$$O_1^2 \quad \boxed{\begin{array}{cccccccccc} (cb):a, & b(c:a), & b:\frac{a}{c}, & b:(a:c), & (c:a)b, & b\,\frac{c}{a}, & \frac{b}{\left(\frac{a}{c}\right)}, & \frac{b}{a:c}, & \frac{c}{a}\,b, & \frac{bc}{a} \\ (bc):a, & c(b:a), & c:\frac{a}{b}, & c:(a:b), & (b:a)c, & c\,\frac{b}{a}, & \frac{c}{\left(\frac{a}{b}\right)}, & \frac{c}{a:b}, & \frac{b}{a}\,c, & \frac{cb}{a} \end{array}}$$

$$O_1^3 \quad \boxed{\begin{array}{cccccc} a:(bc), & (a:c):b, & \frac{a}{c}:b, & \frac{a:c}{b}, & \frac{\left(\frac{a}{c}\right)}{b}, & \frac{a}{cb} \\ a:(cb), & (a:b):c, & \frac{a}{b}:c, & \frac{a:b}{c}, & \frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c}, & \frac{a}{bc} \end{array}}$$

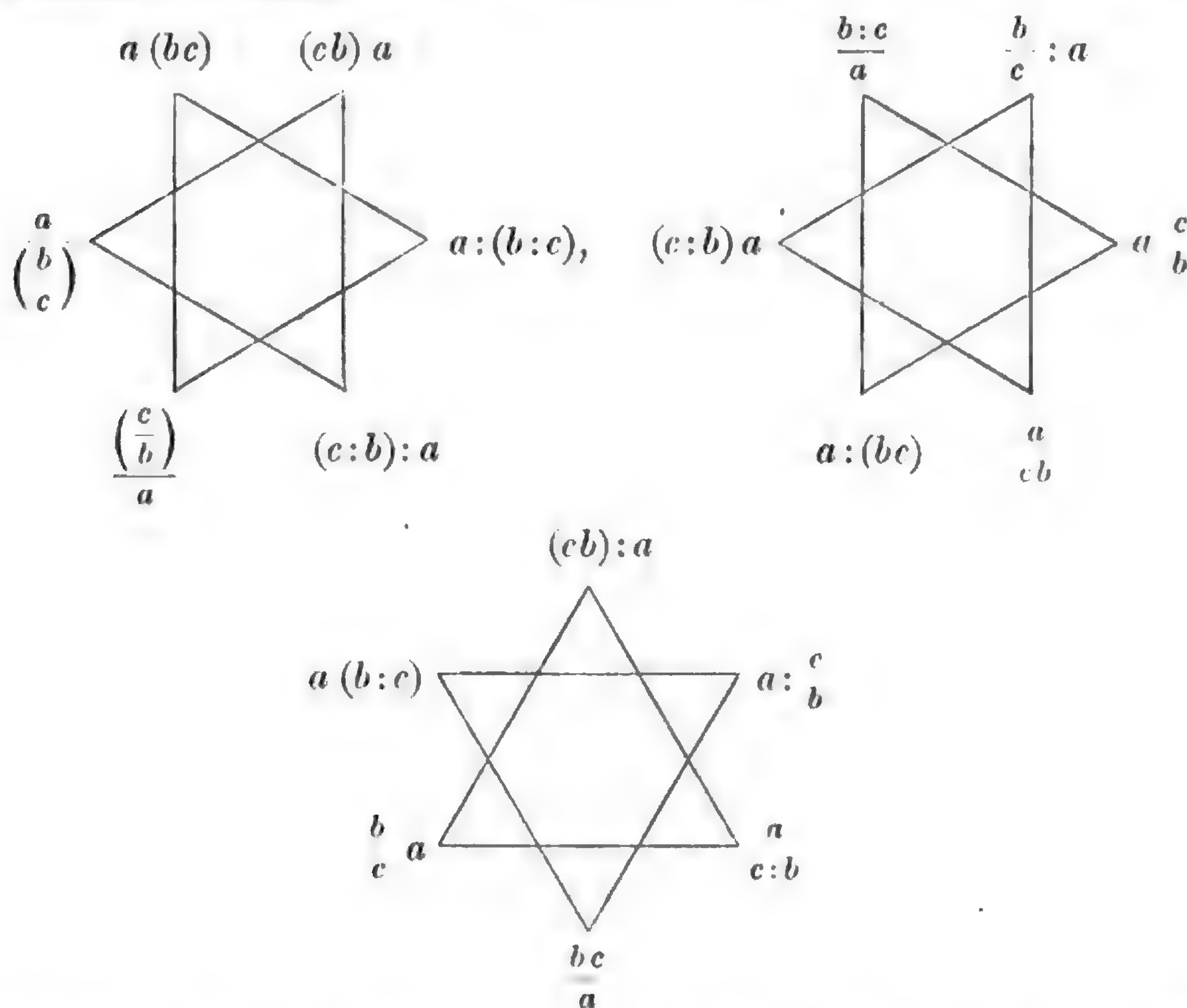
Das erste Rechteck enthält (als nicht durch blosse Buchstabenvertauschung aufeinander zurückkommende) 14, das zweite 100, das dritte 36 von den genannten 150 Gleichungen, welche zusammen den Algorithmus O_1 der *gewöhnlichen* Algebra oder sog. „allgemeinen Arithmetik“ im Formelgebiete U ausmachen.

Auf einem Zahlengebiete von 3 resp. 4 Elementen erfüllen ausschliesslich ihn die durch die beiden Tafeln, (l. c.)[7] $3_{1,1})^3$ und $9_{1,1})^4$:

$1 = 1\cdot 1 = 2\cdot 3 = 3\cdot 2$	$1 = 1\cdot 1 = 3\cdot 3 = 2\cdot 4 = 4\cdot 2$
$2 = 3\cdot 3 = 1\cdot 2 = 2\cdot 1$	$2 = 2\cdot 1 = 1\cdot 2 = 3\cdot 4 = 4\cdot 3$
$3 = 2\cdot 2 = 3\cdot 1 = 1\cdot 3$	$3 = 3\cdot 1 = 1\cdot 3 = 2\cdot 2 = 4\cdot 4$
	$4 = 4\cdot 1 = 1\cdot 4 = 2\cdot 3 = 3\cdot 2$

definirten beiden Funktionen, sodass eine jede von den (innerhalb U beiläufig 60) ausreichenden Prämissen von O_1, wie z. B. die Gleichung $(ab)\,c = b\,(ca)$, wirklich nur die Tragweite 150 (daselbst) besitzen kann.

5⁰) Der *Algorithmus* C_{00}. Wesentlich werden wir jetzt nur noch des nachstehenden Algorithmus bedürfen, welcher 18 Gleichungen des Gebietes U umfasst:



und C_{00} genannt werden möge, in Anbetracht, dass er nur als ein Unteralgorithmus des schon anderwärts von mir erwähnten Algorithmus C_0 mit den Prämissen $ab = a:b = \frac{b}{a}$ sich darstellt.

Die 12 Gleichungen an den beiden ersten sechsseitigen Sternen ziehen einander und auch die 6 am dritten Sternecke nach sich, wogegen von diesen letzteren immer nur die zwei Gleichungen an den parallelen Dreieckseiten einander gegenseitig bedingen, und ausserdem

keine Konsequenzen haben. Es sei dies nur nebenbei — zur Orientirung — bemerkt.

Wesentlich ist aber der Nachweis, dass dieser Algorithmus komplet ist, keine weiteren als die angeführten 18 Gleichungen des Gebietes U zur Folge haben kann.

Dieser Nachweis lässt sich unschwer führen mit Hülfe der nachstehenden Funktionstafel*), welche auf die einfachst mögliche Weise, und das ist für ein Zahlengebiet von 9 Elementen, eine eindeutige und eindeutig umkehrbare Funktion zweier Argumente so definirt, dass sie eben nur den angeführten Funktionalgleichungen C_{00}, und keinen andern Formeln von U, Genüge leistet:

$$1 = 2{,}58{,}197346$$
$$2 = 3{,}69{,}278154$$
$$3 = 1{,}47{,}389265$$

$$4 = 5{,}82{,}431679$$
$$5 = 6{,}93{,}512487$$
$$6 = 4{,}71{,}623598$$

$$7 = 8{,}25{,}764913$$
$$8 = 9{,}36{,}845721$$
$$9 = 7{,}14{,}956832.$$

Dieselbe ist in der bei den einfacheren Tafeln noch nicht beliebten Abkürzung geschrieben, welche verständlich wird durch die Bemerkung, dass die erste Zeile derselben ausführlicher lauten sollte:

$$1 = 2\cdot 2 = 5\cdot 8 = 8\cdot 5 = 1\cdot 9 = 9\cdot 7 = 7\cdot 3 = 3\cdot 4 = 4\cdot 6 = 6\cdot 1,$$

und so weiter.

Als besonders beachtenswert müssen wir hervorheben, dass in C_{00} *nur* die beiden *wagrechten* Seiten des dritten sechsseitigen Sterns eine Eigenschaft ausdrücken, die auch der gewöhnlichen Multiplikation zukommt, sub O_1 gilt, nämlich die Eigenschaft:

$$E_1)\qquad a\,(b:c) = a : \frac{c}{b}, \qquad \frac{b}{c}\,a = \frac{a}{c:b}$$

Dies ist also ein Formelsystem, welches man durch ebendiese Wahrnehmung, dass

$$O_1 \cdot C_{00} = E_1$$

*) Ich habe dieselbe (mit etwas permutirten Ziffern) erstmalig auf dem 57sten Meeting der British Association, in Manchester — vergl. Report für 1887, p. 621 — der Öffentlichkeit übergeben.

ist, als eine vollständige Gruppe, als einen eigenen Algorithmus von der Tragweite 2 (innerhalb U) erkennt.

Belege (überschlagbar).

Als „Beleg 1" (cf. Anhang 4 unter „Multiplikation") mag ausser der Schlussbemerkung des vorigen Absatzes noch angeführt werden, dass die oben behauptete Vollständigkeit der aus nur *einer* Gleichung bestehenden Formelgruppe J_1 hervorgeht durch die Bemerkung, dass

$$A_2 \cdot C_1 = J_1$$

ist, wo A_2 charakterisirt ist durch die Prämisse: $a:(b:c) = (a:b):c$. Ebenso ist $A_1 \cdot C_2 = J_2$, wo C_2 die Prämisse hat: $a:b = b:a$. Etc.

„Beleg 2" (cf. ibidem). Die etwa N_1 zu nennende Formel $a:a = \frac{b}{b}$ folgt leicht aus A_1, desgleichen also auch die Formel:

$$M_2) \qquad a:a = b:b.$$

Dieselbe Gleichung M_2 ist auch in einem Algorithmus D_2 enthalten, von welchem das reine Multiplikationsgesetz $(ab)\,c = (ac)\,b$ eine Prämisse bildet. Jene M_2 folgt aber nicht aus dem Algorithmus $A_1 \cdot D_2$, welcher $= J_2$ ist; denn in der That sind für J_2 in Gestalt der Tafeln $11_{2,2})^4$ und $12_{2,2})^4$ meiner schon citirten Abhandlung (l. c.)[7] Lösungen angebbar, welche sogar dem noch umfassenderen Algorithmus C_2 genügen, dagegen die Formel M_2 augenscheinlich *nicht* erfüllen. Hier folgt also $X\,(= M_2)$ aus $A\,(= A_1)$ desgl. aus $B\,(= D_2)$, und dennoch nicht aus $A \cdot B\,(= J_2)$. Grund dieses scheinbaren Widerspruchs zu dem Theorem $(3_\times)'$ des Anhang 4 ist der Umstand, dass eben $X, = M_2$, nicht dem Formelgebiet (U) angehört, innerhalb dessen das Produkt AB aufgesucht wurde.

„Beleg 3" (cf. Anhang 4 sub „Addition"). Das Hinausgreifen der logischen über die identische Summe ist schon an dem Beispiel $A_1 + C_1 = O_1$ zu sehen, wo sich die $16 + 30$ Gleichungen der letztern zu den 150 Gleichungen der erstern erweitern. Noch einfacher zeigt es sich an demselben Beispiele, wenn man auf das Gebiet der „reinen" Multiplikationsgesetze innerhalb U, d. i. auf das Formelsystem O_1^1 des Algorithmus O_1 sich beschränkt: Die *eine* Prämisse $b\,(ac) = (ba)\,c$ von A_1 mit den vier Gleichungen des Vierecks unten links in C_1 fliesst dann zu den 14 Formeln O_1^1 logisch zusammen.

„Beleg 4" (cf. ibid.). Versteht man unter X das Formelsystem, bestehend aus den 150 Gleichungen O_1 und noch irgendwelchen andern Gleichungen des Gebietes U, z. B. der Gleichung $(ca):b = \frac{ab}{c}$, jedoch *ohne* die zwei Gleichungen E_1, so ist — im Gegensatz zu $(3_+)'$ — sowol $A, = A_1$ als auch $B, = C_1$ in X enthalten, dennoch aber $A + B, = A + C_1 = O_1$ *nicht* (ganz) in X enthalten.

Der Hauptbeleg.

„Beleg 5" (cf. ibid.). Man bemerke, dass der obige Algorithmus C_{00} mit den beiden vorhergegangenen Algorithmen A_1 sowol als C_1 überhaupt keine dem Gebiet U angehörigen Formeln gemein hat, dass also hierselbst:

$$A_1 \cdot C_{00} = 0 \quad \text{und} \quad C_1 \cdot C_{00} = 0$$

ist. Darnach haben wir auch:

$$A_1 \cdot C_{00} + C_1 \cdot C_{00} = 0 + 0 = 0.$$

Im Gegensatz dazu ist aber:

$$(A_1 + C_1) \cdot C_{00} = O_1 \cdot C_{00} = E_1$$

nach dem unter O_1 und C_{00} Gesagten.

Eine Unterordnung:

$$(A_1 + C_1) \cdot C_{00} \subseteq A_1 \cdot C_{00} + C_1 \cdot C_{00}$$

ist folglich hier *unmöglich*. Denn diese, nämlich $E_1 = 0$, müsste wegen der ohnehin gültigen Subsumtion $0 \subseteq E_1$ — cf. Def. $(2_\times)$ — nach der Definition (1) der Gleichheit auf $E_1 = 0$ hinauslaufen, während doch E_1 von 0 verschieden ist.

Da nun $0 \subseteq E_1$ stetsfort in Geltung bleibt, während, wie gesagt, die Gleichheit $0 = E_1$ ausgeschlossen ist, so bleibt nur die andere Alternative: $0 \subset E_1$ übrig, d. h. wir haben hier:

$$A_1 \cdot C_{00} + C_1 \cdot C_{00} \subset (A_1 + C_1) \cdot C_{00}$$

und zwar *definitiv untergeordnet*, $\subset$, aber nicht gleich, $=$.

Dieses Ergebniss findet sich im Einklang mit der anderweitig bereits erkannten Thatsache, dass die erste Subsumtion des Distributionsgesetzes notwendig gilt.

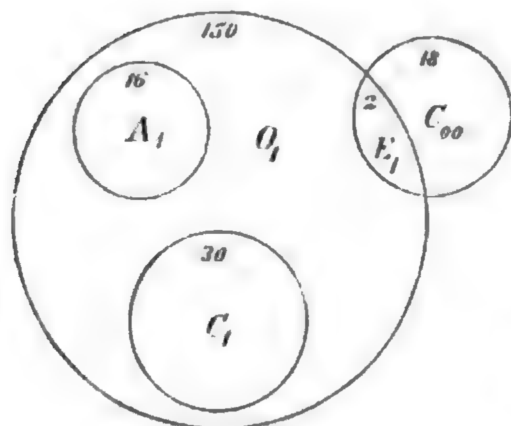


Fig. 33.

Der Sachverhalt wird — in Anbetracht, dass auch A_1 und C_1 innerhalb U keine Formel gemein haben — versinnlicht durch die Fig. 33, bei der wir auch die Zahl der Formeln jeweils in die Gebiete eingetragen haben.

Ein *zweites* Beispiel, wo wirklich Unterordnung eintritt, würde im Anschluss an das vorstehende erste erhalten, indem man den Algorithmus C_{00} ersetzte durch das ebenfalls als ein Algorithmus:

$$E_0 = E_1 + E_2 + E_3$$

nachweisbare Formelsystem seines dritten Sternecks, und ein *drittes*

Beispiel — das allereinfachste — erhielte man durch Ersetzung von C_{00} durch E_1 selber.

Das analoge Verhältniss besteht für die angeführten Beispiele auch noch auf dem umfassenderen Gebiete der 3064 (l. c.)[8] charakterisirten Formeln fort.*)

Der *logische Kalkul* unterscheidet sich demnach in der That von dem *identischen* dadurch, dass in ersterem das *Distributionsgesetz* nicht als Gleichung zu gelten braucht, sondern *nur einseitig* gelten muss *als die Subsumtion:*

$$25_\times) \qquad A \cdot B + A \cdot C \Subset A \cdot (B + C),$$

wogegen die umgekehrte Subsumtion:

$$26_\times) \qquad A \cdot (B + C) \Subset A \cdot B + A \cdot C$$

oft *nicht* erfüllt ist.

Jedenfalls kann aus den den beiden Kalkuln gemeinsamen Grundsätzen nicht die Gleichheit der beiderseitigen Ausdrücke folgen.

Noch ein *Beweis* für diese merkwürdige Thatsache, der von den Betrachtungen des gegenwärtigen Anhanges ganz unabhängig ist, wird von mir in Anhang 6 gegeben. Derselbe nimmt die Ausführungen des Anhangs 4 für ein Substrat in Anspruch welches ausschliesslich dem Gebiete des identischen Kalkuls angehört und setzt mithin keinerlei Betrachtungen auf extralogischem Gebiete voraus; auch er jedoch wird kein gänzlich müheloser sein.

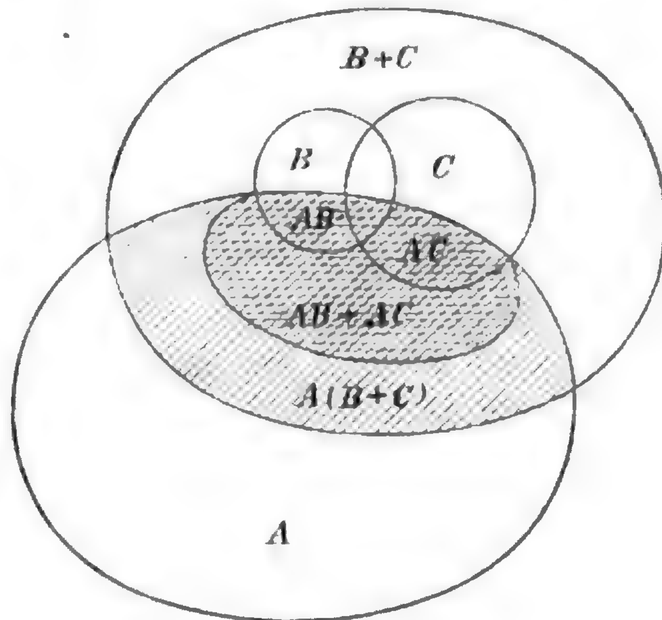


Fig. 34.

Das als nur einseitige Subsumtion geltende Distributionsgesetz $25_\times$) des logischen Kalkuls wäre in diesem durch die Fig. 34 zu versinnlichen, worin $A\,(B+C)$ den überhaupt (resp. schräge), $AB + AC$ den doppelt schraffirten Teil vorstellt.

Dass diese beiden in eins zusammenfliessen, nämlich Gleichheit

*) Ob es auch fortbestehen würde, und nicht vielleicht doch Gleichheit einträte, auf einem Gebiet, welches alle denkbaren Formeln umfasste, ist eine noch offene Frage und bleibt für die Kraft der Beweisführung gleichgültig.

eintritt, kommt übrigens auch zuweilen vor, und geben wir dazu noch folgenden vorletzten

„Beleg 6". Ein gewisser — nämlich der bereits (l. c.)[8], § 6 betrachtetete — Algorithmus Q_0 umfasst 324 Gleichungen innerhalb U (von dessen 132 ausreichenden Prämissen z. B. die Gleichung $a\,(b:c) = \frac{c}{b}\,a$ eine sein würde) und hat mit dem Algorithmus O_1 von 150 Gleichungen ein gewisses, leicht ausfindig zu machendes Formelsystem von 46 Gleichungen gemein, das einen Algorithmus bildet, welcher Q_1 heissen möge — als dessen Prämisse z. B. die Formel genommen werden könnte: $(b:c)\,a = a:\frac{c}{b}$. Wir haben also:

$$O_1 Q_0 = Q_1 \quad \text{oder} \quad (A_1 + C_1)\,Q_0 = Q_1.$$

Ferner ist (siehe unter A_1): $A_1 Q_0 = K_1$; dazu $C_1 Q_0 = C_1$, weil C_1 ganz in Q_0 enthalten; somit: $A_1 Q_0 + C_1 Q_0 = K_1 + C_1$. Dass aber $K_1 + C_1 = Q_1$ ist leicht nachzuweisen. Mithin gilt hier in der That:

$$(A_1 + C_1)\,Q_0 = A_1 Q_0 + C_1 Q_0$$

als Gleichung.

Es kommen also beide durch das Zeichen $\neq\!\!\in$ in der ersten Subsumtion des Distributionsgesetzes als Alternative offen gelassenen Fälle faktisch vor.

„Beleg 7". Wir könnten auch unser Untersuchungsfeld noch *über U hinaus* ausdehnen, indem wir es beispielsweise alle diejenigen (auf eine Funktion zweier Argumente nebst ihren Umkehrungen bezüglichen) Funktionalgleichungen umfassen liessen, welche (bei symbolisch abgekürzter Schreibung dieser drei Grundfunktionen als Produkt, Bruch und Verhältniss) nicht *mehr* wie sechs Operationsglieder a, b oder c enthalten.

Alsdann würden die Formeln des Gebietes nicht mehr allesamt miteinander verträglich sein.

Es würden Fälle vorkommen, wo von zwei Funktionalgleichungen zwar jede für sich als allgemeine Formel gelten kann und in der That Lösungen besitzt, indem Funktionen sich angeben lassen, die sie wirklich erfüllen — wo aber beide Gleichungen unmöglich zusammenbestehen können, es keine Funktion geben wird, die sie gleichzeitig erfüllte.

Ein solches Formelpaar wäre z. B. dieses:

$$a = (a \cdot b) \cdot (b \cdot a) \quad \text{und} \quad b = (a \cdot b) \cdot (b \cdot a).$$

Dass jede von diesen Formeln für sich als allgemeingültige bestehen kann, thun bezüglich die beiden Tafeln dar:

1 = 1,2345678	1 = 1,2345,6789
2 = 2,1754836	2 = 2,4718,3695
3 = 3,7186524	3 = 3,7561,9824
4 = 4,5812763	4 = 4,1629,7358
5 = 5,4621387	5 = 5,8193,4276
6 = 6,8573142	6 = 6,3974,8512
7 = 7,3268415	7 = 7,6832,5941
8 = 8,6437251,	8 = 8,9257,1463
	9 = 9,5486,2137,

welche in der unter C_{00} erläuterten Abkürzung geschrieben sind, sodass ausführlicher z. B. die erste Zeile der erstern Tafel zu lesen wäre:

$$1 = 1 \cdot 1 = 2 \cdot 3 = 3 \cdot 4 = 4 \cdot 5 = 5 \cdot 6 = 6 \cdot 7 = 7 \cdot 8 = 8 \cdot 2$$

und die der zweiten:

$$1 = 1 \cdot 1 = 2 \cdot 3 = 3 \cdot 4 = 4 \cdot 5 = 5 \cdot 2 = 6 \cdot 7 = 7 \cdot 8 = 8 \cdot 9 = 9 \cdot 6,$$

etc. — Dass aber jene beiden Formeln nicht zugleich bestehen können, geht daraus hervor, dass durch Vergleichung aus ihnen folgen würde: $a = b$, was für ein, wie wir voraussetzen, mehr als *eine* Zahl enthaltendes Zahlengebiet, mithin als *allgemeine* „Formel" unmöglich ist, indem es die Gleichheit auch für irgend zwei als verschieden vorausgesetzte Zahlen oder Elemente des Gebietes postuliren würde.

Ähnlich würden sich auch Fälle anführen lassen, wo von drei Funktionalgleichungen eine jede für sich, auch irgend zwei zusammen, nicht aber alle drei zugleich von *einer* Funktion erfüllt werden können und dergleichen mehr — worauf ich hier indess verzichte.

Endlich würde das Formelgebiet auch solche Formeln mit umfassen, welche für sich allein schon *unzulässig* sind, nämlich nicht bestehen können, ohne einen Widerspruch mit den Voraussetzungen der Eindeutigkeit der Funktion und der Mehrheit resp. Verschiedenheit der Elemente des Zahlengebietes zu involviren. Eine solche würde z. B., wie der Leser leicht nachweisen wird, die Formel $ab = a(ba)$ sein, und andre mehr.

Die Gesamtheit der Formeln des Gebietes, als „Gruppe" oder „Algorithmus" betrachtet mitumfasst also diesmal auch absurde Folgerungen und trägt den Charakter der Unmöglichkeit an sich. Zur Bezeichnung des letztern empfiehlt sich darum nicht die 1, die wir oben für U verwenden mochten, sondern vielmehr ein Symbol, welches die Nichtexistenz, Unmöglichkeit des damit zu Bezeichnenden in sich zu erkennen gibt. Als solches bietet die Mathematik aber nur das Zeichen ∞

der „absoluten Unendlich“ dar. Vergl. die Bemerkung in § 10 unsrer Theorie des identischen Kalkuls S. 274 sqq.

Allerdings würde jetzt — ein geringer Übelstand, denn an Sonderbarkeiten und exceptionelles Verhalten ist man ja bei dem Symbol ∞ ohnehin gewöhnt — wenn A einen zulässigen Algorithmus innerhalb des Formelgebietes vorstellt, $A \cdot \infty = A$ zu gelten haben, und nicht, wie in der Arithmetik $= \infty$ (sofern dort $A \neq 0$ ist). Dafür aber bietet sich nun $\infty - A$ als ein mnemonisches und bequemes Zeichen dar, um das System derjenigen Formeln des Gebietes ∞ zu bezeichnen, deren jede für sich mit den Gleichungen des Algorithmus A unverträglich sein muss. Nennten wir σ_0 die erste und σ_1 die zweite der obigen beiden Funktionalgleichungen, so gehörte die erste dem Systeme $\infty - \sigma_1$, die zweite dem $\infty - \sigma_0$ an. —

Anhang 6.

Zur Gruppentheorie des identischen Kalkuls. Geometrisch-logisch-kombinatorische Probleme von Jevons und Clifford.

(Zu § 12, 19 und 24.)

Hier kommt die Frage zur Beantwortung, *wie viel* verschiedene und *welche* Ausdrücke der identische Kalkul mit Gebieten oder Klassen aus einer gegebenen Menge solcher vermittelst seiner drei Spezies überhaupt zu bilden vermag, und ferner im Zusammenhang damit die Frage, *wie vielerlei* und welche Aussagen über zwei Gebiete a, b, über dreie a, b, c, auch wie vielerlei über viere a, b, c, d, etc., die exakte Logik imstande ist abzugeben, *solange sie sich noch auf ihrer ersten Etappe befindet*, nämlich nur erst über das Subsumtions- und Gleichheitszeichen (nicht aber über deren Verneinung) verfügt — eine Frage, die wir für die zweite Etappe erst in § 39 beantworten werden.

Die Beantwortung jener Fragen wird ermöglicht durch das Studium der „Gruppen", zu welchen die Ausdrücke oder Funktionen des identischen Gebietekalkuls zusammentreten.

Als eine Nutzanwendung der Betrachtungen ergibt sich nebenbei ein neuer Beweis für die Nichtbeweisbarkeit der zweiten Subsumtion des Distributionsgesetzes, *bei welchem es nicht erforderlich ist, ein extralogisches Substrat in's Auge zu fassen* (vergl. § 12).

Und endlich wird auf Grund derselben die Unmöglichkeit dargethan, die Gleichung $xyz + x_1y_1z_1 = 0$ in *drei* unabhängigen Parametern symmetrisch allgemein zu lösen (vergl. § 24).

Es wird zu sagen sein: ein System von Ausdrücken (des identischen Kalkuls) bilde eine *„Gruppe"* (in Hinsicht der Operationen dieses Kalkuls), wenn es nicht möglich ist, mittelst der drei identischen Spezies (als da sind Negation und additive sowie multiplikative Verknüpfung) aus denselben einen neuen Ausdruck herzuleiten, welcher nicht schon mit einem unter ihnen identisch gleich wäre, welchen m. a. W. das System nicht bereits in sich schlösse.

Nennen wir jene Ausdrücke die *„Elemente"* der Gruppe, so wird also eine Gruppe ihrem Begriffe gemäss alle diejenigen Ausdrücke, welche *aus* ihren Elementen mittelst der drei Spezies aufgebaut werden können, bereits als Elemente enthalten müssen.

So bilden — um das einfachste Beispiel voranzustellen — die beiden Ausdrücke

$$0 \quad \text{und} \quad 1$$

zusammen eine Gruppe — nebenbei bemerkt: die „*Nullgruppe*“ — weil auch ihre Negationen 1 und 0 sind, die multiplikativen sowol als die additiven Verknüpfungen dieser beiden Symbole aber immer wieder auf 0 und 1 selbst nach den Theoremen 22) und 23) hinauslaufen.

Kommt in einer Gruppe auch nur *ein* Buchstabe (oder auch Buchstabenausdruck) a vor, so enthält die Gruppe notwendig auch dessen Negation a_1, welche es ja möglich ist, mittelst Negirens aus ihm abzuleiten. Dann lässt aber auch $a \cdot a_1$, welches gleich 0 ist, und $a + a_1$, welches gleich 1 ist, sich mittelst identischer Spezies aus diesen verfügbaren Elementen ableiten, und folglich muss die Gruppe — sofern sie diesen Namen wirklich verdiente — auch die Symbole 0 und 1 enthalten haben, d. h.

Die Nullgruppe ist (selbstverständlicher) *Bestandteil einer jeden Gruppe.*

Es bilden, wie leicht nachzuweisen, die Symbole

$$0, 1, a, a_1$$

selbst wieder eine Gruppe. Wir nennen sie die „*Gruppe von a*“, weil sie aus a allein, wie gezeigt, schon ganz ableitbar ist.

Die Gruppe von a_1 fällt hienach zusammen mit der Gruppe von a, die Nullgruppe auch mit der Gruppe *von* 1.

Wenn in einer Gruppe ein gewisses System von Elementen für sich schon eine Gruppe bildet, so nennt man diese eine „*Untergruppe*“ von jener, jene auch, wenn man will, eine „*Übergruppe*“ von dieser — vergl. Anhang 4, Schluss.

So war die Nullgruppe eine Untergruppe der a-Gruppe, gleichwie überhaupt von jeder erdenklichen Gruppe zu nennen.

In der Gruppe von a kann indess (wie schon angedeutet) der Buchstabe a auch durch irgend einen Ausdruck, eine Funktion des identischen Kalkuls vertreten sein, und sind z. B.

$$0, \quad 1, \quad ab, \quad a_1 + b_1$$

$$0, \quad 1, \quad a + b, \quad a_1 b_1$$

$$0, \quad 1, \quad ab_1, \quad a_1 + b$$

etc., noch allgemeiner:

$$0, \quad 1, \quad f(a, b, c, \cdots), \quad f_1(a, b, c, \cdots)$$

nach dem Obigen ebenfalls richtige Gruppen, die wir als die „Gruppe

von ab (oder $a_1 + b_1$)" die „Gruppe von $a + b$", resp. ab_1, ·· resp. $f(a, b, c \cdots)$ bezeichnen dürfen.

Bei Angabe oder Aufzählung der Elemente einer Gruppe sollen natürlich tautologische Wiederholungen möglichst unterbleiben. Solange nur die einfachen Gebietsymbole oder Buchstaben, welche allenfalls in den Ausdrücken für die Elemente vorkommen, als von einander unabhängig beliebige Gebiete angesehen, gedeutet werden, müssen hienach auch *sämtliche Elemente* einer Gruppe im Allgemeinen unter sich *verschieden* sein, m. a. W. die Gleichsetzung irgend zweier Ausdrücke der Gruppe muss allemal eine synthetische Gleichung, eine „Relation" liefern, nicht aber darf dadurch eine „Formel" entstehen.

Diese Forderung ist stricte aufrecht zu erhalten, sobald etwa die „*Anzahl*" der Elemente in Betracht gezogen werden, wenn von dem „Umfang" der Gruppe gesprochen werden soll — andernfalles würde ja der Gruppe ein bestimmter Umfang gar nicht zukommen. Ist sie erfüllt, so mögen wir sagen, die Gruppe sei in ihrer „reduzirten" Form dargestellt, *reduzirt* gegeben, ausgerechnet, ermittelt.

Im übrigen wird es aber bei den in's Auge zu fassenden Erzeugungsweisen der Gruppen sich empfehlen, dass man im Geiste des Tautologiegesetzes *Wiederholung* von Elementen *nicht verbiete*, sondern nur *für belanglos erkläre*. Wo keine Veranlassung dazu vorliegt, wird man alsdann doch sie ohnehin unterlassen — so z. B. bei allen Endergebnissen, bei denen ja auf grösstmögliche Einfachheit derselben für künftigen Gebrauch zu sehen ist.

Auf der andern Seite gewinnt man so die Freiheit, eine Gruppe z. B. auch aus einer Übergruppe entstehen zu lassen dadurch, dass man zwischen den Elementen von dieser Relationen einführt, z. B. einzelne Elemente, die ursprünglich verschieden gedacht wurden, einander gleich werden lässt. Nur aber indem man zulässt, dass verschiedene Buchstaben auch gleichwertig werden dürfen, nur dadurch wird man in der That imstande sein, sich die volle Allgemeinheit der Betrachtungen mitsamt deren Vorteilen zu sichern.

Ein solches System von Elementen der Gruppe aus welchem alle übrigen Elemente derselben durch unsre Operationen (der drei Spezies) schon vollständig ableitbar sind, nannten wir ein „(ausreichendes) System von *Bestimmungselementen*" der Gruppe.

Wir *bezeichnen* die Gruppe kurz, indem wir hinter den Buchstaben G ein System von Bestimmungselementen derselben — diese durch Kommata getrennt — in eine Klammer schreiben.

Auch die Gruppe selbst kann als ein ausreichendes System von Bestimmungselementen ihrerselbst hingestellt werden, insofern hier „übrige" Elemente, die erst noch aus den angegebenen abzuleiten wären, gar nicht vorhanden sind. *In solchem Falle mögen wir das Symbol G auch weglassen.*

Sonach werden wir nun haben:

$$G(0) = G(1) = G\{0, 1\} = \{0, 1\};$$
$$G(a) = G(a_1) = G\{0, 1, a, a_1\} = \{0, 1, a, a_1\}$$

und zudem $= G(a, a_1) = G(0, a) = G(1, a) = G(0, a_1) = G(1, a_1) =$
$= G(0, a, a_1) = G(1, a, a_1) = G(a_1, a) = G(a, 0) =$ etc.

indem es auch *auf die Reihenfolge bei der Angabe der Elemente nicht ankommen* wird.

Nehmen wir *in* $G(a)$ das a gleich 0 an, so entsteht:

$$G(0) = \{0, 1, 0, 1\} = \{0, 1\},$$

und ebenso für $a = 1$ erhalten wir $G(1) = \{0, 1, 1, 0\}$ was sich ebenfalls zu $\{0, 1\}$ „reduzirt" — in Illustration des im vorigen Kontext Gesagten.

Die Nullgruppe besteht aus zwei, die Gruppe von a schlechtweg aus vier Elementen, weil zunächst in ihr das a als beliebig zu denken.

Bei der Angabe von ausreichenden Bestimmungselementen einer Gruppe wird indess im Allgemeinen darauf zu halten sein, dass man sich unnötiger Weitläufigkeiten nicht schuldig mache, d. h. es sind *überflüssige Elemente* dabei *zu unterdrücken*. Als „überflüssig" wird die Angabe eines Bestimmungselementes dann zu bezeichnen sein, wenn dasselbe aus den bereits angegebenen (resp. den übrigen „Bestimmungselementen") durch die erlaubten Operationen, eben der drei Spezies, schon ableitbar ist.

So ist bei $G(a, a_1)$ das a_1 ein überflüssiges Bestimmungselement, weshalb es besser unterdrückt und die betreffende Gruppe einfacher mit $G(a)$ dargestellt wird. Resp. falls man a_1 beibehalten will, so wird a als überflüssig zu unterdrücken sein.

Kommen überflüssige Bestimmungselemente nicht (mehr oder von vornherein nicht) vor, so ist das System der Bestimmungselemente ein „reduzirtes". Wir haben dann „ein *ausreichendes* System von *unentbehrlichen* Bestimmungselementen" (welche freilich allemal auch durch ganz andere vertreten werden könnten, und darum nur in einem gewissen Sinne als „unentbehrliche" hingestellt werden dürfen — nämlich als „nicht-überflüssige" — wie aus dem Obigen erhellt). Auf ein solches System soll der schlechtweg gebrauchte Name „System von Bestimmungselementen" künftig immer hinweisen. —

Unsre nächste Aufgabe sei: die Gruppen aufzusuchen der Ausdrücke, welche mittelst zwei, resp. 3, resp. 4 Buchstaben a, b, c, d gebildet werden können. So weit thunlich mögen wir auch zusehen, auf welche Art diese Gruppen in Untergruppen sich gliedern. Vor allem aber kommt es darauf an, die Anzahl und Beschaffenheit der verschiedenen *„Arten"* oder *„Typen"* zu ermitteln, von welchen die als Elemente der Gruppe auftretenden Ausdrücke sein werden.

Von zwei Ausdrücken werden wir nämlich sagen, dass sie zum nämlichen *Typus* gehören, wenn sie durch blossen Buchstabenwechsel aus einander hervorgehen, genauer: wenn es möglich ist, aus dem einen Ausdruck den andern, dadurch abzuleiten, dass man für die einfachen Buchstaben a, a_1, b, b_1, $\cdots$ aus denen er sich zusammensetzt und deren positive uns unabhängig beliebige Gebiete vorstellen, eventuell andere (sei es positive, sei es negative) einfache Symbole substituirt, deren positive ebenfalls unabhängig beliebige Gebiete vorzustellen haben.*) Es wird dann immer auch möglich sein, den andern Ausdruck aus dem einen zurückzugewinnen: indem man nämlich die vorigen Einsetzungen wieder rückgängig macht. (Postulat?, dass man dies immer könne.)

Vom *selben* Typus sind z. B. die Ausdrücke

$$a + a_1 b c_1 \quad \text{und} \quad b_1 + a_1 d,$$

weil der zweite (zunächst in der mit ihm äquivalenten Form $b_1 + a_1 b d_1 = b_1 + b d a_1$) sich aus dem ersten (der auch zu $a + b c_1$ reduzirbar) ergibt, indem man in diesem das a durch b_1' — somit das a_1 durch b' — zugleich das b durch d' und das c_1 durch a_1' ersetzt, hernach aber die Accente weglässt. Darnach wird auch der erste Ausdruck sich aus dem zweiten (in seiner reduzirten Form) ergeben, indem man im letztern b_1 durch a', d durch b', und a_1 durch c_1' ersetzt, sodann die Accente fortlässt.

Hat man zwei Ausdrücke auf die Übereinstimmung ihres Typus zu untersuchen, in welchen teilweise oder durchaus die *nämlichen* Buchstaben auftreten, so ist es ratsam (so, wie es im vorstehenden Beispiel durchgeführt worden), die Buchstaben des einen Ausdrucks provisorisch mit Accenten zu versehen und dadurch von denen des andern unterscheidbar zu machen.

In der That sollten die Buchstaben des einen Ausdrucks eine von den gleichnamigen des andern unabhängig beliebige Bedeutung haben, und wird man so nur die allgemeine für das Bezeichnen maassgebende Maxime im vorliegenden Falle befolgt haben, dass in *einer* Untersuchung als verschieden Denkbares nicht übereinstimmend bezeichnet werden dürfe.

Andernfalles läuft man nicht selten Gefahr die gleichnamigen Buchstaben als solche des ersten und als solche des zweiten Ausdruckes zu vermengen, wie an einem Beispiel dargelegt werden möge: Um den Ausdruck:

$$ax + a_1 b y + b_1 c \quad \text{in} \quad b_1 x + b c_1 y + ac$$

zu verwandeln und damit zu erkennen, dass beide zum selben Typus gehören, ist erforderlich und hinreichend, a tempo zu ersetzen:

$$(x \text{ durch } x, \quad y \text{ durch } y),$$

*) Selbstverständlich ist bei diesen Einsetzungen zu beachten, dass nach Th. 32), wenn b für a gesetzt wird, auch b_1 für a_1 gesetzt werden muss, gleichwie, wo a durch b_1 ersetzt wird, auch a_1 durch b ersetzt werden muss.

$$a \text{ durch } b_1, \quad \text{somit } a_1 \text{ durch } b,$$
$$b \text{ durch } c_1, \quad \text{,, } \quad b_1 \text{ durch } c,$$
$$c \text{ durch } a, \quad (\text{ ,, } \quad c_1 \text{ durch } a_1).$$

Bringt man sich aber zum Bewusstsein, dass *gleichzeitig* a_1 durch b und b durch c_1 (desgleichen b_1 durch c und c durch a) ersetzt werden solle (im ersten Ausdrucke), so liegt das Missverständniss, der Wahn, nahe, als ob etwa a_1 durch c_1 (desgl. b_1 durch a) zu ersetzen wäre. Dies ist nicht der Fall, denn das b (des ersten Ausdruckes) *welches durch* c_1 daselbst ersetzt werden soll, ist ein ganz anderes Gebietsymbol, als das b (des zweiten Ausdruckes), *durch welches* das a_1 (im ersten) zu ersetzen war.

Dem Missverständniss wird vorgebeugt, wenn man sich die Buchstaben des zweiten Ausdruckes mit Accenten versieht, wo dann zu sagen ist, dass man a durch b_1', b durch c_1', c durch a', somit auch zugleich a_1 durch b', b_1 durch c', (c_1 durch a_1') zu ersetzen habe.

Jedenfalls wird man bei Beachtung dieser einfachen Vorsichtsmassregel leichter und sicherer diejenigen (oder solche) Vertauschungen ausfindig machen, welche den einen Ausdruck in den andern überführen, sofern es deren gibt — und andernfalles wird man ebenso die Unmöglichkeit solcher Verwandlung bequemer erkennen.

In vielen Fällen freilich — wo Vertauschungen von immer nur zwei Buchstaben auf einmal, sogenannte *„Transpositionen"* schon hinreichen, die beabsichtigte Überführung zustande zu bringen, *und zwar* solche Transpositionen, die nie einen Buchstaben als Vertauschungselement miteinander gemein haben — braucht man nicht zu solcher Weitläufigkeit (der Einführung und Wiederfortlassung von Accenten) seine Zuflucht zu nehmen.

Man erkennt z. B. augenblicklich, dass von den beiden Ausdrücken:

$$ab + ac + a_1 b_1 c_1 \quad \text{und} \quad ab + bc_1 + a_1 b_1 c$$

der eine aus dem andern durch Vertauschung von a mit b und zugleich von c mit c_1 hervorgeht, mithin auch diese von einerlei Art sein werden.

[Wo dagegen sog. *„cyklische"* Vertauschungen von höherer Ordnung, Vertauschungen im Ringe herum erforderlich werden, wie beim vorhergehenden Beispiel die Ersetzung von a durch b_1, von b_1 durch c und von c durch a, da möchte die kleine Weitläufigkeit sich für den Anfänger lohnen.]

Nicht vom selben Typus sind z. B. die beiden Ausdrücke:

$$ab + a_1 b_1 \quad \text{und} \quad ab + ab_1$$

deren zweiter sich auf a reduzirt. Was für unabhängig beliebige Gebiete man auch für a und b einsetzen möge, nie wird derselbe hier in den zweiten übergehen, wie leicht durchzuprobiren wäre.

Die *„Gruppe von a und b"* besteht aus 16 Elementen, als da sind:

$$G(a, b) = \{0, 1, a, b, a_1, b_1, ab, ab_1, a_1 b, a_1 b_1, a + b, a + b_1, \\ a_1 + b, a_1 + b_1, ab + a_1 b_1, ab_1 + a_1 b\}$$

Dass diese Ausdrücke in der That durch die identischen Spezies aus a und b „ableitbar", nämlich *abgeleitet* sind, ist augenscheinlich.

Ebenso ist ersichtlich, dass dieselben unter sich verschieden. Um es zu beweisen, brauchte man nur ein jedes der Elemente nach den beiden Argumenten a und b im Sinne des § 19 „entwickelt“ darzustellen, wie es die beiden letzten derselben, sowie die viere von ab bis a_1b_1 schon sind. Alsdann würde sich offenbaren, dass keine der Entwickelungen durchaus dieselben Glieder enthält, wie irgend eine andere, dass sie lauter verschiedene (additive) Kombinationen von den vier Konstituenten ab, ab_1, a_1b, a_1b_1 vorstellen, m. a. W. durch die Werte 0 oder 1 der Koeffizienten, mit denen diese Konstituenten in ihnen (in den Entwickelungen) behaftet sind, sich unterscheiden.

Bleibt also nur noch darzuthun, dass mit dem angegebenen System von Elementen die Gruppe erschöpfend angegeben ist: es bleibt die „Vollständigkeit der Gruppe“ zu beweisen.*)

Dieser Nachweis kann auf zwei Wegen geliefert werden.

Der erste Weg besteht in der Anwendung der Methode, durch welche sich ein gegebenes System von Bestimmungselementen einer Gruppe allemal zu dieser Gruppe vervollständigen oder ergänzen lässt. Bleibt diese Methode bei dem vorliegenden System von (16) Elementen erfolglos, indem durch sie keine weiteren Elemente demselben hinzugefügt werden, so musste das System schon die vollständige Gruppe gewesen sein.

Bevor wir von dem zweiten Wege sprechen, wollen wir diese Methode näher in's Auge fassen.

Gegeben irgend welche Symbole oder Ausdrücke als Bestimmungselemente einer Gruppe. Es handle sich darum, die ganze Gruppe herzustellen. Dies lässt sich unfehlbar, wie folgt, bewerkstelligen:

Man füge den gegebnen Bestimmungselementen (durch Kommata getrennt) zunächst die 0 und 1, sowie die Negationen jener hinzu, sofern sie nicht bereits unter denselben sich mitangegeben finden. Hiermit wird dieser erste Prozess — des Negirens — sich als schon abgeschlossen erweisen, indem es nicht nötig fallen wird noch weiter vom Negiren Anwendung zu machen.

Die Elemente 0 und 1, die wir uns *voran*geschrieben denken,

*) Diese Ausdrucksweise ist bequem und verständlich, obzwar sie keine ganz genaue. Ihrem Begriffe nach ist jede Gruppe eine vollständige. Eine „unvollständige Gruppe“ wäre eine contradictio in adjecto, verdiente den Namen „Gruppe“ nicht, sondern wäre als blosses System von Elementen zu bezeichnen. Durch die Redensart soll der Nachweis gemeint sein, dass das *für eine Gruppe ausgegebene* System die Elemente einer solchen vollständig enthält, sonach den ihm gegebenen Namen verdiente.

mögen bei den folgenden Prozessen ausser Betracht bleiben, sintemal es nicht möglich ist, durch multiplikative oder additive Verknüpfung eines Ausdruckes mit ebendiesen jemals einen neuen Ausdruck zu gewinnen.

Von der hinter 0, 1 stehenden Reihe als nunmehrigem Bestande von Elementen verknüpfe man nun (in Gedanken), zunächst z. B. stets *multiplikativ*, ein jedes Element mit jedem andern, und füge, wenn das Produkt keinem einzigen von den bisherigen Elementen gleich ist, dasselbe allemal als ein neues Element den bisherigen am Ende der Reihe hinzu. Man fahre solange damit fort, bis sich durch die multiplikative Verknüpfung keine neuen Elemente mehr ergeben, bis nämlich jede zwei von den vorhandenen (den gegebenen nebst den hinzugetretenen) Elementen verknüpft worden. Der Prozess des Multiplizirens wird sich damit als abgeschlossen erweisen.

Ebenso verfahre man endlich in Hinsicht *additiven* Verknüpfens indem man von dem dermalen verfügbaren Vorrate jede zwei Elemente zu einer Summe zusammenhält und diese, wenn sie von allen bisherigen verschieden, denselben sofort als ein neues Element am Ende der Reihe angliedert. *Die Gruppe muss dann vollständig dastehen*, sobald auch dieser Prozess des Addirens zu Ende gekommen.

Da die verknüpfenden Operationen kommutative sind, so wird man natürlich, nachdem ein a mit einem b zusammengehalten worden, das b nicht nochmals mit diesem a zu verbinden brauchen. Es genügt darum, ein jedes Element gewissenhaft *mit jedem der ihm vorhergehenden* in der Reihe verknüpft zu haben. Verknüpfungen der Elemente mit sich selbst können wegen der Tautologiegesetze erlassen werden.

Auch zulässig zwar, jedoch minder gut würde die Taktik sein, ein Element je mit allen ihm nachfolgenden zu verknüpfen, weil im Lauf der Prozesse das Ende der Reihe sich oft noch weiter hinausschiebt und man sonach genötigt wäre, nachdem ein frühes Element mit allen zur Zeit auf dasselbe folgenden, nebst den eventuell ebendadurch noch neu hinzutretenden, schon vollständig verknüpft worden, später, wenn durch Verknüpfen späterer Elemente deren abermals neue hinzugekommen sein werden, nochmals auf jenes zurückzukommen um es auch mit diesen inzwischen neuhinzugetretenen noch zu verknüpfen — und dieses eventuell wiederholt, bei jedem Elemente! Man müsste so von jedem Elemente im Sinne behalten oder notiren, bis zu welcher Stelle der Reihe als ihrem dermaligen Endpunkte man es bereits mit den ihm nachfolgenden verknüpft hat, von wo an noch nicht; man käme aus der gleichmässigen Ordnung heraus und würde leichter Auslassungen begehen.

Um zu erkennen, dass das so gewonnene Elementesystem die ge-

suchte vollständige Gruppe ist, sind folgende Überlegungen anzustellen.

Nachdem der Prozess des Multiplizirens beendigt ist kann selbstverständlich durch multiplikative Verknüpfung *zweier* Elemente kein neues Element mehr gewonnen werden, auch nicht durch multiplikatives Verknüpfen *beliebig vieler* von den vorhandenen Elementen — denn solches läuft bekanntlich auf das successive Verknüpfen von immer nur zweien ebendieser Elemente hinaus, welches, wie wir wissen, ein neues Element nie liefern konnte.

Ebenso, nachdem der Prozess des Addirens beendigt, kann additive Verknüpfung von zweien oder beliebig vielen der nun vorhandenen Elemente kein neues Element mehr liefern.

Wir wollen die Reihe der nach diesem dritten Prozesse vorliegenden Elemente kurz die „Summenreihe" nennen, und ebenso das System der Elemente soweit es nach Beendigung des zweiten Prozesses vorgelegen, die „Produktenreihe".

In der That kann jedes Element dieser Summenreihe angesehen werden als die Summe $\alpha + \beta$ zweier Elemente α und β der Produktenreihe, indem man, wenn es mit einem Element α dieser Produktenreihe selbst zusammenfallen sollte, sich nur die 0 unter β vorzustellen braucht.

Ebenso konnte jedes Element α der Produktenreihe angesehen werden als das Produkt $\gamma\delta$ zweier Elemente γ und δ der vorhergehenden (durch den ersten oder Negationsprozess ergänzten) Reihe — sie möge kurz die „erste" Reihe heissen — (im Gegensatz zu dem ursprünglich gegebnen Systeme von Bestimmungselementen als der „nullten" Reihe). Denn wenn das Element auch als ein γ zu diesem ursprünglichen System selbst gehörte, so braucht man sich nur (unter α ebendieses γ und) unter δ die 1 vorzustellen.

Ich behaupte jetzt, dass auch die *Multiplikation* irgend zweier (und darnach auch beliebig vieler) Elemente der *Summen*reihe kein neues Element mehr liefern kann. Denn durch $\alpha + \beta$ wird sich das eine, durch $\alpha' + \beta'$ das andere dieser Elemente darstellen lassen, wo α und β sowie α' und β' der Produktenreihe angehören. Nun ist:

$$(\alpha + \beta)(\alpha' + \beta') = \alpha\alpha' + \alpha\beta' + \alpha'\beta + \beta\beta'.$$

Die vier Glieder rechterhand gehören aber unfehlbar selbst schon der Produktenreihe an, denn diese enthält ja als Element bereits jedes Produkt von zweien ihrer Elemente.

Die Summenreihe aber enthält jede Summe nicht nur von zweien, sondern auch von beliebig vielen Elementen der Produktenreihe; sie enthält nämlich auch als Element jede Summe von irgend zweien (und beliebig vielen) ihrer eigenen Elemente. Im vorliegenden Falle müssen z. B. auch $\alpha\alpha' + \alpha\beta'$, sowie $\alpha'\beta + \beta\beta'$ schon Elemente dieser Summen-

reihe sein, und ebendarum muss auch die Summe dieser beiden wieder ein ihr selber angehöriges Element sein, wie zu zeigen gewesen.

Bei dem Beweise wurde augenscheinlich kein Gebrauch gemacht von der Annahme, dass zuvor der erste Prozess vollzogen sei, dass die Vervollständigung des Systems mittelst Einverleibung auch der Negationen seiner Elemente überhaupt stattgefunden habe. Wir müssen vielmehr allgemein den Satz haben:

Wenn ein System von Elementen so beschaffen ist, dass es durch multiplikative Verknüpfung zwischen seinen Elementen — „Intermultipliziren" — keine neuen Elemente mehr liefern kann, und man vervollständigt das System soweit, dass sich auch durch additive Verknüpfungen zwischen seinen Elementen — „Interaddiren" — keine neuen Elemente mehr ergeben können, so kann auch das so vervollständigte System beim Intermultipliziren keine neuen Elemente mehr liefern. M. a. W.:

Eine „Gruppe hinsichtlich Multiplikation", wenn vermehrt auch zu einer „Gruppe hinsichtlich Addition", bleibt dennoch Gruppe hinsichtlich der Multiplikation, wird also eine *„Gruppe in Hinsicht beider Operationen"*.

Des Dualismus halber liefert natürlich dieser Satz noch einen zweiten richtigen, wenn man die Worte „Multiplikation" und „Addition" in ihm vertauscht.

Ich behaupte ferner, dass nachdem der erste Prozess vorausgegangen, nun auch die Operation des *Negirens* aus keinem Element der Summenreihe ein neues mehr erzeugen kann.

Zunächst wird als $\alpha + \beta$ das zu negirende Element darzustellen sein, wo α und β der Produktenreihe angehören. Und wir haben:

$$(\alpha + \beta)_1 = \alpha_1 \beta_1.$$

Der Beweis wäre erbracht, wenn etwa auch α_1 und β_1 der Produktenreihe angehören müssten. Dies lässt sich aber keineswegs behaupten. Nachweisbar ist gleichwol, dass $\alpha_1 \beta_1$ wenigstens der Summenreihe angehören muss.

Als Element der Produktenreihe ist nämlich:

$$\alpha = \gamma \delta \quad \text{und ebenso} \quad \beta = \gamma' \delta',$$

wo $\gamma, \delta, \gamma', \delta'$ der „ersten" (abgeleiteten) Reihe als Elemente angehören. Da diese mittelst Negirens vervollständigt worden, so enthält sie notwendig auch schon die Negationen $\gamma_1, \delta_1, \gamma_1', \delta_1'$ ebendieser Elemente. Nun ist

$$\alpha_1 \beta_1 = (\gamma_1 + \delta_1)(\gamma_1' + \delta_1') = \gamma_1 \gamma_1' + \gamma_1 \delta_1' + \gamma_1' \delta_1 + \delta_1 \delta_1',$$

wo die Glieder rechterhand notwendig der Produktenreihe, und dar-

nach das Aggregat derselben auch der Summenreihe, schon unvermeidlich angehören.

Hiermit ist erkannt, dass weder durch Addiren, noch durch Multipliziren, noch durch Negiren aus der Summenreihe neue Elemente abgeleitet werden können. Dies ist also auch nicht möglich durch irgendwelche Verbindung dieser Operationen unter einander.

D. h. jene Summenreihe muss die gesuchte Gruppe sein. q. e. d.

So sehr die Ergänzung von Bestimmungselementen zur vollständigen Gruppe durch vorstehendes Verfahren auch vereinfacht erscheint, so ist sie doch immerhin noch mühsam genug.

Beispielsweise aus den Bestimmungselementen a, b ergibt sich als „erste" Reihe:

$$0,\ 1,\ a,\ b,\ a_1,\ b_1$$

sodann als zweite oder Produktenreihe bei strenger Einhaltung der vorgeschriebenen Ordnung:

$$0,\ 1,\ a,\ b,\ a_1,\ b_1,\ ab,\ a_1b,\ ab_1,\ a_1b_1$$

— ein System, welches die Negationen der vier letzten Elemente in der That noch nicht enthält. Zur dritten oder Summenreihe treten dann zu den angegebenen noch der Reihe nach:

$$a+b,\quad a_1+b,\quad a+b_1,\quad a_1+b_1,\quad ab_1+a_1b,\quad ab+a_1b_1$$

als weitere Elemente hinzu.

An ferneren beiläufig von uns angeführten Gruppen wird der Leser reichliche Gelegenheit haben, die Methode einübend zu festigen.

Ein zweiter Weg, die Vollständigkeit einer gegebenen Gruppe nachzuweisen, besteht darin, dass man die Anzahl ihrer Elemente a priori ermittelt und sich überzeugt, dass dieselbe hier vorliegt.

Zu diesem Zwecke muss man ein System von Bestimmungselementen der Gruppe kennen.

Ein solches ausschliesslich und auf jede mögliche Weise aus der Gruppe herauszulesen, ist eine keineswegs leichte Aufgabe, die wir einstweilen als ein systematisch erst noch zu lösendes Problem vormerken.

Sehr häufig genügt jedoch schon die blosse Beaugenscheinigung, Okularinspektion der Gruppe, um ein System von Bestimmungselementen derselben zu entdecken, indem man eben wahrnimmt, dass aus gewissen als Elemente auftretenden einfachen oder Buchstabensymbolen die übrigen Elemente alle aufgebaut sind — als Funktionsausdrücke des identischen Kalkuls. Diese einfachen Symbole, nach Weglassung derer, welche die Negationen von beibehaltenen sind, bilden dann das System der Bestimmungselemente. So oben a und b.

Sind aber n unabhängig beliebige Symbole als Bestimmungselemente einer Gruppe gegeben, so muss dieselbe aus 2^{2^n} Elementen bestehen.

Die Ermittelung ihrer Elementenzahl ist sonach eine leichteste Aufgabe.

Analog Jevons[9] p. 221, [10] und[8] p. 137...143 lässt dies sich in der That unschwer wie folgt beweisen.

Jedes Element der Gruppe ist eine Funktion lediglich der n Bestimmungselemente, und enthält die Gruppe alle Funktionen, welche durch die Operationen des identischen Kalkuls aus diesen aufgebaut werden können.

Denkt man sich jedes Element gemäss § 19 nach den n Bestimmungselementen als den Argumenten „entwickelt“, so enthält diese Entwickelung, vollständig angeschrieben, 2^n Glieder (vgl. ibidem). Jeder von den 2^n Konstituenten der Entwickelung kann zum Koeffizienten nur entweder 0 oder 1 haben, weil laut Voraussetzung noch andere Buchstaben als die der Argumente nicht vorkommen, und 0 und 1 die einzigen speziellen Gebietsymbole des identischen Kalkuls waren. Jenachdem wird der betreffende Konstituent als Glied in der Entwickelung fehlen oder ganz in derselben vertreten sein. Darnach haben wir aber:

$$\underset{1}{\overset{\frown}{2}} \times \underset{2}{\overset{\frown}{2}} \times \underset{3}{\overset{\frown}{2}} \cdots \times \underset{2^n}{\overset{\frown}{2}} = 2^{(2^n)} = 2^{2^n}$$

verschiedene Möglichkeiten, die Koeffizientenstellen mit Nullen oder Einsern zu besetzen, und ebensoviel *verschiedene „Ausdrücke“*, aufgebaut aus den n Argumenten, kann es nur, ebensoviele muss es auch geben.

Die ermittelte Zahl, nur um 1 vermindert, muss auch zugleich die Anzahl sein der inhaltlich verschiedenen (einander nicht äquivalenten) *Aussagen,* welche von der auf simultane Subsumtionen und Gleichungen beschränkten Logik abgegeben werden können *in Bezug auf n Gebiete* oder *Klassen.*

Denn da die Aussage eine Subsumtion oder eine Gleichung sein soll (zu welcher ja auch ein System von simultanen Propositionen ebendieser Art stets sich vereinigen lässt), so kann sie als *Gleichung mit der rechten Seite* 0 *geschrieben werden.* Das Polynom, die linke Seite dieser Gleichung kann aber als eine Funktion der n gegebenen Klassen, nur einer von den obigen 2^{2^n} Ausdrücken sein, und somit gibt es auch anscheinend genau so viel verschiedene Aussagen. Von diesen Aussagen läuft aber *eine* auf: $1 = 0$ hinaus, diejenige nämlich, bei der links alle Koeffizienten als Einser angesetzt sind, das Polynom also

die Summe sämtlicher Konstituenten sein wird. Diese eine Aussage ist als absurde, unzulässige, nicht mitzurechnen, sonach die fragliche Anzahl der über n Klassen möglichen Aussagen:

$$= 2^{2^n} - 1.$$

Eingerechnet dagegen ist (wieder) die „nichtssagende“ oder „identische Aussage, bei der linkerhand alle Koeffizienten Nullen sein werden und welche auf: $0 = 0$ hinausläuft.

Nach diesen Ergebnissen muss also a priori

$$2^{2^2} = 2^4 = 16, \quad 2^{2^3} = 2^8 = 256, \quad 2^{2^4} = 2^{16} = 65\,536,$$

$$2^{2^5} = 2^{32} = 4\,294\,967296, \; 2^{2^6} = 2^{64} = 18\,446744\;073709\;551616, \cdots$$

die Anzahl sein der im Allgemeinen unter sich verschiedenen Ausdrücke, welche aus zwei Gebieten a, b resp. aus dreien a, b, c, resp. aus vieren, a, b, c, d, resp. etc. durch die Operationen des identischen Kalkuls aufgebaut werden können (bei sechs Gebieten mithin über 18 Millionen Billionen!).

Ebendiese muss bezüglich auch die Anzahl sein der Elemente für die Gruppen

$$G(a, b), \quad \text{resp. } G(a, b, c), \quad \text{resp. } G(a, b, c, d), \cdots$$

Die Vollständigkeit der oben angegebenen Gruppe $G(a, b)$ ist hiermit auch auf dem zweiten Wege bewiesen.

Wir wenden uns nunmehr der Frage zu, wie vielerlei und welche *Typen* die Ausdrücke aufweisen müssen, welche unsre Gruppen $G(a)$, $G(a, b)$, $G(a, b, c)$, $G(a, b, c, d)$, $\cdots$ — in nunmehr ja bekannter Anzahl — als Elemente zusammensetzen.

Es zeigt sich, dass diese Frage für die Anwendungen der Gruppentheorie (von denen wir am Schluss eine geben) von Wichtigkeit ist.

Leicht ist die Frage bei den Gruppen $G(a)$ und $G(a, b)$ zu beantworten, die ja oben schon fertig gebildet vor unsern Augen stehen.

Zunächst müssen die Elemente 0 und 1 für *von verschiedenem Typus* erklärt werden, welcher Gruppe sie auch angehören mögen, sodass jedes von diesen beiden Elementen als für sich allein schon einen aparten Typus konstituirend anzusehen ist. Es ist nämlich nicht möglich, von den beiden Ausdrücken

$$0 \cdot a + 0 \cdot a_1, \quad 1 \cdot a + 1 \cdot a_1,$$

desgleichen von den beiden

$0 \cdot ab + 0 \cdot ab_1 + 0 \cdot a_1 b + 0 \cdot a_1 b_1$, $\quad 1 \cdot ab + 1 \cdot ab_1 + 1 \cdot a_1 b + 1 \cdot a_1 b_1$
etc. den einen aus dem andern durch eine *Buchstabenvertauschung* abzuleiten.

Bei $G(a)$ gesellt sich nun zu dem „ersten“ Typus 0, als „zweiter“ der Typus a, a_1, dessen beide Repräsentanten in der That durch die Vertauschung von a mit a_1 in einander übergehen, und endlich als „dritter“ der Typus 1. Wir haben also nach Typen ordnend für $G(a)$ das Schema:

$$\begin{matrix} 0 \\ a, \; a_1 \\ 1 \end{matrix}$$

Die Reihenfolge der Typen bestimmt sich hier unter dem Gesichtspunkt, dass aus der Entwickelung der 1 nach dem Bestimmungselemente a der Gruppe: $1 = a + a_1$ beim ersten Typus *kein*, beim zweiten *ein* Glied und beim dritten Typus alle *zwei* Glieder in einem Repräsentanten des Typus vereinigt, zu einem solchen zusammengefasst erscheinen.

„*Komplementär*“ werden wir zwei Typen zu nennen haben, wenn ein Repräsentant des einen Typus die Negation ist von einem Repräsentanten des andern. Als „Repräsentanten“ eines Typus dürfen wir jeden aus den Bestimmungselementen der Gruppe aufgebauten Ausdruck bezeichnen, der zu dem Typus gehört („von“ diesem Typus „ist“).

Darnach wäre es nicht schwer zu zeigen, dass zwei komplementäre Typen immer gleichviele Repräsentanten besitzen, gleichviel Elemente der Gruppe umfassen müssen, und zwar sind die Repräsentanten des einen gerade die Negationen von denen des andern. „Entwickelt“ nach den Bestimmungselementen der Gruppe enthält der eine Repräsentant immer gerade diejenigen Glieder, welche in der Entwickelung des andern fehlen — vgl. den Zusatz auf S. 314 sq.

Bei strenger Anordnung der Typen nach der Zahl von Gliedern in der Entwickelung ihrer Repräsentanten werden also komplementäre Typen einen Rang einnehmen, der sich dadurch kennzeichnet, dass der eine Typus vom Anfang der Typenreihe gerade so weit absteht, als der komplementäre vom Ende derselben. Es wird sich aber später zumeist empfehlen, von dieser strengen Anordnung abzugehen, nämlich die Reihe der Typen gleichsam in der Mitte zu knicken und die beiden Schenkel zusammenzulegen, sodass die komplementären Typen zu Nachbarn werden.

Von zwei komplementären Typen werden wir sagen, dass sie zusammen einen „*Haupttypus*“ ausmachen.

Die komplementären Typen könnten auch einander *„dual entsprechende“* genannt werden. Zu einem Ausdruck als Repräsentanten eines Typus erhält man nämlich den dual entsprechenden, wenn man — während die in ihn eingehenden einfachen Symbole (seien sie positive oder negative) ungeändert gelassen werden — „plus“ mit „mal“ in ihm vertauscht. Die Negation erhält man — nach den Theoremen 36) — *ebenso*, indem man nur obendrein noch jene einfachen Symbole in ihre Negationen verwandelt. Die Negation des Ausdrucks geht also aus dem dualen Gegenstück desselben hervor, indem man die Buchstaben des letzteren mit ihren Negationen vertauscht — sowie umgekehrt, d. h. Negation und duales Gegenstück des Ausdrucks gehören zum selben Typus, den wir den komplementären von demjenigen des Ausdrucks nannten.

Wie zahlreiche Beispiele darthun, kann aber ein Ausdruck auch sich selbst, oder wenigstens einem solchen vom nämlichen Typus dual entsprechen, sodass es auch Typen gibt, die zu sich selber dual und komplementär sind.

Ein sich selber komplementärer Typus ist zugleich ein Haupttypus, konstituirt für sich einen solchen. Ein solcher kann nach dem Vorstehenden aber nur vorkommen innerhalb derjenigen Abteilung, welche die Mitte innehält in der Reihe der Typen, somit je gerade die Hälfte aller Konstituenten zu einem Elemente zusammenfasst.

Dies alles exemplifizirt sich bereits bei der Gruppe $G(a)$, wo die Verhältnisse freilich höchst einfach liegen:

Der mittlere (zweite) Typus, repräsentirt durch a, a_1, ist zu sich selbst komplementär, und zugleich der zweite Haupttypus. Der dritte Typus, repräsentirt durch 1, ist komplementär zum ersten, durch 0 repräsentirten, und macht mit ihm den ersten Haupttypus aus. Wir haben also bei $G(a)$ *drei Typen* und *zwei Haupttypen.*

Der Analogie mit dem Folgenden wegen heben wir noch hervor, dass sich die Frage nach der Anzahl der Typen in der Gruppe $G(a)$ geometrisch deckt mit der Frage nach der Anzahl der Arten, auf welche sich an der zweipunktig begrenzten Strecke, dem (geradlinigen) „Zweieck“ Ecken auswählen lassen.

Man kann entweder *keine* Ecke, oder *irgend eine*, oder alle zwei Ecken auswählen.

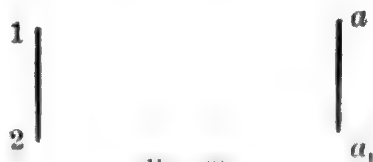


Fig. 35.

Analog wird bei der Frage nach der Zahl der Typen, in welche die Elemente der Gruppe $G(a, b)$ sich einordnen, es darauf ankommen, zu ermitteln, auf wie viele Arten

sich beim (ebenen) *Viereck*, z. B. beim *Quadrate* (Fig. 36) Ecken auswählen lassen.

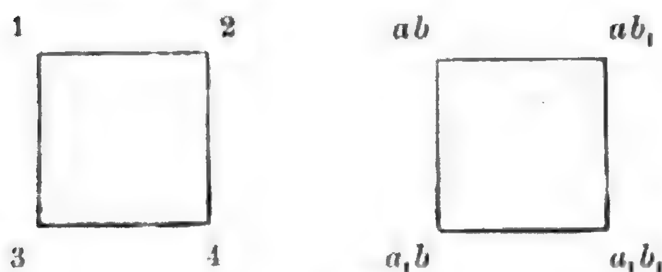


Fig. 36.

Offenbar kann man entweder *keine* Ecke wählen, oder *irgend eine*, oder *irgend zweie*, und dann entweder zwei *benachbarte*, oder aber zwei *gegenüberliegende*, oder *irgend dreie* (mit Auslassung jedes vierten) oder *alle viere*.

Wenn wir für die Konstituenten der Entwickelung der identischen 1 nach den Bestimmungselementen a, b der Gruppe die Nummern beibehalten, welche aus der Vergleichung der beiden Quadrate der Figur ersichtlich werden, so haben wir in der That bei den Elementen von $G(a, b)$ die folgenden 6 Typen — in strenger Anordnung:

Erster Typus: 0

Zweiter „ : $1 = ab, \quad 2 = ab_1, \quad 3 = a_1b, \quad 4 = a_1b_1$

Dritter „ : $1 + 2 = a, \quad 1 + 3 = b, \quad 2 + 4 = b_1, \quad 3 + 4 = a_1$

Vierter „ : $1 + 4 = ab + a_1b_1, \quad 2 + 3 = ab_1 + a_1b$

Fünfter „ : $2 + 3 + 4 = a_1 + b_1, \quad 1 + 3 + 4 = a_1 + b, \quad 1 + 2 + 4 = a + b_1,$
$1 + 2 + 3 = a + b$

Sechster „ : $1 + 2 + 3 + 4 = 1,$

und schliessen sich von diesen der erste und sechste zu einem Haupttypus, ebenso der zweite und fünfte zu einem zweiten Haupttypus zusammen, während der dritte und vierte je für sich einen Haupttypus konstituiren. Wir haben also bei zwei Bestimmungselementen *sechs* Typen und *vier* Haupttyen.

Nachdem dies erledigt, nehmen wir die analoge Aufgabe bei der Gruppe aus *drei* unabhängigen Bestimmungselementen: $G(a, b, c)$, in Angriff. Und zwar wollen wir die fragliche Anzahl der Typen und Haupttypen erst a priori ermitteln. Eine empirische Bestätigung der Ergebnisse wird sich nachträglich ergeben, indem wir die 256 Elemente der Gruppe in den einfachsten Ausdrucksformen, deren sie im identischen Kalkul fähig scheinen, wirklich hinschreiben — was sich der mannigfachen Anwendungen halber, die von der Zusammenstellung gemacht werden können, verlohnen wird.

Numeriren wir in der Entwickelung der identischen Eins nach den Bestimmungselementen a, b, c:

$$1 = \underbrace{abc}_{1} + \underbrace{abc_1}_{2} + \underbrace{ab_1c}_{3} + \underbrace{ab_1c_1}_{4} + \underbrace{a_1bc}_{5} + \underbrace{a_1bc_1}_{6} + \underbrace{a_1b_1c}_{7} + \underbrace{a_1b_1c_1}_{8}$$

die acht Glieder kurz mit den darübergesetzten Ziffern, so erkennt man sogleich, dass unser Problem sich deckt mit der Aufgabe, die Anzahl der Arten zu ermitteln, auf welche an einem *Würfel* — mit wie nebenstehend numerirten Ecken — deren irgend welche ausgewählt werden können.

Genauer lässt dies sich in folgender Weise einsehen. Denken wir uns irgend eine Funktion $f(a, b, c, \cdots)$ von den „Argumenten" $a, b, c, \cdots$ nach diesen im Boole'schen Sinne entwickelt, so wird nach § 19 ein jeder „Konstituent" der Entwickelung sich darstellen als das Produkt der sämtlichen Argumentbuchstaben:

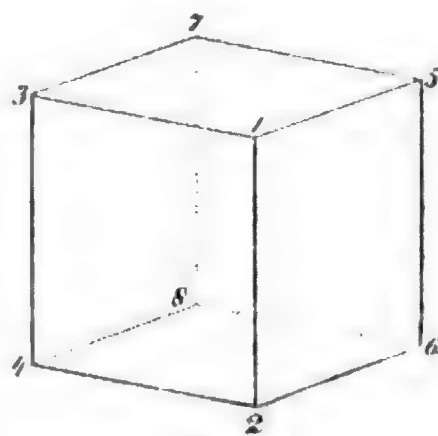


Fig. 37.

$$abc \cdots$$

— je *mit* oder aber *ohne* Negationsstrich genommen.

Und bei den Problemen der vorliegenden Gattung haben wir nur mit den Entwickelungen der identischen Eins zu thun, welche der Summe aller jener Konstituenten gleich ist.

Nach dem Gesagten muss ein jeder Konstituent in jeden andern (zu der nämlichen Entwickelung gehörigen) sich überführen lassen lediglich dadurch, dass man gewisse Argumentbuchstaben in ihre Negationen verwandelt. Vergleichen wir irgend zweie dieser Konstituenten mit einander, so lassen dieselben sich jedenfalls dadurch in einander überführen, dass man diejenigen Argumentbuchstaben ungeändert lässt, welche in beiden Konstituenten übereinstimmend vorkommen, nämlich entweder beidemal positiv (unnegirt), oder aber beidemal negativ (mit Negationsstrich versehen) erscheinen, *dass man* dagegen diejenigen *Argumente mit ihren Negationen vertauscht,* welche in beide Konstituenten in verschiedener Weise als Faktor eingehen, nämlich im einen — gleichviel welchem von beiden — unnegirt, im andern negirt auftreten.

Mit Clifford (siehe weiter unten) kann man passend *„Abstand"* der beiden in Vergleichung zu ziehenden Konstituenten nennen: die Anzahl der Argumentbuchstaben, welche dergestalt behufs Überführung des einen Konstituenten in den andern zu vertauschen sind mit ihren Negationen.

So werden beispielsweise die beiden Konstituenten

$$abcd \quad \text{und} \quad ab_1cd$$

den Abstand 1 besitzen, weil es erforderlich und ausreichend ist, das *eine* Argument b mit seiner Negation b_1 zu vertauschen, um aus dem einen von ihnen den andern abzuleiten.

Die Konstituenten a_1bcd und ab_1cd dagegen haben den Abstand 2, weil zu diesem Zwecke die *beiden* Argumente a und b mit ihren Negationen a_1 und b_1 vertauscht werden müssen.

Die Konstituenten ab_1cd_1 und $a_1b_1c_1d$ haben den Abstand 3, etc.

Ein jeder Konstituent besitzt von sich selbst oder einem ihm identisch gleichen (wie z. B. a_1b_1cd von a_1b_1cd) den Abstand 0.

Nach den Erörterungen besitzt ein Konstituent A von einem andern B denselben Abstand, wie der andere B vom ersten A.

Untersucht man nun beim oben vorliegenden Probleme, wie sich ein Konstituent oder Glied unserer Entwickelung, z. B. das erste 1 oder abc als *„Ursprung"* zu den übrigen Gliedern in Hinsicht seines „Abstandes" von denselben verhält, so bemerkt man, dass es zu dem Ursprung drei Glieder (Konstituenten) gibt, welche den Abstand 1 von ihm besitzen, und die man darum passend als die dem Ursprung „benachbarten" oder *„anliegenden"* Glieder wird bezeichnen können. Drei andere von den 7 übrigen Gliedern haben von ihm den Abstand 2, und sollen die dem Ursprung *„abliegenden"* Glieder heissen. Das letzte noch übrige Glied hat von dem Ursprung den grössten hier vorkommenden, nämlich den Abstand 3, und mag das denselben *„gegenüberliegende"* oder der „Gegenkonstituent" des Ursprungs genannt werden.

Für den eben gewählten Ursprung versinnlicht diesen Sachverhalt die Figur:

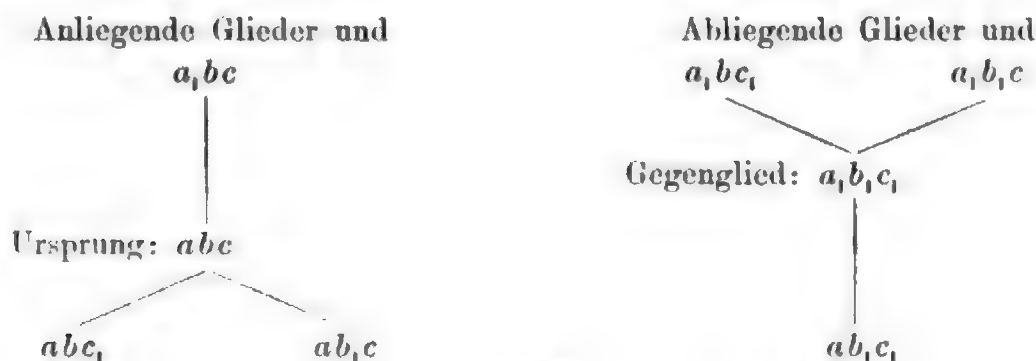


Fig. 38.

Während Ursprung und Gegenglied ungeändert bleiben (festgehalten werden), können, durch blosse Vertauschungen unter den Argumenten a, b, c selbst, die drei anliegenden Glieder ineinander übergeführt werden, desgleichen die drei abliegenden.

Ganz ebenso verhält sich nun die Würfelecke 1 zu den drei ihr benachbarten 2, 3 und 5, nebst den ihr abliegenden Ecken 4, 6 und 7 und ihrer Gegenecke 8 — wofern die Abstände entlang dem Kantensystem des Würfels gemessen werden.

Und wie die Würfelecken als gleichwertig zu gelten haben, indem man jede Ecke in die Lage jeder andern bringen kann, ohne dass der Würfel aufhört mit sich selbst zusammenzufallen, so kann man auch durch blosse Vertauschungen von Argumenten a, b oder c mit ihren Negationen (sowie auch von jenen unter sich) die ganze Konstituentensumme so in sich selber transformiren, dass irgend zwei verlangte Glieder derselben den Platz gewechselt haben werden — sodass, was oben über den Ursprung abc in seinem Verhältniss zu den übrigen Gliedern gesagt ist, auch von jedem andern Gliede als Ursprung wird gelten müssen.

Um alle analytisch ausführbaren Transformationen der Konstituentensumme in sich selbst unter geometrischem Bilde erblicken zu können, wird man auch den „umgestülpten“ Würfel, das ist denjenigen Würfel, bei welchem die Ziffern aller Gegenecken ausgetauscht worden, für gleichwertig gelten zu lassen haben mit dem ursprünglichen Würfel, obwol er mit diesem nie zur Deckung mit allen gleichnamigen Ecken gebracht werden kann, demselben vielmehr nur „symmetrisch gleich“ sein wird.

Jene, die Konstituentensumme in sich selbst transformirenden Vertauschungen sind leicht zu ermitteln. Es sind vor allem die folgenden Produkte von „Transpositionen“, bei denen wir solche Buchstabenvertauschungen, die von selbst aus andern folgen, jeweils *unter* diese schreiben:

$$(a, a_1)(1, 5)(2, 6)(3, 7)(4, 8); \quad (b, b_1)(1, 3)(2, 4)(5, 7)(6, 8);$$

$$(c, c_1)(1, 2)(3, 4)(5, 6)(7, 8);$$

$$\begin{matrix}(a, b)(3, 5)(4, 6); & (a, c)(2, 5)(4, 7); & (b, c)(2, 3)(6, 7)\\ (a_1, b_1) & (a_1, c_1) & (b_1, c_1)\end{matrix}$$

Aus diesen schon würden sich die folgenden Vertauschungen nach den Multiplikationsregeln der „Substitutionen“theorie ableiten lassen, gleichwie sie direkt sich ergeben:

$$\begin{matrix}(a, b, c)(2, 5, 3)(4, 6, 7); & (a, c, b)(2, 3, 5)(4, 7, 6)\\ (a_1, b_1, c_1) & (a_1, c_1, b_1)\end{matrix}$$

$$(a, a_1)(b, b_1)(1, 7)(2, 8)(3, 5)(4, 6); \quad (a, a_1)(c, c_1)(1, 6)(2, 5)(3, 8)(4, 7);$$

$$(b, b_1)(c, c_1)(1, 4)(2, 3)(5, 8)(6, 7);$$

$$(a, a_1)(b, b_1)(c, c_1)(1, 8)(2, 7)(3, 6)(4, 5);$$

$$\begin{matrix}(a, b_1)(1, 7)(2, 8); & (a, c_1)(1, 6)(3, 8); & (b, c_1)(1, 4)(5, 8);\\ (a_1, b) & (a_1, c) & (b_1, c)\end{matrix}$$

$(a,a_1)\genfrac{}{}{0pt}{}{(b,c_1)}{(b_1,c)}(1,8)(2,6)(3,7)(4,5)$; $(b,b_1)\genfrac{}{}{0pt}{}{(a,c_1)}{(a_1,c)}(1,8)(2,4)(3,6)(5,7)$;

$(c,c_1)\genfrac{}{}{0pt}{}{(a,b_1)}{(a_1,b)}(1,8)(2,7)(3,4)(5,6)$;

$\genfrac{}{}{0pt}{}{(a,b,c_1)}{(a_1,b_1,c)}(1,6,4)(3,5,8)$; $\genfrac{}{}{0pt}{}{(a,b_1,c)}{(a_1,b,c_1)}(1,4,7)(2,8,5)$; $\genfrac{}{}{0pt}{}{(a,b_1,c_1)}{(a_1,b,c)}(1,7,6)(2,3,8)$;

— desgleichen in den drei letzten Vertauschungen die Cyklen sämtlich rückwärts gelesen, beziehungsweise die beiden letzten Elemente in denselben durchweg vertauscht.

Da es nun bequemer ist, sich von der geometrischen Anschauung des Würfels leiten zu lassen, als derartige Zeichenvertauschungen vorzunehmen, so wollen wir die uns obliegende kombinatorische Untersuchung jetzt am geometrischen Bilde ausführen.

Wir haben entweder *keine* Aushebung: dies gibt den ersten Typus welcher der nichtssagenden Aussage entspricht und das Element 0 der Gruppe $G(a, b, c)$ liefert.

Oder wir haben *eine* Aushebung, indem wir als Element der Gruppe irgend ein Glied, einen Konstituenten jener achtgliedrigen Summe, oder also eine Ecke des Würfels nehmen — einer von Jevons und Clifford so genannten „einfaltigen" Aussage („one-fold statement") entsprechend. Dies gibt den zweiten Typus mit den 8 Repräsentanten oder Formen (als Elementen der Gruppe):

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Oder wir haben *zwei* Aushebungen, indem wir zwei Ecken des Würfels nehmen, entsprechend zweien Konstituenten, welche additiv vereinigt zu denken sind zu einem Ausdrucke, als einem Elemente der Gruppe, oder als dem Polynom einer (rechts auf 0 gebrachten) Aussage, die als eine „zwiefältige" oder „zweifache" (twofold statement) bezeichnet werden dürfte.

Zwei Ecken des Würfels lassen nun aber auf *drei*erlei Weisen sich auswählen.

Beginnen wir jedesmal mit der Ecke 1, so kann die zweite Ecke entweder eine ihr benachbarte (*anliegende*) Ecke sein, d. h. eine von den dreien 2, 3, 5 und dann gleichviel welche, oder eine *abliegende*, d. h. 4, 6 oder 7, oder die gegenüberliegende, somit 8. Dies gibt für die drei folgenden Typen, bei denen die verbundenen (kombinirten) Ecken entweder Endpunkte *einer* Kante, oder Gegenecken *einer* Seitenfläche des Würfels oder endlich Gegenecken des Würfels selbst sind:

Dritter Typus mit den 12 Repräsentanten (wenn wir Raumersparniss halber die Pluszeichen jeweils unterdrücken, welche die Ziffern einer jeden Kombination eigentlich verbinden sollten):

12, 34, 56, 78, 13, 24, 57, 68, 15, 26, 37, 48.

Vierter Typus mit den 12 Repräsentanten:

14, 23, 58, 67, 16, 25, 38, 47, 17, 35, 28, 46.

Fünfter Typus mit den 4 Repräsentanten:

18, 27, 36, 45.

Oder wir haben *drei* Aushebungen („threefold“ statement) Auch diese lassen sich auf drei Arten bewerkstelligen und liefern *drei* weitere Typen.

Entweder nämlich: zwei von den drei auszuhebenden Ecken sind benachbarte; dann mögen wir 1 und 2 als diese nehmen. Alsdann kann auch die dritte auszuhebende Ecke einer von diesen beiden benachbart sein (aber nicht beiden zugleich, weil sonst der Würfel ein Dreieck zur Seitenfläche haben müsste), gleichviel welcher — wie z. B. 3 der 1, und die drei Ecken bestimmen eine rechtwinklig gebrochene Linie: 213, ein „Knie“; dies gibt den

Sechsten Typus mit den 24 Repräsentanten:

312, 124, 243, 431, 657, 578, 786, 865,

215, 156, 562, 621, 734, 348, 487, 873,

513, 137, 375, 751, 426, 268, 684, 842.

Andernfalles wird die dritte neben 1 und 2 auszuwählende Ecke keiner von diesen beiden benachbart sein; dann fallen die Ecken 3, 4, 5, 6 ausser Betracht, und kann jene nur einer von den beiden Endpunkten 7 und 8 der Gegenkante von 12 sein, gleichviel welcher von diesen. Diese Aushebung verknüpft also die Endpunkte einer Kante je mit einem Endpunkt ihrer Gegenkante und gibt den

Siebenten Typus mit den 24 Repräsentanten:

127, 128, 781, 782, 345, 346, 563, 564,

136, 138, 681, 683, 245, 247, 572, 574,

154, 158, 481, 485, 263, 267, 372, 376.

Oder unter den auszuhebenden Ecken sind keine zwei benachbarte. Beginnen wir mit 1, so werden also die drei anliegenden 2, 3 und 5 zu verwerfen sein. Nun kann aber auch die Gegenecke 8 nicht genommen werden, weil dieser die drei noch übrigen Ecken 4, 6 und 7 benachbart sind und dann keine nicht benachbarte Ecke mehr vorhanden wäre, die für die dritte sich nehmen liesse. Folglich müssen in diesem Falle die *beiden* andern Ecken unter den der ersten abliegenden 4, 7, 8 ausgewählt werden, gleichviel auf welche Weise. Wie 147 bestimmen dann die gewählten Ecken ein gleichseitiges Dreieck, welches von Diagonalen dreier Seitenflächen des Würfels gebildet wird, und auf welchem als Grundfläche je eine Ecke des Würfels pyramidenförmig steht. Dies ist der

Achte Typus mit den 8 Repräsentanten:

523, 641, 714, 832, 176, 258, 385, 467. —

Da hiermit bei drei Aushebungen alle Möglichkeiten erschöpft wurden, so haben wir überzugehen zu dem Falle, wo *vier* Aushebungen gemacht werden. Es wird sich herausstellen, dass diese auf *sechs*erlei Arten geschehen können.

Erster Unterfall: Drei von den vier auszuwählenden Ecken bilden die Figur des rechten Winkels (das Knie, wie 213 etc. beim sechsten Typus), sodass zwei von ihnen der von uns in die Mitte gesetzten dritten benachbart sind. Alsdann kann die vierte Ecke einer von diesen dreien benachbart sein, oder nicht.

Ist sie der bevorzugten oder mittleren Ecke benachbart, so erweist sie sich als vollkommen bestimmt. Weil nämlich von den drei derselben benachbarten Ecken schon zwei ausgehoben sind, muss sie die dritte sein. Die vier gewählten Ecken bestimmen dann ein Dreikant (einen Dreifuss); ihr System besteht aus einer Ecke des Würfels mitnebst den Endpunkten der drei in ihr zusammenstossenden Kanten. Dies ist der

Neunte Typus mit den 8 Repräsentanten:

1523, 2641, 3714, 4832, 5176, 6258, 7385, 8467.

Ist die vierte Ecke aber einer von den beiden andern benachbart, mithin bei 213 der 2 oder der 3, so kann sie entweder demselben durch die bisherigen drei Ecken bestimmten Seitenquadrate als dessen vierte Ecke angehören, oder, wenn diesem nicht, so sicher dem gegenüberliegenden. Im ersten Falle sind die gewählten vier Ecken diejenigen einer quadratischen Seitenfläche des Würfels; sie bestimmen dann auf vier Arten jene zweiteilig im rechten Winkel gebrochene Linie (ein Knie), sowie eine dreiteilig in Hufeisenform gebrochene Linie. Dies gibt den

Zehnten Typus mit den 6 Repräsentanten:

1243, 5786, 1562, 3487, 1375, 2684.

Im andern Falle muss die zu 213 hinzu zu wählende vierte Ecke entweder 6 oder 7 sein (weil 5, als der mittleren benachbart, schon unter dem neunten Typus berücksichtigt ist, und 8 zu keiner von den dreien benachbart). Die vier Ecken, wie 6213, bestimmen jetzt eine windschiefe dreiteilig gebrochene Linie (windschiefes Doppelknie) und haben wir den

Elften Typus mit den 24 Repräsentanten:

3126, 5124, 1348, 7342, 1568, 7562, 3786, 5784,

2137, 5134, 1248, 6243, 1578, 6573, 2687, 5684,

2157, 3156, 1268, 4265, 1378, 4375, 2487, 3486.

Bleibt der Fall zu erledigen, wo die vierte Ecke keiner von den drei ein Knie 312 bildenden benachbart ist.

Als vierte werden dann also auszuschliessen sein die Ecken 4, 5, 6 und 7, sodass als einzig zulässige 8 geblieben. Die vier erwählten Ecken erscheinen als diejenigen an einem rechtwinkligen Knie in Verbindung mit der Gegenecke seines Scheitels und haben wir den

Zwölften Typus mit den 24 Repräsentanten:

3128, 1247, 2435, 4316, 6574, 5782, 7861, 8653,
2158, 1564, 5623, 6217, 7346, 3485, 4871, 8732,
5138, 1376, 3752, 7514, 4267, 2683, 6841, 8425.

Hiermit sind die Fälle abgethan, bei denen eine erwählte Ecke zwei andern erwählten benachbart ist, also drei von den vier zu erwählenden Ecken in der Lage wie beim sechsten Typus zu einander stehen; denn das von diesen dreien gebildete Knie könnte man immer für 213 im obigen Räsonnement eintreten lassen, welches in allen seinen möglichen Kombinationen bereits aufgeführt worden. Sollen Wiederholungen vermieden werden, so ist also fortan solcher Fall nicht mehr zuzulassen.

Bleibt der Unterfall zu erledigen, wo drei von den vier erwählten Ecken in der Lage wie beim siebenten Typus sich zu einander befinden — wie z. B. 127. In diesem Falle sind 3, 4, 5, 6 als zu 1 oder 2 benachbart nach dem soeben gesagten zu verwerfen, und bleibt blos 8 als vierte zulässige Ecke übrig. Die vier erwählten Punkte bilden jetzt die Ecken von einem der rechteckigen Diagonalquerschnitte des Würfels, und haben wir den

Dreizehnten Typus mit den 6 Repräsentanten:

1278, 3456, 1368, 2457, 1548, 2637.

Bleibt als letzter noch der Unterfall zu erledigen, wo drei von den vier auszuhebenden Ecken die Figur des achten Typus miteinander bilden. Und zwar wird auch die vierte Ecke mit je zweien der drei erwähnten nur diese Figur des achten Typus eingehen dürfen, weil andernfalles (wenn nämlich eine Konfiguration des siebten oder sechsten Typus dabei mit unterliefe) die Aushebungsweise schon im Bisherigen abgethan sein müsste. Insbesondere dürfen sonach benachbarte Ecken jetzt überhaupt nicht mehr vorkommen.

Gehen wir von der Aushebung der Ecken 235 aus, so sind 1, 4, 6 und 7 als einer (oder mehreren) von den drei erwählten Ecken benachbart, zu verwerfen und bleibt nur mehr 8 als vierte zulässige Ecke übrig. Die vier zu erwählenden Ecken sind jetzt durchweg von einander abliegende und bilden das System der Ecken von einem der beiden regelmässigen (dem Würfel einschreibbaren) Tetraeder. Wir haben somit als letzten Typus dieser Aushebung den

Vierzehnten Typus mit den zwei Repräsentanten:

1476, 2358. —

Nunmehr auch die Fälle von 5, 6, 7 und 8 Aushebungen durchzugehen ist nicht erforderlich, weil hierbei gerade die Ecken auszuheben sein werden, die bei den ersten vier Aushebungen (diese in umgekehrter Reihenfolge genommen) bezüglich zurückgelassen wurden. Die Typen von jenen Aushebungen sind zu denen von diesen bezüglich komplementär. Insbesondere werden (die) 8 Aushebungen liefern: das Element 1 der Gruppe $G(a,b,c)$,

als einzigen Repräsentanten des letzten Typus derselben — entsprechend der absurden Aussage: $1 = 0$.

Wir müssen demnach im Ganzen haben entsprechend je

$$0,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad 5,\quad 6,\quad 7,\quad 8 \text{ Aushebungen:}$$
$$1 + 1 + 3 + 3 + 6 + 3 + 3 + 1 + 1 = 22 \textit{ Typen}$$

von Elementen der Gruppe $G(a,b,c)$, mithin so viele Arten von Ausdrücken, welche aus a, b und c mittelst der drei Spezies aufgebaut werden können.

Und diese Typen konstituiren zusammen:

$$1 + 1 + 3 + 3 + 6 = 14 \textit{ Haupttypen}$$

zu welchen sich je die von Anfang und Ende der obigen Reihe gleichweit abstehenden Typen bezüglich zusammenthun. —

Wir wollen nunmehr von jedem Typus einen Repräsentanten wirklich anschreiben, um denselben auf seine einfachste Gestalt oder bequemste Ausdrucksform im identischen Kalkul zu bringen. Es repräsentirt den

1. Typus: 0; 2. Typus: $1 = abc$; 3. Typus: $1 + 2 = abc + abc_1 = ab$;

4. Typus: $1 + 4 = abc + ab_1c_1 = a\,(bc + b_1c_1)$;

5. Typus: $1 + 8 = abc + a_1b_1c_1$;

6. Typus: $1 + 2 + 3 = abc + abc_1 + a_1bc = a\,(b + c)$;

7. Typus: $1 + 2 + 7 = abc + abc_1 + a_1b_1c = ab + a_1b_1c$;

8. Typus: $2 + 3 + 5 = abc_1 + ab_1c + a_1bc = a\,(bc_1 + b_1c) + a_1bc$;

die geringfügige Vereinfachung findet hier jedoch auf Kosten, unter Verhüllung der Symmetrie statt.

9. Typus: $1 + 2 + 3 + 5 = abc + abc_1 + ab_1c + a_1bc =$
$= a\,(bc_1 + b_1c) + bc = a\,(b + c) + a_1bc = a(b + c) + bc = ab + ac + bc$;

10. Typus: $1 + 2 + 3 + 4 = abc + abc_1 + ab_1c + ab_1c_1 = a$;

11. Typus: $1 + 2 + 3 + 6 = abc + abc_1 + ab_1c + a_1bc_1 =$
$= a\,(b + c) + a_1bc_1 = ac + bc_1$;

12. Typus: $1 + 2 + 3 + 8 = abc + abc_1 + ab_1c + a_1b_1c_1 = a(b + c) + a_1b_1c_1$;

13. Typus: $1 + 2 + 7 + 8 = abc + abc_1 + a_1b_1c + a_1b_1c_1 = ab + a_1b_1$;

14. Typus: $1 + 4 + 6 + 7 = abc + ab_1c_1 + a_1bc_1 + a_1b_1c =$
$= a(bc + b_1c_1) + a_1(bc_1 + b_1c) = b(ac + a_1c_1) + b_1\,(ac_1 + a_1c) =$
$= c\,(ab + a_1b_1) + c_1\,(ab_1 + a_1b)$;

15. Typus (komplementär zum 8. Typus): $1 + 4 + 6 + 7 + 8 =$
$= abc + ab_1c_1 + a_1bc_1 + a_1b_1c + a_1b_1c_1 = abc + b_1c_1 + a_1\,(b_1 + c_1) =$
$= (a + b_1 + c_1)\,(a_1 + b + c_1)\,(a_1 + b_1 + c) = abc + a_1b_1 + a_1c_1 + b_1c_1$;

16. Typus (kompl. zum 7. Typ.): $3 + 4 + 5 + 6 + 8 =$

$$= ab_1c + ab_1c_1 + a_1bc + a_1bc_1 + a_1b_1c_1 = ab_1 + a_1b + (a_1 + b_1)c_1 =$$
$$= ab_1 + a_1b + a_1c_1 = ab_1 + a_1b + b_1c_1 = ab_1 + a_1(b + c_1) =$$
$$= (a + c_1)b_1 + a_1b = ab_1 + a_1b + a_1b_1c_1;$$

17. Typus (kompl. zum 6. Typ.): $4 + 5 + 6 + 7 + 8 =$

$$= ab_1c_1 + a_1bc + a_1bc_1 + a_1b_1c + a_1b_1c_1 = b_1c_1 + a_1;$$

18. Typus (kompl. zum 5. Typ.): $2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 =$

$$= abc_1 + ab_1c + ab_1c_1 + a_1bc + a_1bc_1 + a_1b_1c =$$
$$= ab_1 + bc_1 + ca_1 = ac_1 + cb_1 + ba_1 = (a + b + c)(a_1 + b_1 + c_1);$$

19. Typus (kompl. zum 4. Typ.): $2 + 3 + 5 + 6 + 7 + 8 =$

$$= abc_1 + ab_1c + a_1bc + a_1bc_1 + a_1b_1c + a_1b_1c_1 = bc_1 + b_1c + a_1;$$

20. Typus (kompl. zum 3. Typ.): $3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 =$

$$= ab_1c + ab_1c_1 + a_1bc + a_1bc_1 + a_1b_1c + a_1b_1c_1 = a_1 + b_1;$$

21. Typus (kompl. zum 2. Typ.): $2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 =$

$$= abc_1 + ab_1c + ab_1c_1 + a_1bc + a_1bc_1 + a_1b_1c + a_1b_1c_1 = a_1 + b_1 + c_1;$$

22. Typus (kompl. zum 1. Typ.): $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 =$

$$= abc + abc_1 + ab_1c + ab_1c_1 + a_1bc + a_1bc_1 + a_1b_1c + a_1b_1c_1 = 1.$$

Die vorstehend von mir durchgeführte Untersuchung — ohne das geometrische Gewand, in das ich sie gekleidet, und ohne die Bezugnahme auf „Ausdrücke" sowie „Gruppen" — ist zuerst von Jevons in Angriff genommen, der sich die Frage vorlegte, wie vielerlei *„Aussagen"* (innerhalb der von uns charakterisirten Schranken) über drei Klassen a, b, c gemacht werden können. Jevons schreibt — freilich in ganz andrer Gestalt, als die oben gewonnene — die 256 rechts auf 0 gebrachten Aussagen wirklich hin ([9] p. 286 ... 289 cf. auch [8] p. 137 sqq.) — eine Zusammenstellung, die er als „the logical index" bezeichnet. Er ordnet diese Aussagen in verschiedene „Typen" ein, deren er aber (statt 22) nur 15 aufstellt. Die der übrigen zu klassifiziren verhindert ihn ein fundamentaler Irrtum, zufolge dessen er eine Aussage als eine sich selbst widersprechende (als „inconsistent") erklärt wenn sie das Verschwinden von einer der drei Klassen a, b, c, oder von einer ihrer Negationen a_1, b_1, c_1 involvirt. Mit Recht hebt Venn[1] p. 162 Fussnote hervor, dass was (auch von Jevons) bei abgeleiteten Symbolen, z. B. Produkten wie ab, etc. als zulässig erklärt wird, auch bei den ursprünglichen Symbolen nicht ausgeschlossen werden darf, dass aber die Einführung einer solchen Restriktion überhaupt (ein Verbot, leere oder verschwindende Klassen zur Sprache zu bringen) für die Logik ein geradezu selbstmörderisches Verfahren (suicidal) wäre.

Zu verwundern ist, dass Clifford, der wie nachher zu schildern, das analoge Problem für vier Symbole a, b, c, d gelöst, gleichwol die Jevons'sche Lösung des niedereren Problems (für dreie) nicht revidirt zu haben scheint.

Ist ein Ausdruck von einem der vorstehenden 22 Typen *gleich Null* zu setzen, so lässt sich die damit gegebene Aussage oft noch auf eine einfachere Gestalt bringen dadurch, dass man einzelne Glieder auf die andere Seite des Gleichheitszeichens wirft, oder auch die Gleichung in mehrere zerfällt, diese in Subsumtionen umschreibt, etc.

Wir kommen damit den von Jevons in seinem „logical index" gegebenen Formen der Aussage näher, werden diese aber meist an Einfachheit der Ausdrucksweise noch überbieten können, weil Jevons des Subsumtionszeichens noch entbehrte und die Einordnung $a \subseteq b$ zum Beispiel durch die Gleichung $a = ab$ auszudrücken genötigt war.

Wenn wir uns genau an die oben vorgeführten Typus-Repräsentanten halten, so ergeben auf die angeführte Weise in der That sich leicht die folgenden Aussagen zum

1. Typ. $0 = 0$ (identische Aussage);
2. Typ. $abc = 0$ oder unsymmetrisch $ab \subseteq c_1$, oder auch $a \subseteq b_1 + c_1$;
3. Typ. $ab = 0$ oder $a \subseteq b_1$;
4. Typ. $abc = 0$ und $a \subseteq b + c$; oder $ab = ac_1$ oder $ab_1 = ac$;
5. Typ. $abc = 0$ und $a_1 b_1 c_1 = 0$ (oder $1 \subseteq a + b + c$);
6. Typ. $ab = 0$ und $ac = 0$; oder $a \subseteq b_1 c_1$;
7. Typ. $ab = 0$, $c \subseteq a + b$;
8. Typ. $ab \subseteq c$, $ac \subseteq b$, $bc \subseteq a$; oder $bc \subseteq a \subseteq bc + b_1 c_1$;
9. Typ. $ab = 0$, $ac = 0$, $bc = 0$;
10. Typ. $a = 0$;
11. Typ. $ac = 0$, $b \subseteq c$.
12. Typ. $ab = 0$, $ac = 0$, $1 \subseteq a + b + c$;
13. Typ. $ab = 0$ und $1 \subseteq a + b$, oder: $a = b_1$ oder $a_1 = b$;
14. Typ. $abc = 0$, $a \subseteq b + c$, $b \subseteq a + c$, $c \subseteq a + b$, oder $ab = ac_1$, $a_1 b = a_1 c$, oder etc.
15. Typ. $abc = 0$, $1 \subseteq ab + ac + bc$;
16. Typ. $a = b$ und $1 \subseteq a + b + c$ (oder $1 \subseteq a + c$);
17. Typ. $1 \subseteq a$, $1 \subseteq b + c$;
18. Typ. $a = b = c$;
19. Typ. $1 \subseteq a$, $b = c$;
20. Typ. $1 \subseteq a = b$;
21. Typ. $1 \subseteq a = b = c$;
22. Typ. $1 = 0$ (absurde Aussage).

Die Gruppe $G(a, b, c)$ besteht hienach aus folgenden 256 Elementen:

1. Typus: 0; 22. Typus: 1;

2. Typus:

$$abc,\ abc_1,\ ab_1c,\ ab_1c_1,\ a_1bc,\ a_1bc_1,\ a_1b_1c,\ a_1b_1c_1.$$

21. Typus:

$$a_1+b_1+c_1,\ a_1+b_1+c,\ a_1+b+c_1,\ a_1+b+c,\ a+b_1+c_1,\ a+b_1+c,\ a+b+c_1,\ a+b+c.$$

3. Typus:

$$ab,\ ab_1,\ a_1b,\ a_1b_1,\ ac,\ ac_1,\ a_1c,\ a_1c_1,\ bc,\ bc_1,\ b_1c,\ b_1c_1.$$

20. Typus:

$$a_1+b_1,\ a_1+b,\ a+b_1,\ a+b,\ a_1+c_1,\ a_1+c,\ a+c_1,\ a+c,\ b_1+c_1,\ b_1+c,\ b+c_1,\ b+c.$$

4. Typus:

$$a(bc+b_1c_1),\quad a(bc_1+b_1c),\quad a_1(bc+b_1c_1),\quad a_1(bc_1+b_1c),$$
$$b(ac+a_1c_1),\quad b(ac_1+a_1c),\quad b_1(ac+a_1c_1),\quad b_1(ac_1+a_1c),$$
$$(ab+a_1b_1)c,\quad (ab_1+a_1b)c,\quad (ab+a_1b_1)c_1,\quad (ab_1+a_1b)c_1.$$

19. Typus:

$$a_1+bc_1+b_1c,\quad a_1+bc+b_1c_1,\quad a+bc_1+b_1c,\quad a+bc+b_1c_1,$$
$$b_1+ac_1+a_1c,\quad b_1+ac+a_1c_1,\quad b+ac_1+a_1c,\quad b+ac+a_1c_1,$$
$$ab_1+a_1b+c_1,\quad ab+a_1b_1+c_1,\quad ab_1+a_1b+c,\quad ab+a_1b_1+c.$$

5. Typus:

$$abc+a_1b_1c_1,\quad abc_1+a_1b_1c,\quad ab_1c+a_1bc_1,\quad ab_1c_1+a_1bc.$$

18. Typus:

$$(a+b+c)(a_1+b_1+c_1),\ (a+b+c_1)(a_1+b_1+c),\ (a+b_1+c)(a_1+b+c_1),\ (a+b_1+c_1)(a_1+b+c)$$

$$\left\{\begin{array}{lllll} \text{oder:} & ab_1+bc_1+ca_1, & ab_1+a_1c_1+bc, & ab+a_1c+b_1c_1, & ac+a_1b_1+bc_1 \\ \text{oder:} & ac_1+cb_1+ba_1, & ac+a_1b+b_1c_1, & ac_1+a_1b_1+bc, & ab+a_1c_1+b_1c. \end{array}\right\}$$

6. Typus:

$$a(b+c),\ a(b+c_1),\ a(b_1+c_1),\ a(b_1+c),\ a_1(b+c),\ a_1(b_1+c),\ a_1(b_1+c_1),\ a_1(b+c_1),$$
$$b(a+c),\ b(a_1+c),\ b(a_1+c_1),\ b(a+c_1),\ b_1(a+c),\ b_1(a+c_1),\ b_1(a_1+c_1),\ b_1(a_1+c),$$
$$(a+b)c,\ (a+b_1)c,\ (a_1+b_1)c,\ (a_1+b)c,\ (a+b)c_1,\ (a_1+b)c_1,\ (a_1+b_1)c_1,\ (a+b_1)c_1.$$

17. Typus:

$$a_1+b_1c_1,\ a_1+b_1c,\ a_1+bc,\ a_1+bc_1,\ a+b_1c_1,\ a+bc_1,\ a+bc,\ a+b_1c,$$
$$b_1+a_1c_1,\ b_1+ac_1,\ b_1+ac,\ b_1+a_1c,\ b+a_1c_1,\ b+a_1c,\ b+ac,\ b+ac_1,$$
$$a_1b_1+c_1,\ a_1b+c_1,\ ab+c_1,\ ab_1+c_1,\ a_1b_1+c,\ ab_1+c,\ ab+c,\ a_1b+c.$$

7. Typus:

$ab + a_1b_1c$, $ab + a_1b_1c_1$, $abc + a_1b_1$, $abc_1 + a_1b_1$,
$ab_1 + a_1bc$, $ab_1 + a_1bc_1$, $ab_1c + a_1b$, $ab_1c_1 + a_1b$,
$ac + a_1bc_1$, $ac + a_1b_1c_1$, $abc + a_1c_1$, $ab_1c + a_1c_1$,
$ac_1 + a_1bc$, $ac_1 + a_1b_1c$, $abc_1 + a_1c$, $ab_1c_1 + a_1c$,
$ab_1c_1 + bc$, $a_1b_1c_1 + bc$, $abc + b_1c_1$, $a_1bc + b_1c_1$,
$ab_1c + bc_1$, $a_1b_1c + bc_1$, $abc_1 + b_1c$, $a_1bc_1 + b_1c$.

16. Typus:

$ab_1 + a_1b + a_1b_1c_1$, $ab_1 + a_1b + a_1b_1c$, $ab_1 + a_1b + abc_1$, $ab_1 + a_1b + abc$,
$ab + a_1b_1 + a_1bc_1$, $ab + a_1b_1 + a_1bc$, $ab + a_1b_1 + ab_1c_1$, $ab + a_1b_1 + ab_1c$,
$ac_1 + a_1c + a_1b_1c_1$, $ac_1 + a_1c + a_1bc_1$, $ac_1 + a_1c + ab_1c$, $ac_1 + a_1c + abc$,
$ac + a_1c_1 + a_1b_1c$, $ac + a_1c_1 + a_1bc$, $ac + a_1c_1 + ab_1c_1$, $ac + a_1c_1 + abc_1$,
$a_1b_1c_1 + bc_1 + b_1c$, $ab_1c_1 + bc_1 + b_1c$, $a_1bc + bc_1 + b_1c$, $abc + bc_1 + b_1c$,
$a_1b_1c + bc + b_1c_1$, $ab_1c + bc + b_1c_1$, $a_1bc_1 + bc + b_1c_1$, $abc_1 + bc + b_1c_1$

[in welchen Ausdrücken von dem ternären Gliede auch jeweils der eine, oder aber der andere von den beiden Faktoren unterdrückt werden darf, die in einem der übrigen mit ihm verbundenen Glieder vorkommen].

8. Typus:

$abc_1 + ab_1c + a_1bc$, $abc + (ab_1 + a_1b)c_1$, $abc + b_1(ac_1 + a_1c)$, $a(bc_1 + b_1c) + a_1b_1c_1$,
$abc + a_1(bc_1 + b_1c)$, $b(ac_1 + a_1c) + a_1b_1c_1$, $(ab_1 + a_1b)c + a_1b_1c_1$, $ab_1c_1 + a_1bc_1 + a_1b_1c$.

15. Typus:

$abc + a_1b_1 + a_1c_1 + b_1c_1$, $abc_1 + (a_1 + b_1)c + a_1b_1$, $ab_1c + b(a_1 + c_1) + a_1c_1$, $ab_1c_1 + a_1(b + c) + bc$,
$a(b_1 + c_1) + a_1bc + b_1c_1$, $a_1bc_1 + b_1(a + c) + ac$, $a_1b_1c + (a + b)c_1 + ab$, $ab + ac + bc + a_1b_1c_1$,
[oder: $(a + b_1 + c_1)(a_1 + b + c_1)(a_1 + b_1 + c)$, $(a + b_1 + c)(a_1 + b + c)(a_1 + b_1 + c_1)$, etc.]

---

9. Typus:

$ab + ac + bc$, $ab + (a + b)c_1$, $ac + b_1(a + c)$, $a(b_1 + c_1) + b_1c_1$,
$a_1(b + c) + bc$, $b(a_1 + c_1) + a_1c_1$, $(a_1 + b_1)c + a_1b_1$, $a_1b_1 + a_1c_1 + b_1c_1$.

10. Typus:

a, a_1, b, b_1, c, c_1.

11. Typus:

$ac + bc_1$, $ac_1 + bc$, $ac + b_1c_1$, $ac_1 + b_1c$, $a_1c_1 + bc$, $a_1c + bc_1$, $a_1c_1 + b_1c$, $a_1c + b_1c_1$,
$ab + b_1c$, $ab_1 + bc$, $ab + b_1c_1$, $ab_1 + bc_1$, $a_1b_1 + bc$, $a_1b + b_1c$, $a_1b_1 + bc_1$, $a_1b + b_1c_1$,
$ab + a_1c$, $ac + a_1b$, $ab + a_1c_1$, $ac_1 + a_1b$, $ac + a_1b_1$, $ab_1 + a_1c$, $ac_1 + a_1b_1$, $ab_1 + a_1c_1$.

12. Typus:

$a(b + c) + a_1b_1c_1$, $a(b + c_1) + a_1b_1c$, $a(b_1 + c_1) + a_1bc$, $a(b_1 + c) + a_1bc_1$,

$ab_1c_1 + a_1(b+c)$, $abc_1 + a_1(b_1+c)$, $abc + a_1(b_1+c_1)$, $ab_1c + a_1(b+c_1)$,
$b(a+c) + a_1b_1c_1$, $ab_1c_1 + b(a_1+c)$, $ab_1c + b(a_1+c_1)$, $b(a+c_1) + a_1b_1c$,
$b_1(a+c) + a_1bc_1$, $b_1(a+c_1) + a_1bc$, $abc + b_1(a_1+c_1)$, $abc_1 + b_1(a_1+c)$,
$(a+b)c + a_1b_1c_1$, $(a+b_1)c + a_1bc_1$, $abc_1 + (a_1+b_1)c$, $ab_1c_1 + (a_1+b)c$,
$(a+b)c_1 + a_1b_1c$, $ab_1c + (a_1+b)c_1$, $abc + (a_1+b_1)c_1$, $(a+b_1)c_1 + a_1bc$.

13. Typus:

$ab + a_1b_1$, $ab_1 + a_1b$, $ac + a_1c_1$, $ac_1 + a_1c$, $bc + b_1c_1$, $bc_1 + b_1c$.

14. Typus:

$a(bc + b_1c_1) + a_1(bc_1 + b_1c)$, $a(bc_1 + b_1c) + a_1(bc + b_1c_1)$.

Die Ausdrücke eines jeden Typus sind so geordnet, dass sie, wenn der Reihe nach gelesen, genau entsprechen den vorher zusammengestellten Aushebungen chiffrirter Würfelecken. Durch Vergleichung eines Ausdrucks mit der gleichstelligen Ziffernkombination unter dem gleichen Typus wird darnach auch sogleich ersichtlich, wie der erstere nach a, b, c entwickelt sich darstellen würde, z. B. der erste Ausdruck (Repräsentant) des elften Typus muss sein:

$$ac + bc_1 = 3 + 1 + 2 + 6 = 1 + 2 + 3 + 6 = abc + abc_1 + ab_1c + a_1bc_1.$$

Die Anzahl der Typen und Haupttypen in welche die $2^{16} = 65\,536$ Elemente der Gruppe $G(a, b, c, d)$ zerfallen, hat Clifford[3] bestimmt — vergl. auch eine hierauf bezügliche Bemerkung von Cayley[2].

Dabei ist es ihm um die Typenzahl der *Aussagen* zu thun, welche in simultanen universalen Urteilen über vier Klassen a, b, c, d abgegeben werden können (wenn also Alternativen zwischen solchen Urteilen ausgeschlossen bleiben, sodass nur die von uns später sogenannten einfachen oder monomischen Urteile in Betracht kommen werden).

Wir wollen über den Charakter und die Ergebnisse seiner mühsamen Untersuchung wenigstens kurz referiren, uns einige Zusatzbemerkungen gestattend.

Die 16 Glieder oder Konstituenten in der geordneten Entwickelung der identischen Eins nach den Argumenten a, b, c, d:

$$1 = abcd + abcd_1 + abc_1d + abc_1d_1 + ab_1cd + \cdots a_1b_1c_1d_1$$

wollen wir uns wieder mit den Zahlen 1, 2, 3, ... 16 der Reihe nach numerirt denken.

Was die Abstandsverhältnisse dieser 16 Konstituenten betrifft, so gibt es zu irgend einem derselben als „Ursprung" („origin") vier „an-

liegende" („proximates"), welche den Abstand 1 von ihm besitzen, sechs „mittelständige" („mediates"), die von ihm den Abstand 2 haben, vier „abliegende" („ultimates") mit dem Abstand 3, endlich einen „gegenüberliegenden" („obverse") mit dem Abstand 4 — so wie es für den Ursprung *abcd* das folgende Schema zu erkennen gibt:

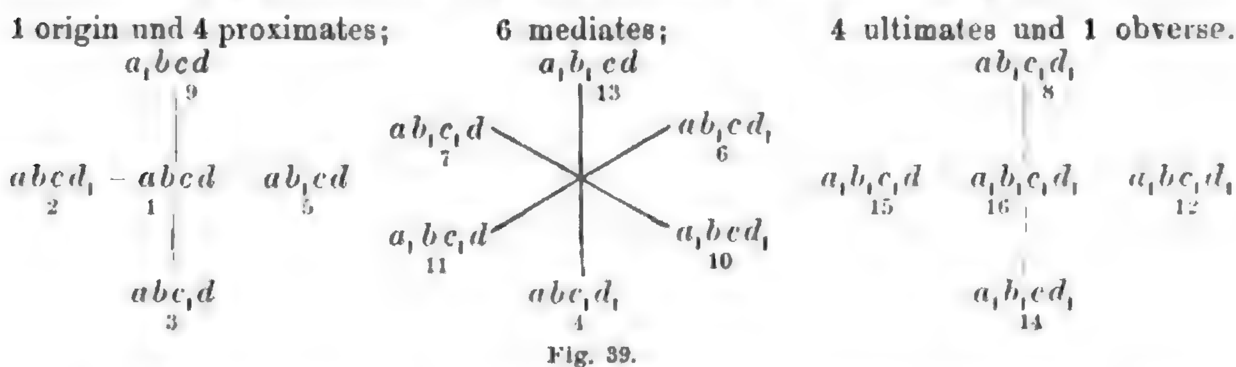


Fig. 39.

Die Frage ist: auf wie viele Arten irgendwieviele von diesen 16 Konstituenten ausgehoben und zu einer identischen Summe vereinigt, additiv kombinirt werden können, wenn man zu einerlei Art alle diejenigen Aushebungen rechnet, bei welchen die resultirenden Summen durch blosse Vertauschungen unter den Buchstaben $a, b, c, d, a_1, b_1, c_1, d_1$ auf einander zurückgeführt werden können.

Auch hier lässt das Problem sich unter geometrischem Bilde betrachten. Und zwar läuft es hinaus auf die Ermittelung der Anzahl der Arten, auf welche bei dem „*Analogon des Würfels in einer räumlichen Mannigfaltigkeit von vier Dimensionen*" sich Ecken auswählen lassen. Um zunächst für dieses Gebilde einen geeigneten Namen zu gewinnen, möge man bedenken, dass auch zutreffend bezeichnet werden könnte

die Strecke als *Zweieck*
das Quadrat „ (reguläres) *Vierstreck* (Vierseit)
der Würfel, Kubus „ „ *Sechsquadrat* (Hexaeder)

— indem in dem ohnehin für letztern gebräuchlichen Namen „Sechsflach" (Hexa-hedron) nur zufällig nicht ausgedrückt erscheint, dass jede Seitenfläche ein Quadrat sein solle.

Für jenes fragliche vierdimensionale Gebilde bietet demnach ungezwungen der Name „Achtwürfel" „Oktokub" oder

(reguläres) „*Achtzell*"

sich dar. Dieses Achtzell ist in der That zu denken als ein vierdimensionales (hyper-)räumliches Gebiet, welches begrenzt ist von acht Würfeln, von denen immer viere in einer Ecke der Figur zusammenstossen und zu je zweien eine quadratische Seitenfläche gemein haben.

Man kann das Gebilde ganz gut auch in unserm (dreidimensionalen) Raume veranschaulichen — sei es durch seine Projektion in den letztern, wo die Würfel sich als Rhomboeder darstellen, sei es auf eine Weise, die ich jetzt beschreiben will.

Schon das Quadrat kann selber (ich meine nicht eine Projektion desselben) mit seinen vier Ecken in eine gerade Linie eingezeichnet werden,

desgleichen der Würfel mit seinem Ecken- und Kantensystem in eine Ebene, wofern man nur sich gestattet, einzelne Seiten resp. Kanten desselben zu verbiegen, dieselben kürzend oder dehnend. Für das Quadrat soll dies Fig. 40, für den Würfel Fig. 41 erläutern; in beiden haben wir auch die Nummern der Ecken eingetragen (bezogen auf die Glieder unsrer Entwickelung der identischen Eins nach a, b resp. a, b, c).



Fig. 40.

Zwei Seiten des Quadrates sowie zwei Seitenflächen des Würfels erblickt man unverzerrt.

Nichts hinderte, beim Quadrat die beiden andern Seiten geradlinig anzunehmen; jedoch geschähe dies auf Kosten der Übersichtlichkeit, indem die vier Seiten dann in- und übereinander fallen würden. Nun kann man aber doch von den Verzerrungen absehen, und deren ungeachtet die Seiten resp. Kanten für gleichwertig gelten lassen. Indem man die Quadratseiten den Deformationen geschmeidig folgen lässt, kann man z. B. auch in der Anschauung das soit-disant „Quadrat“ Fig. 40 in sich selbst herumschwingen, sodass die Ecke 1 nach 2, 2 nach 4, 4 nach 3 und 3 nach 1 rückt. Ebenso kann man den — sit venia verbo! — „Würfel“ Fig. 41 in sich selbst verschieben, sodass er stets mit seiner Anfangslage in Deckung bleibt, aber z. B. die Ecken 3, 1 nach 4, 2, die 4, 2 nach 8, 6, letztere nach 7, 5 und diese nach 3, 1 rücken, etc. Kurz man kann alle am wirklichen Quadrat resp. Würfel ausführbaren Prozesse oder Operationen im Geiste auch zur Ausführung bringen an den vorstehenden Abbildern dieser Gebilde, welche eine Dimension weniger als das Gebilde selbst besitzen und — nach Analogie eines Herbariums — füglich als „gepresstes“ Quadrat, „*gepresster*“ Würfel zu bezeichnen wären.

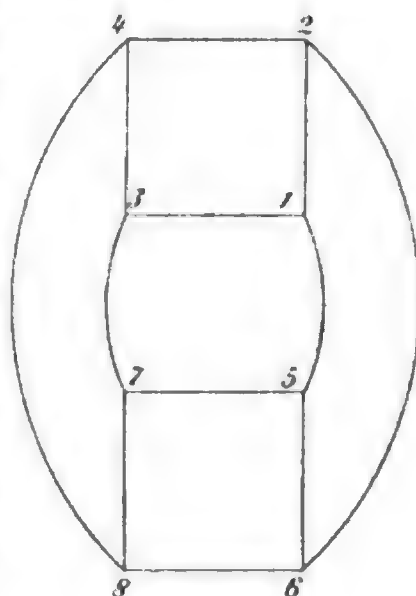


Fig. 41.

Analog bietet nun der vierdimensionale Oktokub *im dreidimensional gepressten Zustande* (gepresst natürlich unter Verbiegung und Zerrung von einzelnen seiner Kanten) sich in einer Gestalt dar, die wir nebenstehend in einer annähernd perspektiven, nämlich orthogonalen Projektion in der Ebene der Zeichnung darstellen, die 16 Nummern an die Ecken setzend.

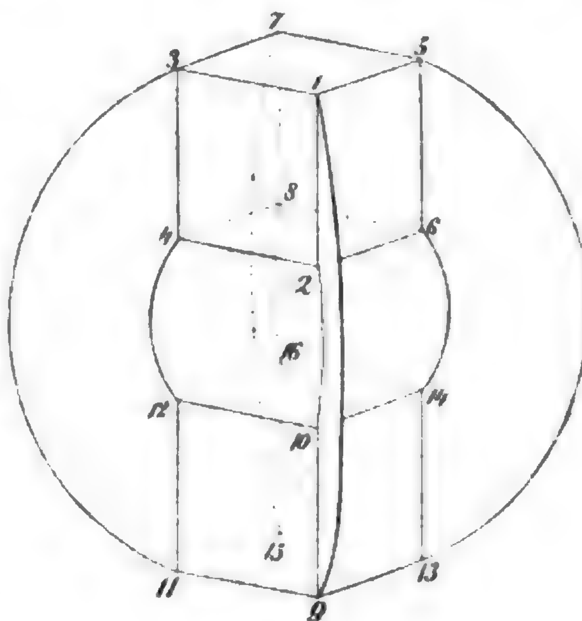


Fig. 42.

Vier von den Würfeln haben, wie man sieht, jetzt eine wiegenförmige Gestalt gewonnen, welche an gewisse

viersitzige Kinderschaukeln erinnert; zwei von den Würfeln sind unverzerrt geblieben; zwischen diesen erscheint einer als der Kern der ganzen Figur in unserem Raume; der letzte von den Würfeln ist diese ganze Figur selbst, und schliesst die sieben vorerwähnten in sich, ist aber gleichwol als mit einem jeden derselben gleichwertig anzusehen.

Das Gebilde hat 32 Kanten, von welchen immer viere in einer von den 16 Ecken zusammenstossen. Je dreie von solchen 4 von einer Ecke ausgehenden Kanten bestimmen einen „Würfel" und von den vier so bestimmten Würfeln (von welchen ebenfalls zu sagen sein wird, dass sie in dieser Ecke zusammenstossen) haben je zweie wieder *eine* Seitenfläche miteinander gemein, sodass auch sechs „quadratische Seitenflächen in jeder Ecke zusammentreffen; der Seitenflächen sind es 24 im ganzen.

Anstatt der hier gewählten Veranschaulichungsweise kann man auch eine exakte Parallelprojektion des vierdimensionalen Gebildes (regulären Oktokubs) in unsern dreidimensionalen Raum betrachten. Eine orthogonale Projektion derart gibt die Figur (das Kantensystem) des regulären Rhombendodekaeders (Rautenzwölfflächners, Granatoeders) mitsamt den acht Radien, welche die dreikantigen Ecken desselben mit seinem Mittelpunkte verbinden, in welchem letztern die Projektionen zweier Ecken des Achtzells zusammenfallen — ein Umstand auf welchen Herr Kollege Hertz mich aufmerksam machte. Die Projektion ist analog derjenigen, bei welcher ein Würfel sich als reguläres Sechseck projizirt, wobei zwei Würfelecken in dem Mittelpunkt des letztern übereinander fallen. Wie wir diese in der Fig. 43 ein wenig auseinanderhalten, so wollen wir auch in der Fig. 44 des projizirten Acht-

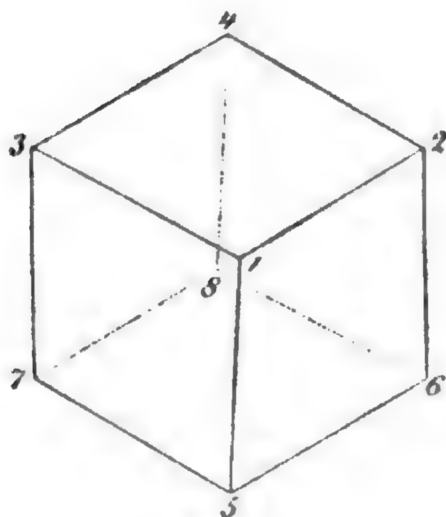


Fig. 43.

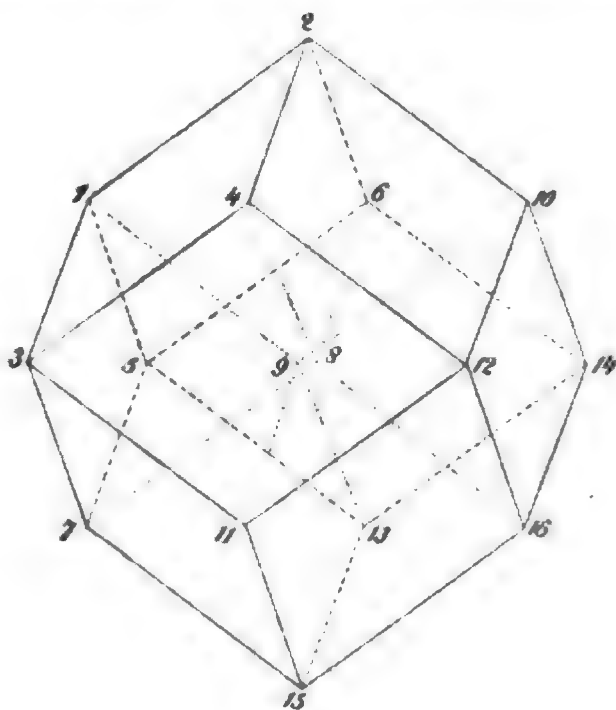


Fig. 44.

zells die beiden Ecken 8 und 9 behufs Vermehrung der Übersicht nicht ganz zusammenfallen lassen, was sie eigentlich thun sollten.

Die 24 quadratischen Seitenflächen des Achtzells projiziren sich zur

einen Hälfte als die 12 rautenförmigen Seitenflächen des Granatoeders, zur andern Hälfte als die im Innern des Körpers liegenden Rauten, die auf zweien Gegenkanten einer vierkantigen Granatoederecke stehen und dessen Mittelpunkt 8 oder 9 zur vierten Ecke haben. Und ganz deutlich wird man nun allemal die beiden als Rhomboeder projizirten Würfel erblicken, die auf irgend einer von den vorerwähnten 24 Rauten als auf einer gemeinsamen Grundfläche stehen.

In der Regelmässigkeit der vorstehenden Figur prägt sich mit der Umstand aus, dass die 16 Ecken des regulären Oktokubs auf dem vierdimensionalen Analogon einer Kugelfläche, auf einer „Vierer-Sphäre" liegen müssen.

Würde die Seite des Quadrats oder Kante des Würfels und Oktokubs zur Längeneinheit genommen, so würde nebenbei gesagt der Radius dieser vierdimensionalen Hyper-Sphäre leicht als $= \frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$ sich berechnen, gleichwie der Radius der durch die Ecken eines Würfels gelegten (dreidimensionalen) Kugel $= \frac{1}{2}\sqrt{3}$, der des dem Quadrat umschriebenen Kreises $= \frac{1}{2}\sqrt{2}$ und der des „eindimensionalen Hypo-Kreises", gelegt durch die Ecken des Zweiecks (der Strecke 1), $= \frac{1}{2}\sqrt{1} = \frac{1}{2}$ ist. Die dem Granatoeder umschreibbaren Kugeln, welche nämlich durch die Ecken von einerlei Art desselben hindurchgehen, sind natürlich von kleinerem Halbmesser, als dem vorerwähnten 1 der Hyper-Sphäre, und zwar wären ihre Radien unschwer zu finden — in Anbetracht, dass (nach einer Bemerkung von Hertz) gleichwie in Fig. 43 die Quadratdiagonalen 23, 47, etc. und die Dreiecke 235, 476) so in der räumlichen Figur zu Fig. 44 die Würfeldiagonalflächen 4, 6, 16; 4, 6, 7, etc. sowie die Tetraeder 1, 10, 11, 13 und 4, 6, 7, 16 sich in natürlicher Grösse präsentiren müssen. Wol die *einfachste* Veranschaulichung des Achtzells entnehme ich einem Modelle Herrn Victor Schlegel's — Modell Nr. 2 der 15. Serie (Projektionsmodelle der vier ersten regelmässigen vierdimensionalen Körper) aus der hübschen Sammlung von Modellen für den höheren mathematischen Unterricht, welche in L. Brill's Verlage in Darmstadt erschienen. Das Gebilde ist in des ersteren Abhandlung: „Theorie der homogen zusammengesetzten Raumgebilde" in den Nova acta der Ksl. Leop.-Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher, Bd. 44, p. 343..457, angeführt p. 434 — auch als Stringham's reguläres „Oktaedroid" (cf. American Journal of Math. Vol. 3, p. 1..14).

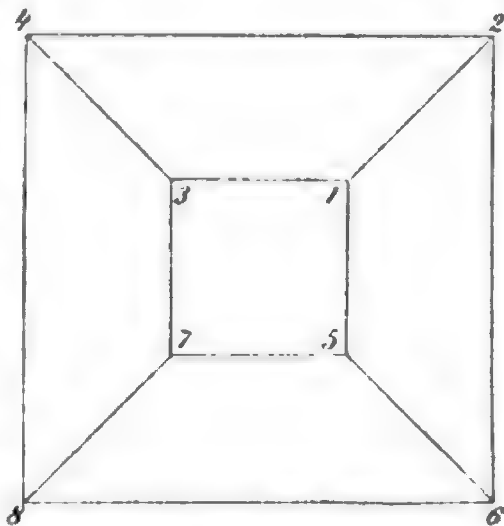


Fig. 45.

Das Modell stellt eine centrische Projektion des Achtzells in unsern Raum vor, analog derjenigen durch Fig. 45 dargestellten, bei der man

einen Würfel auf die Ebene stellt und von einem Punkte oberhalb desselben auf diese projizirt. Es sei durch die beifolgenden Fig. 46 und 47 veranschaulicht — jene wie die früheren orthogonal, diese nach Kopp'scher Manier schief projizirt — bei welcher der innere oder Kern-Würfel thatsächlich in unserm Raume steht.

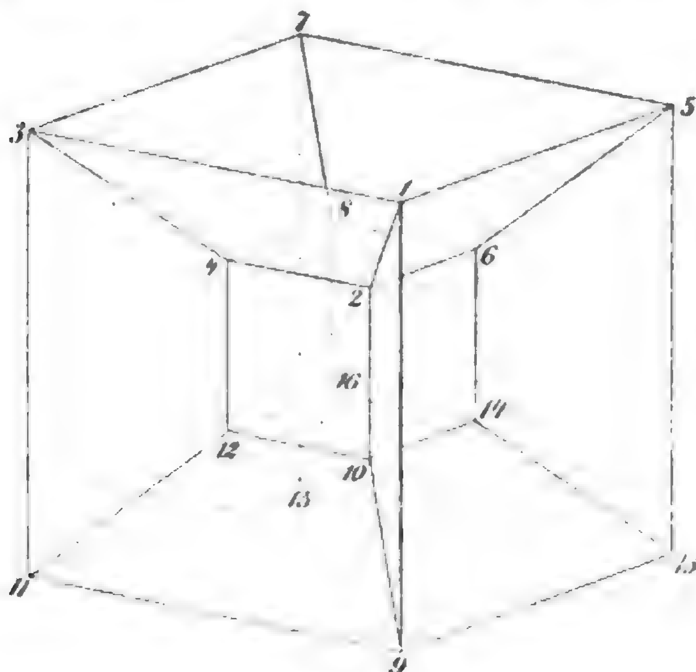


Fig. 46.

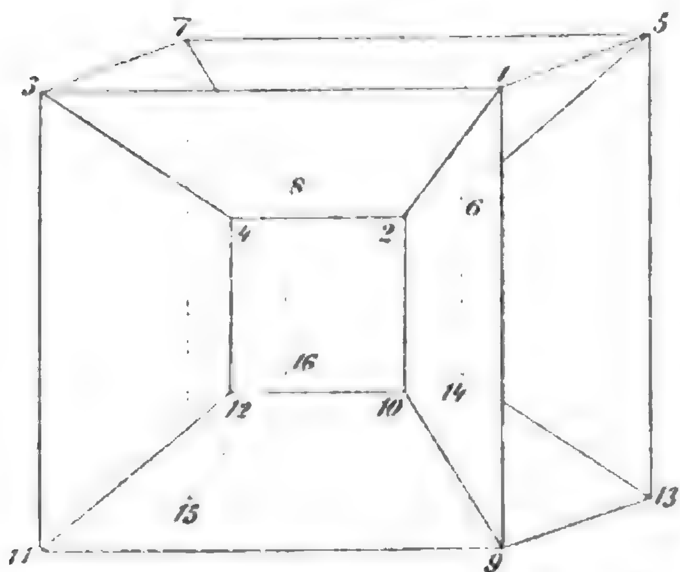


Fig. 47.

Es kann nun die geometrisch-kombinatorische Aufgabe gestellt werden, zu ermitteln, auf wie viele Arten sich an erwähntem Achtzell Ecken auswählen lassen, wenn zu einerlei Art alle diejenigen Aushebungen gezählt werden, bei welchen die Systeme der ausgewählten Ecken kongruente oder symmetrisch gleiche Figuren bilden. Und mit dieser Aufgabe fällt das von Clifford gelöste logisch-kombinatorische Problem zusammen, die Anzahl der Typen zu ermitteln, in welche die aus vier (und nur vier) Argumenten a, b, c, d (also ohne Zutritt von Parametern als Koeffizienten) zusammensetzbaren „Funktionen im identischen Kalkul" zerfallen, oder die Typenzahl der Aussagen zu finden (vermehrt um 1), welche über vier Klassen oder Begriffe (ohne Hinzuziehung von noch anderen) in simultanen universalen Urteilen abgegeben werden können.

Um nunmehr Clifford's Resultate als auf die Typenzahl der Elemente von G (a, b, c, d) bezügliche anzuführen, wollen wir unsre vorangeschickten Resultate für G (a), G (a, b) und G (a, b, c) noch einmal rekapitulirend zusammenstellen, indem wir für jede Zahl von ausgehobnen Konstituenten auch hinzufügen: die Summe der Formenzahlen der Typen, in welche sie zerfällt, das ist die Gesamtanzahl der Elemente unsrer Gruppe, welche entwickelt aus soviel Konstituenten sich additiv zusammensetzen.

Diese Formenzahl ist bei n Bestimmungselementen der Gruppe und λ

auszuhebenden von den 2^n Konstituenten (der Entwickelung der identischen 1 nach jenen) a priori bekannt, indem sie sein muss: die Anzahl der (additiven) Kombinationen ohne Wiederholungen zur λ^{ten} Klasse von diesen 2^n Konstituenten (oder Entwickelungsgliedern) als „Elementen". Sie ist mithin der Binominalkoeffizient:

$$(2^n)_\lambda,$$

wofern wir uns für den Binominalkoeffizienten zum Exponenten m und vom Index λ der bekannten Schlömilch'schen Bezeichnungsweise bedienen:

$$\frac{m \times (m-1) \times (m-2) \cdots \times (m-\lambda+1)}{1 \times 2 \times 3 \cdots \times \lambda} = (m)_\lambda .$$

Wir hatten für $n = 1$, mithin bei $G(a)$, zu

0, 1, 2 *Aushebungen* (resp. -facher Aussage, -fold statement):
1, 1, 1 *Typen*, mit zusammen
1, 2, 1 oder
$(2)_0, (2)_1, (2)_2$ *Formen* (Repräsentanten oder Elementen der Gruppe),
dabei $1 + 1 = 2$ Haupttypen.

Desgleichen hatten wir für $n = 2$, also bei $G(a, b)$, zu

0, 1, 2, 3, 4 *Aushebungen:*
1, 1, 2, 1, 1 *Typen*, mit zusammen bezüglich
1, 4, 6, 4, 1 oder
$(4)_0, (4)_1, (4)_2, (4)_3, (4)_4$ *Formen*, somit
$1 + 1 + 2 = 4$ Haupttypen.

Ferner für $n = 3$, also bei $G(a, b, c)$, zu

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 *Aushebungen:*
1, 1, 3, 3, 6, 3, 3, 1, 1 *Typen* mit zusammen
1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1 oder
$(8)_0, (8)_1, (8)_2, (8)_3, (8)_4, (8)_5, (8)_6, (8)_7, (8)_8$ *Formen*,
was $1 + 1 + 3 + 3 + 6 = 14$ Haupttyen gab.

Endlich für $n = 4$, mithin bei $G(a, b, c, d)$, gibt es bei

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 *Aushebungen:*
1, 1, 4, 6, 19, 27, 47, 55, 78, 55, 47, 27, 19, 6, 4, 1, 1 *Typen* mit
1, 16, 120, 560, 1820, 4368, 8008, 11440, 12870, 11440, 8008, 4368, 1820, 560, 120, 16, 1 oder
$(16)_0, (16)_1, (16)_2, (16)_3, (16)_4, (16)_5, (16)_6, (16)_7, (16)_8, (16)_9, (16)_{10}, (16)_{11}, (16)_{12}, (16)_{13}, (16)_{14}, (16)_{15}, (16)_{16}$ *Formen*

und beträgt die Zahl der Haupttypen:

$$1 + 1 + 4 + 6 + 19 + 27 + 47 + 55 + 78 = 238.$$

In Summa haben wir also für

$n = 1,\ 2,\ 3,\ 4:$
3, 6, 22, 398 Typen und
2, 4, 14, 238 Haupttypen.

Die von Clifford gegebne Typenzahl 396 war hier um 2 zu vermehren, weil er die Elemente 0 und 1 der Gruppe, als identische (0-fold statement) und absurde Aussage (16-fold statement) nicht mitberücksichtigte.

Ich habe nur die vier ersten Typenzahlangaben des obigen Schema's selbst nachgerechnet.

Bei drei Aushebungen hat man in der That in Bezug auf die Abstandsverhältnisse der drei ausgehobenen Glieder die folgenden 6 Möglichkeiten: *ppm*, *pmu*, *puo*, *mmm*, *mmo*, *muu*, oder

112, 123, 134, 222, 224, 233

wo die Buchstaben p, m, u, o als Anfangsbuchstaben auf „proximate, mediate, ultimate und obverse" hinweisen sollen, und selber — oder besser die darunter gesetzten Abstandsziffern — je an die Seiten eines Dreiecks gesetzt zu denken sind, an dessen Ecken die drei ausgehobenen Glieder stehen. Repräsentanten dieser 6 Typen sind etwa die Ausdrücke:

$$abcd + abcd_1 + abc_1d = ab\,(c + d),$$

$$abcd + abcd_1 + ab_1c_1d = a\,(bc + b_1c_1d),$$

$$abcd + abcd_1 + a_1b_1c_1d = abc + a_1b_1c_1d,$$

$$abcd + abc_1d_1 + ab_1cd_1 = a\{bcd + (bc_1 + b_1c)\,d_1\},$$

$$abcd + abc_1d_1 + a_1b_1cd = ab\,(cd + c_1d_1) + a_1b_1cd = (ab + a_1b_1)\,cd + abc_1d_1,$$

$$abcd + abc_1d_1 + a_1b_1c_1d = (abc + a_1b_1c_1)\,d + abc_1d_1.$$

Wie man sieht läuft das Problem, arithmetisch gefasst, hinaus auf die additive Zerlegung der Binomialkoeffizienten von der Form $(2^n)_\lambda$ in die Formenzahlen der verschiedenen Typen, welche sich bei λ Aushebungen ergeben. Für $n = 2$ und 3 ergaben sich als solche Zerlegungen:

$$(4)_2 = 4 + 2;$$

$$(8)_2 = (8)_6 = 12 + 4 + 12, \quad (8)_3 = (8)_5 = 24 + 8 + 24,$$

$$(8)_4 = 24 + 6 + (8 + 2) + 6 + 24.$$

Das allgemeine Gesetz scheint jedoch nicht leicht zu ermitteln.

Will man das Problem bei beliebigem n und λ mithin allgemein behandeln, so empfiehlt es sich vielleicht, die 2^n Konstituenten der Entwickelung so zu numeriren, dass ihre Ordnungszahlen im „dyadischen Zahlensystem" dargestellt erscheinen. Aus dem strenge nach den Argumentbuchstaben geordnet dargestellten Konstituenten ergibt sich die Ordnungszahl in der dyadischen Darstellung auf's leichteste, indem man alle unnegirten Argumentfaktoren in Nullen, alle mit Negationsstrich versehenen in Einser umschreibt. Man kann hernach die Entwickelung der identischen Eins so zusammenfassen:

$$1 = \sum_0^1{}_{x_1} \sum_0^1{}_{x_2} \cdots \sum_0^1{}_{x_n} \overline{x_1 x_2 \cdots x_n} \quad \text{(als „identische Summe)}.$$

Um den Abstand irgend zweier Glieder dieser Summe zu erfahren, setze man sie mit den gleichstelligen Ziffern (ihrer dyadischen Ordnungszahlen) unter einander, und setze eine Null an, wo zwei gleiche Ziffern (zwei Nullen oder zwei Einser) unter einander stehen, eine Eins, wo zwei ungleiche Ziffern (0 und 1 oder 1 und 0) unter einander stehen. Der gesuchte Abstand ist die Ziffernsumme („Quersumme") des so gebildeten Ansatzes. [Den letztern könnte man als das „symbolische Produkt" der beiden Glieder im Sinne meiner Abhandlung[8] § 9 und 10 hinstellen.]

Für 0, 1, 2 Aushebungen hat man jedenfalls bezüglich 1, 1, n als Typenzahlen. Doch schon für 3 Aushebungen ist die Typenzahl mit ihren den Typen einzeln zugehörigen Formenzahlen nur sehr mühsam zu gewinnen.

Das Problem sei den Mathematikern zur Weiterführung empfohlen. —

Was die eingangs angeregte Frage nach der Gliederung einer gegebenen Gruppe in Untergruppen, und deren Anzahl, betrifft, so ist dieselbe noch sehr leicht empirisch für $G(a)$ und $G(a, b)$ zu beantworten.

Es enthält nämlich*) $G_4(a) = (0, 1, a, a_1)$ — ausser sich selbst — nur die *eine* Untergruppe $G_2(0) = (0, 1)$.

$G_{16}(a, b)$ enthält als Untergruppen

erstens die Nullgruppe $G_2(0)$;

zweitens die sieben vierelementigen Gruppen:

$G_4(a)$, $G_4(b)$, $G_4(ab)$, $G_4(ab_1)$, $G_4(a_1b)$, $G_4(a_1b_1)$, $G_4(ab_1 + a_1b)$

drittens die sechs achtelementigen Gruppen:

$$G_8(a, ab) = (0, 1, a, a_1, ab, a_1 + b_1, ab_1, a_1 + b),$$
$$G_8(b, ab) = (0, 1, b, b_1, ab, a_1 + b_1, a_1b, a + b_1),$$
$$G_8(a, a_1b) = (0, 1, a, a_1, a_1b, a + b_1, a_1b_1, a + b),$$
$$G_8(b, ab_1) = (0, 1, b, b_1, ab_1, a_1 + b, a_1b_1, a + b),$$
$$G_8(ab, a_1b_1) = (0, 1, ab, a_1 + b_1, a_1b_1, a + b, ab + a_1b_1, ab_1 + a_1b),$$
$$G_8(ab_1, a_1b) = (0, 1, ab_1, a_1 + b, a_1b, a + b_1, ab + a_1b_1, ab_1 + a_1b)$$

viertens sich selber als 16 elementige Gruppe. Zusammen enthält $G(a, b)$ also $1 + 7 + 6 + 1 = 15$ Untergruppen.

Die Gliederung auch dieser Untergruppen wäre leicht in ähnlicher Weise anzugeben.

Dagegen ist die analoge Aufgabe, die Untergruppen von $G_{256}(a, b, c)$ vollständig anzugeben, eine noch ungelöste und signalisirt sich

*) Der Deutlichkeit zuliebe fügen wir die Elementezahl der Gruppe dem Buchstaben G als Suffix bei.

hier abermals eine Reihe von Problemen dem Mathematiker und Philosophen.

Anstatt von „Gruppen" schlechtweg, d. i. von Gruppen hinsichtlich aller drei Operationen oder Spezies des identischen Kalkuls hat man zuweilen Veranlassung, auch zu reden von Gruppen in Hinsicht nur gewisser von diesen drei Operationen. Und verdient es, hier noch kurz erörtert zu werden, auf wie viele und welche Arten solches möglich ist.

Von vornherein erscheint es möglich zu reden von einer Gruppe in Hinsicht *keiner*, oder *irgend einer*, oder *irgend zweier* oder endlich *aller dreie* von den genannten Operationen.

Der erste Fall bleibe ausser Betracht. Von den übrigen $3 + 3 + 1 = 7$ Möglichkeiten erweisen aber nur *fünfe* sich als wesentlich verschieden, wo 5 entstanden aus $3 + 1 + 1$.

In der That ist haltbar der Begriff einer *Gruppe in Hinsicht der Negation* für sich als eines Systems von Elementen, welches durch Negiren nicht weiter vermehrt werden kann, welches nämlich zu jedem Ausdrucke, der als Element des Systems auftritt, auch dessen Negation bereits als Element enthält.

Desgleichen der Begriff

einer *Gruppe in Hinsicht der Multiplikation* und (dual entsprechend) der einer *Gruppe in Hinsicht der Addition* allein.

Weiter der Begriff

einer *Gruppe in Hinsicht der Multiplikation und Addition* (mit Ausschluss jedoch der Negation) und endlich der Begriff

einer *Gruppe in Hinsicht aller drei Spezies,* der Gruppe schlechtweg.

Beispiele gelegentlich in Band 2.

Dagegen kann es *nicht* geben:

eine Gruppenbildung hinsichtlich Multiplikation und Negation allein, desgleichen nicht eine solche nur in Hinsicht auf Addition und Negation — denn sind die Operationen eines von diesen beiden Paaren von Spezies zugelassen, so ist es von selbst auch immer die dritte Spezies, und wird der letzte Fall vorliegen: der Gruppenbildung schlechtweg oder in Hinsicht aller drei Spezies.

Dies beruht auf der Anmerkung zu den Theoremen 36), wonach auch (S. 353)

$$(a_1 b_1)_1 = a + b \quad \text{resp.} \quad (a_1 + b_1)_1 = ab$$

allemal gebildet werden kann, sobald es gestattet ist, neben der Opera-

tion des Negirens nur die eine der beiden direkten Operationen des Kalkuls auf die Elemente a und b der Gruppe anzuwenden.

In der That sind also im identischen Kalkul nur die aufgezählten fünferlei Arten der Gruppenbildung möglich, von welchen die letzte als die wichtigste diejenige ist, mit der wir uns vorwiegend beschäftigten.

Wir können auch das Substrat der hier untersuchten „Gruppen" benutzen, um (auf's neue) jene Behauptung des § 12 unsrer Theorie zu erhärten: dass die zweite Subsumtion des Distributionsgesetzes *nicht* syllogistisch beweisbar ist.

Im *logischen Kalkul mit „Gruppen"* (speziell von Ausdrücken, Funktionen, wie sie im identischen Kalkul vorkommen) gilt in der That diese zweite Subsumtion des Distributionsgesetzes *im allgemeinen nicht* und gelten gleichwol doch alle andern Sätze des identischen Kalkuls, wie solche bis einschliesslich des § 11 der Theorie entwickelt worden — insbesondre natürlich also auch die erste Subsumtion des Distributionsgesetzes.

Um gedachten Nachweis zu leisten, braucht man sich nur nach der oben von uns begründeten Methode von der Vollständigkeit nachstehender vier Gruppen zu überzeugen, die wir kurz mit den links beigesetzten Buchstaben bezeichnen wollen:

$$A = G_8(abc,\ ab + ac + bc) = \{0,\ 1,\ abc,\ a_1 + b_1 + c_1,$$
$$ab + ac + bc,\ a_1b_1 + a_1c_1 + b_1c_1,\ a_1bc + ab_1c + abc_1,\ abc + a_1b_1 + a_1c_1 + b_1c_1\},$$

$$B = G_{16}(ab,\ bc) = \{0,\ 1,\ ab,\ bc,\ a_1 + b_1,\ a_1 + c_1,\ abc,\ abc_1,\ a_1bc,$$
$$a_1 + b_1 + c_1,\ a_1 + b_1 + c,\ a + b_1 + c_1,\ b(a + c),\ b_1 + a_1c_1,\ b(ac_1 + a_1c),\ b_1 + ac + a_1c_1\},$$

$$C = G_{16}(ac,\ bc) = \{0,\ 1,\ ac,\ bc,\ a_1 + c_1,\ b_1 + c_1,\ abc,\ ab_1c,\ a_1bc,$$
$$a_1 + b_1 + c_1,\ a_1 + b + c_1,\ a + b_1 + c_1,\ c(a + b),\ c_1 + a_1b_1,\ c(ab_1 + a_1b),\ c_1 + ab + a_1b_1\},$$

$$D = G_{32}(ab,\ ac,\ bc) = \{0,\ 1,\ ab,\ ac,\ bc,\ a_1 + b_1,\ a_1 + c_1,\ b_1 + c_1,$$
$$abc,\ abc_1,\ ab_1c,\ a_1bc,\ a_1 + b_1 + c_1,\ a_1 + b_1 + c,\ a_1 + b + c_1,\ a + b_1 + c_1,$$
$$a(b + c),\ b(a + c),\ c(a + b),\ a_1 + b_1c_1,\ b_1 + a_1c_1,\ c_1 + a_1b_1,$$
$$a(bc_1 + b_1c),\ b(ac_1 + a_1c),\ c(ab_1 + a_1b),\ a_1 + bc + b_1c_1,\ b_1 + ac + a_1c_1,\ c_1 + ab + a_1b_1,$$
$$ab + ac + bc,\ a_1b_1 + a_1c_1 + b_1c_1,\ a_1bc + ab_1c + abc_1,\ abc + a_1b_1 + a_1c_1 + b_1c_1\}.$$

Die drei ersten von diesen: A, B, C, sind Untergruppen der vierten D, was selbstverständlich erscheint auch bei der ersten A, in Anbetracht, dass die Bestimmungselemente von dieser nichts anderes sind, als Produkt und Summe der Bestimmungselemente von D.

Da C aus B hervorgeht, indem man b und c vertauscht, so braucht die Probe auf Vollständigkeit blos bei den Gruppen A, B und D ausgeführt zu werden: für diese aber ist sie von erster Wichtigkeit, da auf der konstatirten Vollständigkeit die Beweiskraft der Überlegungen beruht. [Man müsste sich hier also der nicht unerheblichen Mühe des systematischen Intermultiplizirens und Interaddirens unterziehen.]

Nach dem aufgestellten Begriffe der logischen Summe von Gruppen haben wir nun:

$$B + C = D,$$

weil $G(ab, ac, bc)$ die Bestimmungselemente von $G(ab, bc)$ und $G(ac, bc)$ in sich vereinigt. Daher ist:

$$A \cdot (B + C) = A \cdot D = A$$

— nach Th. $20_\times$), weil ja $A \subset\!\!\!= D$, wie oben erwähnt, sein musste.

Andrerseits ist es leicht, die Produkte $A \cdot B$ und $A \cdot C$ der ersten Gruppe in die beiden auf sie folgenden zu ermitteln.

Sucht man die Elemente auf, welche die Gruppen A und B, nämlich ihre Elementensysteme, gemein haben, so bildet deren System notwendig wieder eine Gruppe. Diese möge E heissen; so lehrt der blosse Anblick von A und B, dass

$$E = G_4(abc) = \{0,\ 1,\ abc,\ a_1 + b_1 + c_1\}$$

ist, und haben wir also:

$$A \cdot B = E.$$

Ebenso zeigt sich aber auch, dass

$$A \cdot C = E$$

ist (wie zum Überfluss auch schon aus der Symmetrie von E bezüglich a, b, c hervorgeht).

Darnach wird sein müssen:

$$A \cdot B + A \cdot C = E + E = E.$$

Nun deckt aber E sich keineswegs mit A, es ist sonach auch $AB + AC$ verschieden von, jedenfalls *ungleich* $A(B + C)$, welches gleich A erwiesen. Man bemerkt, dass E *nur* eine (d. i. eine „echte") Untergruppe von A ist; wir haben:

$$E \subset A$$

und folglich auch (durch beiderseitige Einsetzung des Gleichen):

$$AB + AC \subset A(B + C)$$

womit nachgewiesen ist, dass es im logischen Kalkul mit Gruppen Fälle gibt, in welchen die Formel des Distributionsgesetzes nur einseitig als eine Unterordnung gilt.

Die Unterordnung folgte hier auch schon aus dem Nichtvorliegen der Gleichheit in Anbetracht, dass $AB + AC$ als $\mathrel{=\!\!\!\!\subset}$, das ist = oder $\subset$, $A(B + C)$ in Th. $25_\times$) bewiesen ist.

Von der erworbenen Bekanntschaft mit den Typen der Gruppe $G(a, b, c)$ und von der gegebenen Zusammenstellung ihrer Elemente wollen wir schliesslich eine Nutzanwendung machen, um die Theorie der Eliminationsresultanten sowie diejenige der symmetrisch allgemeinen Lösungen um einen Schritt zu fördern.

Denken wir uns x, y und z irgendwie durch „Parameter“ a, b, c, d, ... ausgedrückt, mithin sie als Funktionen des Gebietekalkuls von eben diesen Symbolen — und *nur* von diesen — gegeben, so kann man nach der Relation $f(x, y, z) = 0$ fragen, die als Resultante der Elimination sämtlicher Parameter aus den vorliegenden Gleichungen:

$$x = \varphi(a, b, c, d, \cdot\cdot), \quad y = \psi(a, b, c, d, \cdot\cdot), \quad z = \chi(a, b, c, d, \cdot\cdot)$$

folgen muss. Das Polynom $f(x, y, z)$ dieser Resultante kann nur eines der 256 Elemente der Gruppe $G(x, y, z)$ sein, da es andere Symbole als x, y und z selbst laut Voraussetzung nicht in sich aufweist, mithin bei seiner „Entwickelung“ nach seinen drei Argumenten x, y, z als Koeffizienten *nur* die Symbole 0 und 1 zur Verfügung stehen können.

Sehr häufig — wie wir bereits erfahren — tritt insbesondre der Fall ein, dass unser Polynom das Element 0 der Gruppe $G(x, y, z)$ ist. Die Resultante stellt sich alsdann in der Gestalt $0 = 0$ dar und ist eine nichtssagende. Wir dürfen alsdann sagen, dass bei unbestimmt gelassenen Werten der Parameter a, b, c, d, .. auch die Gebiete x, y, z *von einander unabhängig beliebige* bleiben, oder dass *keine* Relation, Beziehung zwischen denselben bestehn *muss* oder folgt (S. 454).

Falls $f(x, y, z)$ sich als das Element 1 der Gruppe $G(x, y, z)$ herausstellen sollte, wäre die Resultante (als da ist: die Gleichung $1 = 0$) eine *absurde* (Behauptung).

Dieser Fall kann aber *nicht vorkommen*, — und die Erfahrung wird es bestätigen — auch lässt es sich strenge, wie folgt, beweisen. Eine Resultante $1 = 0$ wäre als ein Ergebniss der Elimination nicht nur von a, b, c, ... sondern auch von x, y, z anzuerkennen. Als letzteres müsste es auch in der vollen Resultante für x, y, z enthalten sein. Eliminirt man aber regelrecht aus der vereinigten Prämissengleichung

$$x_1\varphi + x\varphi_1 + y_1\psi + y\psi_1 + z_1\chi + z\chi_1 = 0$$

ebendiese drei Symbole, so ergibt sich als die gedachte volle Resultante nur: $0 = 0$.

Der Aussagenbereich, mit dem wir es im vorliegenden ersten Bande der exakten Logik ausschliesslich zu thun haben, war auf die *universalen* Urteile beschränkt, umfasste nämlich nur, was mittelst Gleichungen oder Subsumtionen ausdrückbar ist.

In diesem Bereiche kann ein *unmittelbarer* Widerspruch (S. 6) überhaupt nicht vorkommen, sintemal bekanntlich das kontradiktorische Gegenteil einer universalen allemal eine partikulare Behauptung ist — vergl. S. 33. Gleichwol kann mittelbar, innerlich, auch schon auf dieser ersten Logiketappe ein Widerspruch *zwischen* sowol als *in* Aussagen auftreten, insofern sie zusammen oder für sich schon auf die Behauptung $1 = 0$ hinauslaufen oder zu schliessen gestatten — zusammen, wie z. B. die Gleichungen $a = 0$ und $a_1 = 0$, und für sich schon, wie z. B. $x + x_1 = 0$, oder wie $axy_1 + a_1 + x_1 + y = 0$ — womit sie denn in unmittelbaren Widerspruch treten würden zu der allen unsern Betrachtungen implicite zugrunde liegenden Annahme, dass 1 nicht gleich, $\neq 0$ sei.

Dass dergleichen nun hier nicht vorliegen kann, ist mit obigem dargethan.

Und wie sollten auch jene Prämissen $x = \varphi(a, b, \cdot\cdot)$, $y = \psi(a, \cdot\cdot)$, ... einen Widerspruch mit einander involviren, da durch eine jede derselben doch nur festgesetzt wird, was unter dem Buchstaben linkerhand verstanden werden solle, einem Buchstaben, der neu, noch unerwähnt war, und auf den in den übrigen Prämissen auch keinerlei Bezug genommen ist?!

Aus diesen Gründen wird uns also die absurde Resultante überhaupt nicht in den Weg kommen und mag fortan unberücksichtigt bleiben. —

Als in x, y, z *symmetrische Resultanten* können nun überhaupt nur folgende *fünfzehn* — von *acht*erlei Typus — auftreten*), für die wir die beigesetzten Chiffren einführen:

R_0) $\quad 0 = 0$.

R_1) $\quad xyz = 0$, $\qquad R_1'$) $\quad x_1y_1z_1 = 0$.

R_2) $\quad xyz + x_1y_1z_1 = 0$.

R_3) $\quad x_1yz + y_1zx + z_1xy = 0$, $\qquad R_3'$) $\quad xy_1z_1 + yz_1x_1 + zx_1y_1 = 0$.

R_4) $\quad xyz + x_1yz + y_1zx + z_1xy = 0$ oder $yz + zx + xy = 0$

R_4') $\quad x_1y_1z_1 + xy_1z_1 + yz_1x_1 + zx_1y_1 = 0$ oder $y_1z_1 + z_1x_1 + x_1y_1 = 0$.

R_5) $\quad xyz + xy_1z_1 + yz_1x_1 + zx_1y_1 = 0$ oder $x = yz_1 + y_1z$

*) Bei Mitberücksichtigung der absurden Resultante: R_∞), nämlich $1 = 0$ wären es 16 Resultanten von 9 verschiedenen Typen.

[womit nach § 18, Th. π) auch $y = zx_1 + z_1x$ und $z = xy_1 + x_1y$ gegeben ist],

$$R_5') \quad x_1y_1z_1 + x_1yz + y_1zx + z_1xy = 0 \quad \text{oder} \quad x = yz + y_1z_1$$

(womit zugleich auch $y = zx + z_1x_1$, $z = xy + x_1y_1$ sein muss).

$$R_6) \quad xyz + x_1yz + y_1zx + z_1xy + x_1y_1z_1 = 0, \quad \text{oder:}$$

$$(x = y_1z_1), \quad y = z_1x_1, \quad z = x_1y_1,$$

von welchen drei Gleichungen nämlich eine aus den zwei andern folgt — ein Satz, der denen § 18, π, σ, τ) sich anschliesst.

$$R_6') \quad xyz + xy_1z_1 + yz_1x_1 + zx_1y_1 + x_1y_1z_1 = 0, \quad \text{oder}$$

$$(x = y_1 + z_1), \quad y = z_1 + x_1, \quad z = x_1 + y_1 \cdot$$

$$R_7) \quad x_1yz + y_1zx + z_1xy + xy_1z_1 + yz_1x_1 + zx_1y_1 = 0,$$

oder: $(x + y + z)(x_1 + y_1 + z_1) = 0$, oder: $x = y = z$

(somit auch: $x_1 = y_1 = z_1$)

$$R_8) \quad xyz + x_1yz + y_1zx + z_1xy + xy_1z_1 + yz_1x_1 + zx_1y_1 = 0$$

oder $x + y + z = 0$, oder: $x = y = z = 0$

$$R_8') \quad x_1y_1z_1 + x_1yz + y_1zx + z_1xy + xy_1z_1 + yz_1x_1 + zx_1y_1 = 0$$

oder $x_1 + y_1 + z_1 = 0$, oder $x = y = z = 1 \cdot$

Von diesen Resultanten sind paarweise *komplementär:* R_0 mit R_9 (siehe oben die Fussnote)

R_1 mit R_8', R_1' mit R_8,

R_2 und R_7

R_3 mit R_6', R_3' mit R_6

R_4 und R_4'

R_5 und R_5'

insofern die Polynome derselben (nicht aber die resultirenden Aussagen selber) Negationen von einander sind — wogegen die zum selben Typus gehörigen (die hier gleich numerirt erscheinen und sich nur durch den Accent unterscheiden) als solche, welche durch Vertauschung der x, y, z mit ihren Negationen in einander übergehen, nur als *obverse* von einander bezeichnet werden dürften.

Wir haben hienach nur *sechs* Haupttypen.

Die Vollständigkeit der Zusammenstellung nachzuweisen sei als eine ganz leichte Aufgabe dem Leser überlassen.

Wie man einerseits die Gleichung $R = 0$ betrachten konnte als die *Resultante* der Elimination von a, b, .. aus den gegebenen Gleichungen

$$x = \varphi(a, b, \cdot\cdot), \quad y = \psi(a, b, \cdot\cdot), \quad z = \chi(a, b, \cdot\cdot)$$

so kann man andrerseits auch umgekehrt, indem man jene Resultante $R = 0$ als *gegeben*, als eine von den Unbekannten x, y, z zu erfüllende Relation ansieht, diese drei Gleichungen $x = \varphi$, etc. auffassen als die *Lösungen* dieser Aufgabe, nämlich als die Formeln, welche die (oder gewisse) Wurzeln jener Gleichung $R = 0$ in unabhängigen Parametern a, b, .. ausgedrückt darstellen.

Wie von Anfang schon bei der Zahl der Unbekannten, so wollen wir jetzt auch hinsichtlich der Anzahl der Parameter uns auf die Annahme beschränken, dass es ihrer dreie seien: a, b und c.

Die rechten Seiten unserer drei Gleichungen nämlich

$$\varphi(a, b, c), \quad \psi(a, b, c), \quad \chi(a, b, c),$$

werden alsdann ebenfalls Elemente sein der Gruppe $G(a, b, c)$. Und sollten etwa durch cyklische Vertauschung von a, b und c diese drei Funktionen in einander übergehen, so werden wir in Gestalt von

$$\alpha) \qquad z = \varphi(a, b, c), \quad y = \varphi(b, c, a), \quad z = \varphi(c, a, b)$$

symmetrische Lösungen haben für die, wie sich zeigen wird, auch hinsichtlich der Unbekannten symmetrische Aufgabe, die Gleichung

$$R = 0, \quad \text{ausführlicher} \quad R(x, y, z) = 0$$

aufzulösen.

Gedachte Lösungen verdienen den Beinamen von *allgemeinen* Lösungen allermindestens insofern, als sie bei der Willkürlichkeit der Parameter a, b, c uns unendlich viele Systeme von Wurzeln der Gleichung $R = 0$ ausdrücken. Sie verdienen aber sogar als „*die* allgemeinen" Lösungen hingestellt zu werden, nämlich als Ausdrücke, welche *jedes* erdenkliche System von Wurzeln der Gleichung $R = 0$ schon in sich fassen werden, indem in § 22 erkannt wurde, dass (die notwendige und) eine hinreichende Bedingung für die Auflösbarkeit des Gleichungensystems $x = \varphi$, $y = \psi$, $z = \chi$ *nach den Unbekannten* a, b, c die ist, dass die Resultante $R = 0$ der Elimination von a, b, c aus dem Systeme erfüllt sei; es werden demnach die Parameter a, b, c sich auch immer so bestimmen lassen, dass für ein (irgendwie) gegebenes, nur aber die Forderung $R = 0$ erfüllendes Wertsystem der Unbekannten x, y, z jene drei Gleichungen gerade dieses Systems von Wurzeln darstellen.

Wir haben dann also kurz „die symmetrisch allgemeinen Lösungen" der Gleichung $R = 0$. Der Form nach kann (und wird) es noch verschiedene Systeme solcher Lösungen für eine nämliche Gleichung $R = 0$

geben, doch werden diese immer gleich umfassende sein, der Bedeutung nach sich mit einander decken.

In der Absicht, die symmetrisch allgemeinen Lösungen der Gleichung R_2 (und damit auch die von R_6 nebst R_6' — vergl. § 24, Aufg. 10 und 11) welche bislang nicht erreichbar schien, zu entdecken, oder andernfalles nachzuweisen, dass die Lösung dieser Aufgabe mittelst *dreier* unabhängigen Parameter unmöglich ist, habe ich nun für alle erdenklichen Annahmen der Funktion $\varphi(a, b, c)$ die Resultante $R = 0$ aufgesucht.

Um die Ergebnisse der Untersuchung übersichtlich angeben zu können, bemerke ich, dass von den drei Gleichungen $x = \varphi(a, b, c)$, $y =$ etc. immer nur die erste wirklich angeführt zu werden braucht, indem die beiden andern ja durch die cyklische Vertauschung von a, b, c zugleich mit der von x, y, z aus ihr sich auf das leichteste ergeben.

Was die Untersuchung herausstellte, können wir hiernach dahin zusammenfassen. Es ergibt sich als Resultante der Elimination von a, b, c:
R_0 aus der Annahme $x = a$, desgleichen aus der $x = ab + a_1c$, desgleichen aus der Annahme

$$x = bc + a_1(b + c), \text{ desgl. aus der } x = abc_1 + a_1(b_1 + c);$$

R_1 aus $x = a_1(b + c)$, $x = bc_1 + ab_1c$;

R_1' aus $x = a_1 + bc$, $abc_1 + bc + b_1c_1$;

R_3 aus $x = bc$, $a + bc$, $a(b + c_1)$, $a(bc + b_1c_1)$, $ab_1c_1 + bc$, $abc + b_1c_1$, $ab_1c_1 + a_1(b + c)$, $ab_1c_1 + a_1(b + c) + bc$;

R_3' aus $x = b + c$, $a(b + c)$, $a + bc_1$, $a + bc_1 + b_1c$, $abc + bc_1 + b_1c$, $a_1bc + bc_1 + b_1c$, $abc + a_1(b_1 + c_1)$, $abc + a_1(bc_1 + b_1c)$;

R_4 aus $x = bc_1$, a_1bc, $ab_1c_1 + a_1bc$;

R_4' aus $x = b + c_1$, $a_1 + b + c$, $(a + b_1 + c_1)(a_1 + b + c)$;

R_5 aus $x = bc_1 + b_1c$, $a(bc_1 + b_1c)$, $ab_1 + a_1c$;

R_5' aus $x = bc + b_1c_1$, $a + bc + b_1c_1$, $ab + a_1c_1$;

R_7 aus $x = abc$, $abc + a_1b_1c_1$, $a_1bc + ab_1c + abc_1$, $bc + ca + ab$ und $a(bc+b_1c_1)+a_1(bc_1+b_1c)$, $a+b+c$, $(a+b+c)(a_1+b_1+c_1)$, $ab+ac+bc+a_1b_1c_1$.

Nicht vertreten sind die Resultanten:

$$R_2,\ R_2',\ R_6,\ R_6',\ R_8,\ R_8'$$

[und — wie vorauszusehen gewesen — auch die absurde Resultante R_9 oder $1 = 0$ nicht].

Was zunächst die beiden letzteren betrifft, so wird bei ihnen die Frage nach ihrer symmetrisch allgemeinen Lösung gewissermassen

hinfällig, indem durch die Forderungen R_8 oder R_8' sich die Unbekannten als

$$x = y = z = 0 \quad \text{resp. als} \quad x = y = z = 1$$

absolut bestimmt erweisen. Wenn man wollte, könnte man freilich auch hier in Gestalt von:

$$\begin{cases} x = aa_1 \\ y = bb_1 \\ z = cc_1 \end{cases} \quad \text{resp.} \quad \begin{cases} x = a + a_1 \\ y = b + b_1 \\ z = c + c_1 \end{cases}$$

solche Lösung in drei willkürlichen Parametern a, b, c angeben.

Auch R_7 lässt sich schon einfacher wie oben mittelst *eines* Parameters lösen in Gestalt von

$$\begin{cases} x = a \\ y = a \\ z = a. \end{cases}$$

Bei allen andern von den vorgekommenen Gleichungen wird 3 die Minimalzahl von den zu ihrer symmetrischen Lösung erforderlichen Parametern sein.

Die Vollständigkeit unsrer Resultantentafel vorausgesetzt wird durch das Nichtauftreten der Resultanten R_2, R_2', R_6, R_6' der *Beweis* erbracht sein, dass diese Gleichungen eine symmetrisch allgemeine Lösung in *drei* unabhängigen Parametern *nicht besitzen können.*

Darnach bleibt es aber unbenommen, *in vier oder mehr Parametern* immer noch nach einer solchen Lösung zu fahnden. So ist z. B. die Resultante der Elimination von a, b, c, d aus den drei Gleichungen:

$$x = ab + cd$$
$$y = ac + bd$$
$$z = ad + bc$$

keine andere als: R_3 — von welcher Gleichung denn also auch umgekehrt die drei vorhergehenden eine symmetrische allgemeine Lösung geben. Und es erscheint nicht undenkbar, sondern fast als wahrscheinlich, dass auch für R_2 sich in solcher Art Lösungen finden liessen.

Mit der Fertigstellung gegenwärtigen Lehrgebäudes noch allzusehr anderweitig in Anspruch genommen muss ich das interessante Problem, dies zu entscheiden, zur Zeit Andern überlassen.

Was aber die Vollständigkeit unserer für drei Parameter gegebenen Resultantentafel betrifft, die für den obigen Beweis von erster Wichtigkeit war — sowie überhaupt in Betreff der Gewinnung derselben, so ist folgendes zu bemerken.

Keineswegs braucht man alle 256 Elemente von $G(a, b, c)$ einzeln gleich x gesetzt (und durch cyklische Permutation der beiden Buchstabensysteme a, b, c und x, y, z zu einem Systeme von drei Gleichungen ergänzt) direkt auf ihre Resultante zu prüfen.

Zunächst liefern die hinsichtlich a, b, c symmetrischen Ausdrücke oder Elemente von $G(a, b, c)$ stets ohne alle Rechnung R_7, weil der Ansatz auf $x = y = z$ augenscheinlich hinausläuft. Dergleichen Ausdrücke kommen nur bei dem

1. und 22., 2. und 21., 5. und 18., 8. und 15., beim 9., und beim 14.

Typus vor, mithin bei 10 Typen und 6 Haupttypen, und finden sich — abgesehen von den Elementen 0 und 1 — oben bei R_7 vertreten durch Repräsentanten, welche mit Rücksicht auf die nachfolgenden Bemerkungen als ausreichende hingestellt werden durften.

Wir brauchten also nur mehr die Ausdrücke durchzugehen, welche *nicht* bezüglich aller drei Buchstaben a, b, c symmetrisch erscheinen.

Solche können nun aber noch in Hinsicht zweier von diesen drei Buchstaben symmetrisch sein, was in der That vorkommt bei den Typen:

$$\begin{matrix} & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, \\ \text{und} & 21, & 20, & 19, & 18, & 17, & 16, & 15, \end{matrix} \quad 9, \quad 10, \quad 12, \quad 13.$$

sonach bei allen Typen ausser 11 und den schon abgethanen 1 nebst 22 und 14.

In solchem Falle braucht man nur solche Ausdrücke zu berücksichtigen, bei welchen der Buchstabe a bevorzugt erscheint, die Symmetrie also hinsichtlich b und c vorliegt. Denn war dies nicht der Fall, war ein andrer Buchstabe als a bevorzugt, so lässt sich durch cyklische Vertauschung der drei Parameter immer hinbringen, dass es der Fall wird, dass in dem $= x$ zu setzenden Ausdrucke $\varphi(a, b, c)$ der bevorzugte Buchstabe gerade a ist.

Denken wir für den Augenblick uns den bevorzugten Buchstaben als das erste Argument angeführt, so müssen in der That die drei Gleichungen

$$x = \varphi(b, c, a), \quad y = \varphi(c, a, b), \quad z = \varphi(a, b, c),$$

desgleichen diese:

$$x = \varphi(c, a, b), \quad y = \varphi(a, b, c), \quad z = \varphi(b, c, a)$$

bei der Elimination von a, b, c uns die nämliche Resultante $R = 0$ liefern, als wie die drei Gleichungen:

$$x = \varphi(a, b, c), \quad y = \varphi(b, c, a), \quad z = \varphi(c, a, b)$$

sintemal die Resultante, weil sie die Eliminanden a, b, c gar nicht enthält, auch ungeändert bleiben muss, wenn man diese irgendwie unter sich vertauscht.

Auf Grund dieser Bemerkung reduzirt sich nicht nur bei den hinsichtlich zweier Argumente symmetrischen, sondern auch bei den gänzlich unsymmetrischen Funktionen $\varphi(a, b, c)$ die Menge der direkt zu ermittelnden Resultanten sehr beträchtlich, und wird die Resultante schon nur für höchstens ein Drittel der Ausdrücke wirklich aufzusuchen sein.

Nehmen wir vorläufig als erwiesen an, dass die Resultante aus den drei letzten Gleichungen, wie immer auch die Funktion $\varphi(a, b, c)$ beschaffen sein möge, hinsichtlich x, y, z *symmetrisch* sein muss — ein Punkt über welchen nachher noch zu sprechen sein wird — so kommt aber um die Menge der auf Resultanten zu prüfenden Ausdrücke zu vereinigen noch folgendes hinzu.

War $R(x, y, z) = 0$ die zum Ansatz $x = \varphi(a, b, c)$ etc. gehörige Resultante, so muss ebendiese, nämlich $R(x, z, y) = 0$ auch zu dem Ansatze $x = \varphi(a, c, b)$ gehören, weil die Gleichungen

$$x = \varphi(a, c, b), \quad y = \varphi(b, a, c), \quad z = \varphi(c, b, a)$$

durch die gleichzeitige Vertauschung von b mit c und y mit z in die vorigen augenscheinlich verwandelt werden (mit Umstellung der beiden letzten von ihnen).

Von den sechs Ausdrücken, welche aus $\varphi(a, b, c)$ durch Vertauschung, Permutation der Argumente ableitbar wären, braucht also immer nur *einer* auf seine Resultante (wenn $= x$ gesetzt, etc.) geprüft zu werden — womit im Allgemeinen (d. h. sofern jene sechs Ausdrücke verschieden), eine Reduktion der Arbeit auf ihren sechsten Teil erzielt sein wird.

Weiter aber muss der Ansatz $x = \varphi(a_1, b_1, c_1)$, etc. auch seinerseits die obige Resultante $R(x, y, z) = 0$ liefern, da die Bezeichnung der Eliminanden gleichgültig ist, diese also auch durch ihre Negationen durchweg ersetzt werden durften — eine Bemerkung, durch welche die restirende Arbeit sich abermals um nahe die Hälfte reduzirt, nämlich nur dann sich nicht verringern wird, wenn die Funktion $\varphi(a, b, c)$ bei Vertauschung der Argumente mit ihren Negationen ungeändert blieb.

Eine abermalige Reduktion der Arbeit auf ihre Hälfte ermöglicht endlich diese Bemerkung: Hat der Ansatz $x = \varphi(a, b, c)$, etc. zu einer Resultante $R_\varkappa(x, y, z) = 0$ geführt, wo $\varkappa$ einen gewissen von den Indices 1 bis 8 vorstellt, so muss natürlich aus den Gleichungen:

$$x_1 = \varphi_1(a, b, c) \quad \text{etc. [d. h. } y_1 = \varphi_1(b, c, a), \quad z_1 = \varphi_1(c, a, b)]$$

— unter φ_1 die Negation von φ verstanden — sich ganz dieselbe Resultante ergeben, weil diese Gleichungen bezüglich äquivalent, blosse Transskriptionen von, den vorhergehenden sind. Daraus folgt aber, dass nun auch der Ansatz:

$$x = \varphi_1(a, b, c) \text{ etc. [d. h. } y = \varphi_1(b, c, a), \quad z = \varphi_1(c, a, b)]$$

nun auch nicht mehr durch mühsames Eliminiren auf seine Resultante geprüft zu werden braucht, vielmehr letztere sich aus der vorigen unmittelbar abschreiben lässt, indem man die Symbole x, y, z mit ihren Negationen vertauscht. Das heisst, die hier in Frage kommende Resultante lautet: $R_\varkappa(x_1, y_1, z_1) = 0$, oder nach der eingeführten Nomenklatur: $R_\varkappa'(x, y, z) = 0$.

Die gleiche Bemerkung trifft auch für $\varkappa = 0$ zu, wenn man R_0' für einerlei mit R_0 gelten lässt.

Auf Grund derselben brauchen die Ausdrücke der zu schon geprüften „komplementären" Typen nicht mehr auf ihre Resultanten geprüft zu werden,

und von den Ausdrücken eines zu sich selbst komplementären Typus nur die eine Hälfte.

Ist beispielsweise R_4 als Resultante zu $x = a_1 bc + ab_1 c_1$ ermittelt, so muss R_4' die Resultante sein zu dem Ansatze $x = (a + b_1 + c_1)(a_1 + b + c) = ab + a_1 c_1 + b_1 c$. Und — in Illustration zu den vorhergehenden Bemerkungen — ist R_3' die Resultante zu dem Ansatze $x = a + bc_1$, so muss es auch die Resultante sein zu dem $x = a + b_1 c$, der durch Vertauschung von b und c aus ihm hervorgeht.

Ist R_5 die Resultante zu $x = a(bc_1 + b_1 c)$, so muss es auch die zu $x = a_1(bc_1 + b_1 c)$ sein, weil letzteres Gleichungensystem durch Vertauschung von a, b, c mit a_1, b_1, c_1 in das vorige übergeht. Etc.

Hiernach ist es nur mehr eine kleine Geduldsprobe, die Vollständigkeit unsrer Resultantentafel nachzuweisen.

Mühsam bleibt aber die Ableitung von 19 der zusammengestellten 44 Resultanten selbst, von welchen 20 direkt abgeleitet werden mussten (was nur bei dem Ansatze: $x = a$ sich auf den ersten Blick erledigt — und wobei die ebenso selbstverständlich auf R_7 führenden Fälle nicht eingerechnet sind). Ich habe nach schon erläuterten und auch noch nicht erläuterten Methoden das Eliminationsverfahren auf die mannigfaltigste Weise variirt, dasselbe aber immer als ein mühsam anzuwendendes gefunden; und wer mir auch nur einen Teil der Resultanten nachrechnet, wird sicherlich gleich mir den Wunsch nicht unterdrücken können, dass hierbei eine Art von Denkrechenmaschine die mechanische Arbeit abnehmen möchte! —

Versuchen wir jetzt noch den rückständigen Beweis des sehr plausibeln Satzes zu leisten, den auch die Erfahrung in den vorstehenden Aufgaben bestätigte: dass die Resultante $R(x, y, z) = 0$ der Elimination von a, b, c aus den drei Gleichungen:

$$x = \varphi(a, b, c), \quad y = \varphi(b, c, a), \quad z = \varphi(c, a, b)$$

eine *symmetrische* Funktion von x, y, z sein müsse, so sollte man meinen, dieser Beweis müsste a priori gelingen: es müsste gelingen, zu zeigen, dass wenn man irgend zwei Argumente von R, wie etwa y und z, in den vorliegenden Gleichungen vertauscht, die nämliche Resultante herauskommen wird. Gelänge dies, so wäre in der That der Beweis der Symmetrie von R erbracht, indem sich durch eventuell wiederholtes Vertauschen („Transposition“) von immer nur zweien der Argumente x, y, z bekanntlich jede erdenkliche Anordnung derselben würde herstellen lassen. Auffallenderweise ist es nun aber auf keine Weise möglich, die drei Gleichungen:

$$x = \varphi(a, b, c), \quad z = \varphi(b, c, a), \quad y = \varphi(c, a, b)$$

durch was immer für Vertauschungen unter den Parametern a, b, c in die vorigen dreie zu transformiren, wie es der Leser leichtlich nachweisen wird. Und die Versuche einer Beweisführung auf dem angedeuteten Wege scheinen fehlzuschlagen, auch wenn man etwa noch in Berücksichtigung zieht, dass es von vornherein gleichgültig gewesen, in welcher Reihenfolge man die Argumente der Funktion φ ansetzen mochte. Die Funktion $\varphi(a, b, c)$ hätte man ja z. B. auch $\Phi(a, c, b)$ nennen können. Allerdings, wenn man b

mit c vertauscht und dazu das zweite Argument mit dem dritten, so gehen die drei letzten Gleichungen in der That in die drei vorigen über. Von rechtswegen heisst es dann aber durchweg nun Φ statt φ. —

Auch die Hinzuziehung der Annahme, dass die Funktion $\varphi(a, b, c)$ ausser a, b, c sonst keine Parameter enthalte — eine Annahme, die sich übrigens für die Geltung des Satzes als unwesentlich erweisen wird — scheint eine aprioristische Beweisführung nicht zu fördern.

Und somit bleibt nichts übrig als den Beweis des Satzes a posteriori anzutreten, indem man die Resultante für die allgemeinste Funktion $\varphi(a, b, c)$ wirklich herstellt, und ihre Symmetrie darnach sozusagen empirisch nachweist als eine unmittelbar wahrzunehmende.

Zu dem Ende lösen wir zunächst die noch allgemeinere

Aufgabe. Die Parameter a, b, c zu eliminiren aus den drei Gleichungen:

$$x = \varphi(a, b, c), \quad y = \psi(a, b, c), \quad z = \chi(a, b, c),$$

wo φ, ψ, χ irgendwelche Funktionen im identischen Kalkul sind.

Auflösung. Man hat „entwickelt“:

$$\varphi(a, b, c) = \varphi_{111} abc + \varphi_{110} abc_1 + \varphi_{101} ab_1c + \varphi_{100} ab_1c_1 +$$
$$+ \varphi_{011} a_1bc + \varphi_{010} a_1bc_1 + \varphi_{001} a_1b_1c + \varphi_{000} a_1b_1c_1,$$

analog für ψ und χ, worin nun also die Koeffizienten als gegeben zu denken sind in Gestalt von irgendwelchen Gebiets- oder Klassensymbolen.

Bezeichnen wir *bei diesen Koeffizienten* die Negation durch übergesetzten Horizontalstrich, so ist ferner:

$$\varphi_1(a, b, c) = \overline{\varphi}_{111} abc + \overline{\varphi}_{110} abc_1 + \overline{\varphi}_{101} ab_1c + \overline{\varphi}_{100} ab_1c_1 +$$
$$+ \overline{\varphi}_{011} a_1bc + \overline{\varphi}_{010} a_1b_1c + \overline{\varphi}_{101} a_1b_1c + \varphi_{000} a_1b_1c_1,$$

analog für ψ und χ.

Vereinigte Gleichung der Prämissen ist nun:

$$x_1\varphi + x\varphi_1 + y_1\psi + y\psi_1 + z_1\chi + z\chi_1 = 0,$$

wo die linke Seite nun leichtlich nach den a, b, c geordnet sich schreiben liesse. Man liest indess die Koeffizienten der verschiedenen Konstituenten schon bequem aus den für φ und φ_1 gemachten Angaben heraus. Resultante der Elimination von a, b, c ist das Produkt dieser Koeffizienten $= 0$ gesetzt, mithin:

$$0 = (x_1\varphi_{111} + x\overline{\varphi}_{111} + y_1\psi_{111} + y\overline{\psi}_{111} + z_1\chi_{111} + z\overline{\chi}_{111})(x_1\varphi_{110} + x\overline{\varphi}_{110} + y_1\psi_{110} + y\overline{\psi}_{110} + z_1\chi_{110} + z\overline{\chi}_{110}) \cdot$$
$$\cdot (x_1\varphi_{101} + x\overline{\varphi}_{101} + y_1\psi_{101} + y\psi_{101} + z_1\chi_{101} + z\overline{\chi}_{101})(x_1\varphi_{100} + x\overline{\varphi}_{100} + y_1\psi_{100} + y\overline{\psi}_{100} + z_1\chi_{100} + z\overline{\chi}_{100}) \cdot$$
$$\cdot (x_1\varphi_{011} + x\overline{\varphi}_{011} + y_1\psi_{011} + y\psi_{011} + z_1\chi_{011} + z\chi_{011})(x_1\varphi_{010} + x\overline{\varphi}_{010} + y_1\psi_{010} + y\overline{\psi}_{010} + z_1\chi_{010} + z\chi_{010}) \cdot$$
$$\cdot (x_1\varphi_{001} + x\overline{\varphi}_{001} + y_1\psi_{001} + y\overline{\psi}_{001} + z_1\chi_{001} + z\overline{\chi}_{001})(x_1\varphi_{000} + x\overline{\varphi}_{000} + y_1\psi_{000} + y\overline{\psi}_{000} + z_1\chi_{000} + z\overline{\chi}_{000}).$$

Diese Resultante soll jetzt noch nach den Argumenten x, y, z entwickelt werden. Man erhält unschwer:

$$\begin{aligned}
0 = {} & xyz(\bar\varphi_{111}+\bar\psi_{111}+\bar\chi_{111})(\bar\varphi_{110}+\bar\psi_{110}+\bar\chi_{110})(\bar\varphi_{101}+\bar\psi_{101}+\bar\chi_{101})(\bar\varphi_{100}+\bar\psi_{100}+\bar\chi_{100})\cdot \\
& \cdot(\bar\varphi_{011}+\bar\psi_{011}+\bar\chi_{011})(\bar\varphi_{010}+\bar\psi_{010}+\bar\chi_{010})(\bar\varphi_{001}+\bar\psi_{001}+\bar\chi_{001})(\bar\varphi_{000}+\bar\psi_{000}+\bar\chi_{000})+ \\
& + xyz_1(\bar\varphi_{111}+\bar\psi_{111}+\chi_{111})(\bar\varphi_{110}+\bar\psi_{110}+\chi_{110})(\bar\varphi_{101}+\bar\psi_{101}+\chi_{101})(\bar\varphi_{100}+\bar\psi_{100}+\chi_{100})\cdot \\
& \cdot(\bar\varphi_{011}+\bar\psi_{011}+\chi_{011})(\bar\varphi_{010}+\bar\psi_{010}+\chi_{010})(\bar\varphi_{001}+\bar\psi_{001}+\chi_{001})(\bar\varphi_{000}+\bar\psi_{000}+\chi_{000})+ \\
& + xy_1z(\bar\varphi_{111}+\psi_{111}+\bar\chi_{111})(\bar\varphi_{110}+\psi_{110}+\bar\chi_{110})(\bar\varphi_{101}+\psi_{101}+\bar\chi_{101})(\bar\varphi_{100}+\psi_{100}+\bar\chi_{100})\cdot \\
& \cdot(\bar\varphi_{011}+\psi_{011}+\bar\chi_{011})(\bar\varphi_{010}+\psi_{010}+\bar\chi_{010})(\bar\varphi_{001}+\psi_{001}+\bar\chi_{001})(\bar\varphi_{000}+\psi_{000}+\bar\chi_{000})+ \\
& + xy_1z_1(\bar\varphi_{111}+\psi_{111}+\chi_{111})(\bar\varphi_{110}+\psi_{110}+\chi_{110})(\bar\varphi_{101}+\psi_{101}+\chi_{101})(\bar\varphi_{100}+\psi_{100}+\chi_{100})\cdot \\
& \cdot(\bar\varphi_{011}+\psi_{011}+\chi_{011})(\bar\varphi_{010}+\psi_{010}+\chi_{010})(\bar\varphi_{001}+\psi_{001}+\chi_{001})(\bar\varphi_{000}+\psi_{000}+\chi_{000})+ \\
& + x_1yz(\varphi_{111}+\bar\psi_{111}+\bar\chi_{111})(\varphi_{110}+\bar\psi_{110}+\bar\chi_{110})(\varphi_{101}+\bar\psi_{101}+\bar\chi_{101})(\varphi_{100}+\bar\psi_{100}+\bar\chi_{100})\cdot \\
& \cdot(\varphi_{011}+\bar\psi_{011}+\bar\chi_{011})(\varphi_{010}+\bar\psi_{010}+\bar\chi_{010})(\varphi_{001}+\bar\psi_{001}+\bar\chi_{001})(\varphi_{000}+\bar\psi_{000}+\bar\chi_{000})+ \\
& + x_1yz_1(\varphi_{111}+\bar\psi_{111}+\chi_{111})(\varphi_{110}+\bar\psi_{110}+\chi_{110})(\varphi_{101}+\bar\psi_{101}+\chi_{101})(\varphi_{100}+\bar\psi_{100}+\chi_{100})\cdot \\
& \cdot(\varphi_{011}+\bar\psi_{011}+\chi_{011})(\varphi_{010}+\bar\psi_{010}+\chi_{010})(\varphi_{001}+\bar\psi_{001}+\chi_{001})(\varphi_{000}+\bar\psi_{000}+\chi_{000})+ \\
& + x_1y_1z(\varphi_{111}+\psi_{111}+\bar\chi_{111})(\varphi_{110}+\psi_{110}+\bar\chi_{110})(\varphi_{101}+\psi_{101}+\bar\chi_{101})(\varphi_{100}+\psi_{100}+\bar\chi_{100})\cdot \\
& \cdot(\varphi_{011}+\psi_{011}+\bar\chi_{011})(\varphi_{010}+\psi_{010}+\bar\chi_{010})(\varphi_{001}+\psi_{001}+\bar\chi_{001})(\varphi_{000}+\psi_{000}+\bar\chi_{000})+ \\
& + x_1y_1z_1(\varphi_{111}+\psi_{111}+\chi_{111})(\varphi_{110}+\psi_{110}+\chi_{110})(\varphi_{101}+\psi_{101}+\chi_{101})(\varphi_{100}+\psi_{100}+\chi_{100})\cdot \\
& \cdot(\varphi_{011}+\psi_{011}+\chi_{011})(\varphi_{010}+\psi_{010}+\chi_{010})(\varphi_{001}+\psi_{001}+\chi_{001})(\varphi_{000}+\psi_{000}+\chi_{000}). \text{ —}
\end{aligned}$$

Sei nun insbesondere:

$$\psi(a, b, c) = \varphi(b, c, a), \qquad \chi(a, b, c) = \varphi(c, a, b),$$

mithin

$$\begin{aligned}
\psi(a, b, c) &= \varphi_{111}abc + \varphi_{101}abc_1 + \varphi_{011}ab_1c + \varphi_{001}ab_1c_1 + \\
&\quad + \varphi_{110}a_1bc + \varphi_{100}a_1bc_1 + \varphi_{010}a_1b_1c + \varphi_{000}a_1b_1c_1, \\
\chi(a, b, c) &= \varphi_{111}abc + \varphi_{011}abc_1 + \varphi_{110}ab_1c + \varphi_{010}ab_1c_1 + \\
&\quad + \varphi_{101}a_1bc + \varphi_{001}a_1bc_1 + \varphi_{100}a_1b_1c + \varphi_{000}a_1b_1c_1,
\end{aligned}$$

oder also:

$$\begin{array}{llll}
\psi_{111} = \varphi_{111}, & \psi_{110} = \varphi_{101}, & \psi_{101} = \varphi_{011}, & \psi_{100} = \varphi_{001}, \\
\psi_{011} = \varphi_{110}, & \psi_{010} = \varphi_{100}, & \psi_{001} = \varphi_{010}, & \psi_{000} = \varphi_{000}, \\
\chi_{111} = \varphi_{111}, & \chi_{110} = \varphi_{011}, & \chi_{101} = \varphi_{110}, & \chi_{100} = \varphi_{010}, \\
\chi_{011} = \varphi_{101}, & \chi_{010} = \varphi_{001}, & \chi_{001} = \varphi_{100}, & \chi_{000} = \varphi_{000},
\end{array}$$

desgleichen mit übergesetzten Horizontalstrichen, so erhalten wir durch diese Einsetzungen als die Resultante der Elimination von a, b, c aus den drei Gleichungen:

$$x = \varphi(a, b, c) \qquad y = \varphi(b, c, a), \qquad z = \varphi(c, a, b)$$

die nachstehende Gleichung:

$$0 = xyz\cdot\bar\varphi_{111}(\bar\varphi_{110}+\bar\varphi_{101}+\varphi_{011})(\bar\varphi_{100}+\bar\varphi_{010}+\bar\varphi_{001})\bar\varphi_{000}+$$
$$+xyz_1(\bar\varphi_{110}+\bar\varphi_{101}+\varphi_{011})(\bar\varphi_{101}+\bar\varphi_{011}+\varphi_{110})(\varphi_{100}+\bar\varphi_{001}+\varphi_{010})(\varphi_{011}+\bar\varphi_{110}+\varphi_{101})\cdot$$
$$\cdot(\bar\varphi_{010}+\bar\varphi_{100}+\varphi_{001})(\bar\varphi_{001}+\bar\varphi_{010}+\varphi_{100})+$$
$$+xy_1z(\bar\varphi_{110}+\varphi_{011}+\varphi_{101})(\bar\varphi_{101}+\bar\varphi_{110}+\varphi_{011})(\varphi_{100}+\varphi_{010}+\varphi_{001})(\bar\varphi_{011}+\bar\varphi_{101}+\varphi_{110})\cdot$$
$$\cdot(\bar\varphi_{010}+\bar\varphi_{001}+\varphi_{100})(\bar\varphi_{001}+\bar\varphi_{100}+\varphi_{010})+$$
$$+xy_1z_1(\bar\varphi_{110}+\varphi_{101}+\varphi_{011})(\bar\varphi_{101}+\varphi_{011}+\varphi_{110})(\bar\varphi_{100}+\varphi_{001}+\varphi_{010})(\bar\varphi_{011}+\varphi_{110}+\varphi_{101})$$
$$\cdot(\bar\varphi_{010}+\varphi_{100}+\varphi_{001})(\bar\varphi_{001}+\varphi_{010}+\varphi_{100})+$$
$$+x_1yz(\bar\varphi_{101}+\varphi_{011}+\varphi_{110})(\bar\varphi_{011}+\bar\varphi_{110}+\varphi_{101})(\varphi_{001}+\varphi_{010}+\varphi_{100})(\bar\varphi_{110}+\bar\varphi_{101}+\varphi_{011})\cdot$$
$$\cdot(\bar\varphi_{100}+\bar\varphi_{001}+\varphi_{010})(\bar\varphi_{010}+\bar\varphi_{100}+\varphi_{001})+$$
$$+x_1yz_1(\varphi_{101}+\varphi_{110}+\varphi_{011})(\bar\varphi_{011}+\varphi_{101}+\varphi_{110})(\bar\varphi_{001}+\varphi_{100}+\varphi_{010})(\bar\varphi_{110}+\varphi_{011}+\varphi_{101})\cdot$$
$$\cdot(\bar\varphi_{100}+\varphi_{010}+\varphi_{001})(\bar\varphi_{010}+\varphi_{001}+\varphi_{100})+$$
$$+x_1y_1z(\bar\varphi_{011}+\varphi_{110}+\varphi_{101})(\bar\varphi_{110}+\varphi_{101}+\varphi_{011})(\bar\varphi_{010}+\varphi_{100}+\varphi_{001})(\varphi_{101}+\varphi_{011}+\varphi_{110})\cdot$$
$$\cdot(\bar\varphi_{001}+\varphi_{010}+\varphi_{100})(\bar\varphi_{100}+\varphi_{001}+\varphi_{010})+$$
$$+x_1y_1z_1\cdot\varphi_{111}(\varphi_{110}+\varphi_{101}+\varphi_{011})(\varphi_{100}+\varphi_{010}+\varphi_{001})\varphi_{000};$$

hierbei wurde lediglich Gebrauch gemacht von den Tautologiegesetzen 14), dem Th. 30_+) $\varphi + \varphi = 1$, 22_+) $a + 1 = 1$ und $21_\times$) $a \cdot 1 = a$.

Beachtet man überdies, dass die Koeffizienten von xyz_1, xy_1z und x_1yz die nämlichen sind, desgleichen sich als einerlei herausstellen die Koeffizienten von xy_1z_1, x_1yz_1 und x_1y_1z, so treten weitere Vereinfachungen ein. In diesen Koeffizienten lassen zudem nach dem Schema:

$$(\alpha_1 + \beta + \gamma)(\alpha + \beta_1 + \gamma)(\alpha + \beta + \gamma_1) = \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma + \alpha_1\beta_1\gamma_1$$

noch drei und drei Faktoren sich ausmultipliziren, sodass die Resultante sich am einfachsten darstellt als:

$$0 = xyz\varphi_{111}(\bar\varphi_{110}+\varphi_{101}+\bar\varphi_{011})(\bar\varphi_{100}+\bar\varphi_{010}+\bar\varphi_{001})\varphi_{000}+$$
$$+(x_1yz+xy_1z+xyz_1)(\varphi_{110}\bar\varphi_{011}+\bar\varphi_{110}\varphi_{101}+\bar\varphi_{101}\bar\varphi_{011}+\varphi_{110}\varphi_{101}\varphi_{011})\cdot$$
$$\cdot(\bar\varphi_{100}\bar\varphi_{001}+\bar\varphi_{100}\bar\varphi_{010}+\bar\varphi_{010}\bar\varphi_{001}+\varphi_{100}\varphi_{010}\varphi_{001})+$$
$$+(xy_1z_1+x_1yz_1+x_1y_1z)(\varphi_{110}\varphi_{011}+\varphi_{110}\varphi_{101}+\varphi_{101}\varphi_{011}+\bar\varphi_{110}\bar\varphi_{101}\bar\varphi_{011})\cdot$$
$$\cdot(\varphi_{100}\varphi_{001}+\varphi_{100}\varphi_{010}+\varphi_{010}\varphi_{001}+\varphi_{100}\bar\varphi_{010}\bar\varphi_{001})+$$
$$+x_1y_1z_1\varphi_{111}(\varphi_{110}+\varphi_{101}+\varphi_{011})(\varphi_{100}+\varphi_{010}+\varphi_{001})\varphi_{000}.$$

Die Symmetrie derselben in Bezug auf x, y, z ist nun ersichtlich.

Ersetzen wir die Namen der Argumente a, b, c durch die griechischen Buchstaben α, β, γ um die lateinischen Buchstaben frei zu bekommen für andre Zwecke, so empfiehlt es sich noch, die zwar ausdrucksvolle, doch etwas schwerfällige Bezeichnung der bisherigen Koeffizienten von φ durch die darunter gesetzten Zeichen zu ersetzen:

$$\begin{matrix}\varphi_{111}, & \varphi_{110}, & \varphi_{101}, & \varphi_{100}, & \varphi_{011}, & \varphi_{010}, & \varphi_{001}, & \varphi_{000} \\ a, & b, & c, & d, & e, & f, & g, & h.\end{matrix}$$

Als Resultante der Elimination von α, β, γ aus den drei Gleichungen:

$$x = a\alpha\beta\gamma + b\alpha\beta\gamma_1 + c\alpha\beta_1\gamma + d\alpha\beta_1\gamma_1 + e\alpha_1\beta\gamma + f\alpha_1\beta\gamma_1 + g\alpha_1\beta_1\gamma + h\alpha_1\beta_1\gamma_1,$$

$$y = a\beta\gamma\alpha + \cdots, \quad z = a\gamma\alpha\beta + \cdots$$

ist dann gefunden:

$$0 = xyza_1(b_1 + c_1 + e_1)(d_1 + f_1 + g_1)h_1 +$$
$$+ (x_1yz + xy_1z + xyz_1)(b_1e_1 + b_1c_1 + c_1e_1 + bce)(d_1g_1 + d_1f_1 + f_1g_1 + dfg) +$$
$$+ (xy_1z_1 + x_1yz_1 + x_1y_1z)(be + bc + ce + b_1c_1e_1)(dg + df + fg + d_1f_1g_1) +$$
$$+ x_1y_1z_1a(b + c + e)(d + f + g)h.$$

Soll sich dies in

$$0 = xyz + x_1y_1z_1$$

zusammenziehen — wie es doch der Fall sein müsste, wenn diese Gleichung eine symmetrisch-allgemeine Lösung $x = \varphi(\alpha, \beta, \gamma)$, etc. in drei arbiträren Parametern α, β, γ besässe — so müssen der erste und der letzte Koeffizient gleich 1 gemacht werden (durch geeignete Bestimmung von a, b, c, d, e, f, g, h) während die beiden mittleren Koeffizienten verschwinden. Jene beiden Gleichungen:

$$a_1(b_1 + c_1 + e_1)(d_1 + f_1 + g_1)h_1 = 1 = a(b + c + e)(d + f + g)h$$

geben aber durch Kontraposition:

$$a + h + bce + dfg = 0 \quad \text{und} \quad a_1 + h_1 + b_1c_1e_1 + d_1f_1g_1 = 0$$

und involviren Widersprüche miteinander, wie diesen: dass gleichzeitig $a = 0$ und $a_1 = 0$ sein müsste (desgleichen $h + h_1 = 0$, anstatt $= 1$). Vergl. auch Th. $24_\times$).

Es geht hieraus von neuem die Unmöglichkeit hervor, die Gleichung $R_2 = 0$ (und damit auch die R_6 resp. $R_6' = 0$) in drei Parametern symmetrisch allgemein zu lösen.

Literaturverzeichniss
nebst Bemerkungen.

Nachstehend gebe ich das Verzeichniss der von mir selbst benützten Literatur, noch ergänzt durch Literaturangaben aus Venn's Schrift[1] ebenda. Von diesen sollen die besternten nach ihm besonders für die symbolisirende oder rechnerische Logik von Interesse sein. Wo mir dies auf Grund eigener Überzeugung oder Einsichtnahme der Fall scheint oder mir überhaupt zum Bewusstsein gekommen, dass unmittelbar ein Werk von erheblichem Einfluss auf die Gestaltung meiner vorliegenden Schrift geworden, habe ich dasselbe meistens noch durch den Druck hervorgehoben. Von jeder Schrift, die ich zu Gesicht bekommen, findet sich die Anzahl ihrer Seiten angeführt.

Alsted, J. H. 1) Logicae systema harmonicum, 1614.

Apelt, E. F. 1) Die Theorie der Induktion, Leipzig 1854, 204 Seiten.

Aristoteles. 1) *Kategorien,* oder Lehre von den Grundbegriffen, Ed. von J. H. v. Kirchmann, „Philosophische Bibliothek", Bd. 70 und 71. Leipzig 1876, 41 + 54 Seiten.
2) *Hermeneutica,* oder Lehre vom Urteil, desgleichen 41 + 60 Seiten.
3) Erste *Analytiken,* oder Lehre vom Schluss, desgl. Bd. 72 u. 73, 1877, 150 + 260 Seiten.
4) Zweite *Analytiken,* oder Lehre vom Erkennen, Bd. 77 u. 78, 1877, 102 + 190 Seiten.
5) *Topik,* desgl. Bd. 89 u. 90, 1882, 206 + 130 Seiten.
6) Sophistische Widerlegungen, desgl. Bd. 91 u. 92, 66 + 64 Seiten — je einschliesslich der Erläuterungen v. Kirchmann's.
7) Die Metaphysik des etc. Bd. 38 u. 39, 422 + 346 Seiten.

Bachmann, C. F. 1) System der Logik, 1828.

*Bain, Alexander. 1) **Logic, 1870. Part. I. Deduction, 2. ed. London 1873, 283 Seiten, Part. II. Induction, 445 Seiten.**
2) A higher English grammar, new edition, London 1884, 358 Seiten. Im erwähnten Jahre wurde das 80ste Tausend der revised ed. ausgegeben.
3) A companion to the higher English grammar; second ed. London 1877, 358 Seiten.

*Bardili, C. G. 1) **Grundriss der ersten Logik, gereiniget von den Irrthümmern bisheriger Logiken überhaupt, der Kantischen insbesondere. Keine Kritik, sondern eine Medicina mentis, brauchbar hauptsächlich für Deutschlands kritische Philosophie. Stuttgart 1800, 360 Seiten.**

Baynes, T. S. 1) Essay on the new analytic of logical forms, 1850.

Behaghel, Otto. 1) Die deutsche Sprache. Leipzig und Prag 1886, 231 Seiten; zugleich 54. Band der deutschen Universalbibliothek für Gebildete „Das Wissen der Gegenwart."

Beneke, Friedrich Eduard. 1) System der Logik als Kunstlehre des Denkens. Berlin, Dümmler, 1842; zwei Bände mit 328 + 397 Seiten.

Bentham, George. 1) Outline of a new system of logic, 1827.

Bergmann, Julius. 1) Die Grundprobleme der Logik. Berlin 1882, 196 Seiten.

Bernoulli, Johann. 1) Parallelismus ratiocinii logici et algebraici (1685; Opera I, 214).

Binet, Alfred. 1) La psychologie du raisonnement. Recherches expérimentales par l'hypnotisme, „Bibliothèque de philosophie contemporaine", Paris 1886, 168 Seiten.

Bolzano B. 1) Logik, 1837.

Boole, George (gesprochen: Buhl).
*1) *The mathematical analysis of logic,* being an essay towards a calculus of deductive reasoning. Cambridge, Macmillan, Barclay & Macmillan, London, George Bell, 1847; 82 Seiten.
*2) The calculus of logic, „Cambridge and Dublin, Mathematical Journal", Vol. 3, 1848, p. 183 .. 198.
3) The claims of science (Lecture at Cork, 1851).
*4) *An investigation of the Laws of thought* on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities. London, Walton and Maberly, Cambridge, Macmillan & Co., 1854; 424 Seiten.
*5) Of propositions numerically definite, „Transactions of the Cambridge philosophical society", Vol. 11, p. 396 .. 411, posthum mitgeteilt von A. De Morgan.

Born, Th. 1) Über die Negation und eine notwendige Einschränkung des Satzes vom Widerspruch. Ein Beitrag zur Kritik des menschlichen Erkenntnissvermögens. Leipzig, Friedrich (ohne Jahreszahl), 91 Seiten.

Bowen, F. 1) Treatise on logic 1872.

Brentano, T. 1) Psychologie vom empirischen Standpunkte, 1874.

*Busch, M. 1) Aufangsgründe der logikalischen Algebra, Tübingen 1768.

Carrol, Lewis. 1) The game of logic, London, Macmillan 1887, cf. Rezension von Alfred Sidgwick p. 3 sq. und John Venn p. 53 sq. von „Nature" Vol. 36, 1887.

Cayley, Arthur (gespr. Keleh).
*1) Note on the calculus of logic. „The Quarterly Journal of pure and applied mathematics", Vol. 11, 1871, p. 282 sq.

2) On compound combinations, „Proceedings of the literary and philosophical society of Manchester", Vol. 16, 1876 .. 77, p. 113 .. 114.

*de Castillon, G. F. 1) *Sur un nouvel algorithme logique* 1803 (Classe de philosophie spéculative), p. 3 .. 24 der „Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres depuis l'avènement de Frédéric Guillaume III au trône 1803 avec l'histoire pour le même temps", Berlin 1805.

Chase, D. P. 1) First logic book, 1875.

Clifford, W. K.
*1) Lectures and essays, 1879.
2) „Contemporary Review", 1873.
3) *On the types of compound statement involving four classes*, „Proceedings of the Literary and Philosophical Society of Manchester", Jan. 1877, Vol. 16, p. 88 .. 101.
4) On the nature of things-in-themselves, „Mind" (A quarterly review of psychology and philosophy, ed. by Croom Robertson) Vol. 3, 1878, p. 57 .. 67.

Dalgarno, G. 1) Ars signorum, ed. 1834.

*Darjes, J. G. 1) Weg zur Wahrheit, 1776.

Dedekind, Richard.
1) *Was sind und was sollen die Zahlen?*, Braunschweig, Vieweg 1888, 58 Seiten.
2) Stetigkeit und irrationale Zahlen, Braunschweig 1872, 31 Seiten.
3) Siehe unter Dirichlet[1].

*Delboeuf, J. 1) *Logique algorithmique*. Essai sur un système de signes appliqué à la logique avec une introduction ou sont traitées les questions générales relatives à l'emploi des notations dans les sciences. Liège et Bruxelles, 1877, 99 Seiten.

De Morgan, Augustus.
1) First notions of logic (preparatory to the study of geometry). London, Taylor & Walton 1839; 32 Seiten.
*2) *Formal logic*, or the calculus of inference necessary and probable. London, Taylor and Walton, 1847; 336 Seiten.
*3) *Syllabus* of a proposed system of logic, London, Walton and Maberly 1860; 72 Seiten.
* Sodann in den „Transactions of the Cambridge Philosophical Society":
4) *On the structure of the syllogism* and its application (Nr. I) Nov. 9, 1846, Vol. 8, part 3, 1847, p. 379 .. 408.
Diese Abhandlung (Nr. 29) rief jene denkwürdige Polemik in Betreff der Selbständigkeit von De Morgan's Entdeckungen mit Sir W. Hamilton hervor, worin letzterer sie schliesslich anerkannte (Die Kontroverse begann 1846, setzte sich intermittirend im „Athenaeum" fort und kam in der „Contemporary Review" 1873 zum Abschluss) vgl. Venn[1] p. 9.
5) *On* the symbols of logic, the theory of *the syllogism* (Nr. II) and

in particular of the copula, and the application of the theory of probabilities to some questions of evidence. Febr. 25, 1850, Vol. 9, 1851, part. 1, p. 79 .. 127.

6) *On the syllogism* Nr. III and on logic in general. Febr. 8, 1858, Vol. 10, 1864, part. 1, p. 173 .. 230.
7) *On the syllogism* Nr. IV and on the logic of relations. April 23, 1860, Vol. 10, 1864, part. 2, p. 331 .. 358.
8) *On the syllogism* Nr. V and on various points of the onymatic system. May 4, 1863, Vol. 10, 1864, part. 2, p. 428 .. 487.
9) Artikel *Logic* in der „Englisch Cyclopaedia" von 1860.
10) Vergl. Boole[5].

Dieffenbach, Ludwig. 1) Der menschliche Wille und seine Grundlagen. Die Freiheit des Willens und die Zurechnung. Darmstadt 1886, 130 S. (Selbstverlag des nun verstorbenen Verfassers, C. F. Winter'sche Buchdruckerei.)

Dirichlet, Lejeune. 1) Vorlesungen über Zahlentheorie, herausgegeben und mit Zusätzen versehen von Dedekind, 3. Aufl., 2 Bände. Braunschweig 1879, 627 Seiten.

*Drobisch, Moritz Wilhelm. 1) Neue Darstellung der Logik nach ihren einfachsten Verhältnissen mit Rücksicht auf Mathematik und Naturwissenschaften. Vierte Auflage. Leipzig, L. Voss, 1875, 244 Seiten. Inzwischen ist eine fünfte Auflage erschienen.

Du Bois Reymond, Emil. 1) Reden. Erste Folge, Leipzig 1886, 550 Seiten (darin: Die sieben Welträthsel, p. 381 .. 411), 2. Folge, ibid. 1887, 589 Seiten.

*Ellis, A., J. 1) On the algebraical analogues of logical relations, „Proceedings of the Royal Society of London", Vol. 21, p. 497 sq.

Ellis, R. L. 1) Edition of Bacon's works, 1858.
*2) Mathematical and other writings 1863.

Erdmann, J. E. 1) Geschichte der neueren Philosophie 1834 .. 53.

Euler, Leonhard.
1) Briefe an eine deutsche Fürstinn über verschiedene Gegenstände aus der Naturlehre. Nach der Ausgabe von Condorcet und de la Croix, übers. von F. Kries. Leipzig 1792 .. 94, 3 Bde. von 547 + 384 + 424 Seiten. Das Original führt den Titel: Lettres à une princesse d'Allemagne sur quelque sujets de physique et de philosophie, 1768 .. 72 — daselbst vergleiche II p. 106, Lettre 102 .. 105 — auch existirt eine englische Ausgabe: Letters to a German Princess, Ed. Brewster, 1823.

Franklin, Frau, s. Ladd.

Frege, Gottlob.

*1) *Begriffsschrift*, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens. Halle a. S. L. Nebert, 1879, 88 Seiten.

2) Anwendungen der Begriffsschrift, Vortrag. In den Sitzungsberichten der Jenaischen Gesellschaft für Medicin und Naturwissenschaften, 1879; 5 Seiten.

3) Über den Zweck der Begriffsschrift, ibid. Jan. 1882, p. 1 .. 10.

4) Die Grundlagen der Arithmetik, eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl, Breslau 1884, 119 Seiten.

Diese Schrift enthält manch' kritischen Seitenblick auf mein Buch[1] (siehe unter Schröder); indess vermag ich nicht zu finden, dass der Verfasser demselben sonderlich gerecht geworden. So z. B. gründet er selbst seine Begriffserklärung der „Anzahl" von Einheiten einer Menge auf den besonders von ihm erklärten Begriff „gleichzahlig" und bittet, p. 79, dies Wort als eine willkürlich gewählte Bezeichnungsweise zu betrachten deren Bedeutung nicht der sprachlichen Zusammensetzung sondern jener Erklärung zu entnehmen ist — ansonst ja in der That ein circulus in definiendo vorliegen würde. Die gleiche Rücksicht aber lässt Herr Frege keineswegs auch mir angedeihen, indem er (p. 28) bemängelt, dass in meiner Definition der Anzahl das Wort „Häufigkeit" nur ein andrer Ausdruck für Anzahl sei, ohne dessen Erwähnung zu thun, dass daneben auch meinerseits der Begriff „gleichhäufig" („von gleicher Häufigkeit") seine strenge Erklärung selbständig gefunden. p. VIII findet es Herr Frege „ergötzlich", dass ich unter der Überschrift „Einziges Axiom" auf die „Permanenz der Zeichen" hingewiesen, ein Vergnügen, das ich gern ihm lasse; die Ausstellung trifft nur das (von mir beliebte) Wort „Axiom", womit ich glaubte und noch glaube, eine Voraussetzung oder Annahme bezeichnen zu *dürfen*, die den Beweisführungen mit zugrunde liegt — wenn sie meinetwegen auch „innere oder äussere Bedingung einer jeden Beweisführung" ist. Wesentlich wollte ich l. c. andeuten, dass jedenfalls eine *andere* Voraussetzung empirisch-synthetischer Art bei den arithmetischen Wahrheiten nicht gefordert zu werden braucht, und da auch Herr Frege zu der Überzeugung gelangt, dass die arithmetischen Wahrheiten „analytische" seien, so besteht wol in sachlicher Hinsicht hier Übereinstimmung. Über andere einzelnen meiner Aussprüche zuteil gewordene Auslegungen, mit denen ich nicht ganz einverstanden, glaube ich hinweggehen zu dürfen, sie dem Urteil Derer anheimstellend, die von denselben Kenntniss nehmen. Richtig ist (p. 63) dass ich einmal genauer hätte sagen sollen, dass ein (gewisser) „Name" zu einem gewissen „Begriffs*worte*" (anstatt „Begriffe") wird.

Gergonne, J. D.

1) *Essai de dialectique rationelle* (Gergonne's „Annales de mathématiques", Tome 7, p. 189 .. 228.

Gilman, B. J. 1) Observations in relative number with applications to the theory of probabilities, siehe „Studies in logic", p. 107 .. 125.

Grassmann, Hermann. 1) Lehrbuch der Arithmetik für höhere Lehranstalten. Berlin 1861, 220 Seiten.

Grassmann, Robert.

Die Wissenschaftslehre oder Philosophie. Zweiter Ergänzungsteil: Die Formenlehre oder Mathematik.

1) Erstes Buch: Die Grössenlehre; 52 Seiten.

*2) Zweites Buch: *Die Begriffslehre oder Logik;* 43 Seiten. Stettin, R. Grassmann, 1872.

*Günther Sigmund. 1) „Vierteljahrschrift für wissenschaftliche Philosophie", 1879.

Halsted, George Bruce.
*1) 1_a) Boole's logical method, „The Journal of speculative philosophy" (edited by Wm. T. Harris, St. Louis MO.). Vol. 12, 1878, Nr. 1, p. 81 .. 91.
1_b) Statement and reduction of syllogism, ibid. Nr. 4, p. 418 .. 426.
1_c) Algorithmic division in logic, ibid. Vol. 13, 1879. Nr. 1, p. 107 .. 112.
2) The modern logic. ibid. April 1883, Vol. 17, Nr. 2, p. 210 .. 213.
3) De Morgan as logician, ibid. Vol. 18, Nr. 1, p. 1 .. 9.
*4) Algebras, spaces, logics, „Popular science monthly", Aug. 1880.

Hamilton, W. 1) Lectures on Logic, 1860.
2) Discussions on philosophy, 1866.

Hamilton, William Rowan. 1) Elements of Quaternions, 1866.

Hankel, Hermann. 1) Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihre Functionen. Theorie der complexen Zahlensysteme etc. Leipzig 1867, 196 Seiten.

Harley, Robert.
*1) „British Quarterly Review", July 1866.
*2) On Boole's laws of thought, „Report of the British Association" 1866, p. 3 .. 6 der Notices and abstracts, und 1870, p. 14 sq.
3) Remarks on Mr. Murphy's paper[3], „Proceedings of the Literary and philosophical society of Manchester", Vol. 23, 1884, p. 36 .. 40.

Harms, Friedrich. 1) Logik. Aus dem h. Nachlasse des Verf. herausgegeben von Heinrich Wiese, Leipzig 1886, 308 Seiten.

Hauber, F. C. 1) Scholae logico-mathematicae, 1829.

v. Helmholtz. 1) Vorträge und Reden. 1. Bd. Braunschweig 1884, 396 Seiten, 2. Bd. ibid. 380 Seiten, darin: Die Thatsachen in der Wahrnehmung (1878) p. 217 .. 251 — auch separat erschienen.

Herbart, J. F. 1) Einleitung in die Philosophie. Vierte Aufl. 1850.

Hoffbauer, J. C. 1) Analytik der Urtheile und Schlüsse. 1792.

*v. Holland, Georg Jonathan. 1) Abhandlung über die Mathematik, die allgemeine Zeichenkunst und die Verschiedenheit der Rechnungsarten, 1764.

*Hughlings, J. P. The logic of names, an introduction to Boole's Laws of thought, 1869.

Ingleby, C. M. 1) Outlines of theoretical logic, 1856.

Itelson, Gregor. 1) Zur Geschichte des psychophysischen Problems, Stein's „Archiv für Geschichte der Philosophie", 1889, Bd. 3, p. 282 .. 290

Jevons, William Stanley (gespr. Dschihwns).

*1) *Pure logic*, or the logic of quality apart from quantity: with remarks on Boole's system and on the relation of logic and mathematics. London, E. Stanford, 1864; 87 Seiten.

*2) *The substitution of similars*, the true principal of reasoning, derived from a modification of Aristotle's dictum. London, Macmillan & Co., 1869; 86 Seiten.

3) On a general system of numerically definite reasoning, 1870, Vol. 4 der 3^d Series der „Memoirs of the literary and philosophical society of Manchester", 1871, p. 330 .. 352.

4) On the mechanical performance of logical inference, „Philosophical Transactions of the Royal society of London", 1870, Vol. 160, p. 497 ... 518.

5) Primer of logic. With illustrations and questions — unter den „Science primers" London, Macmillan 1876, erschienen.

6) *Elementary lessons in logic:* deductive and inductive. With copious questions and examples and a vocabulary of logical terms. 7th Edition. London, Macmillan & Co. 1878; 340 Seiten.

7) Lessons in logic, inductive and deductive. With numerous illustrations, London, Macmillan & Co., 3^sh. 6^d; 2^d Ed. (laut Buchhändleranzeige).

*8) *The principles of science.* A treatise on logic and scientific method. 3^d Ed. London, Macmillan & Co. 1879; 786 Seiten. (Erste Ausgabe 1874, 2 Bände.)

*9) *Studies in deductive logic.* A manual for students. London, Macmillan & Co. 1880, 304 Seiten.

10) On the inverse, or inductive, logical problem, 1871, „Memoirs of the literary and philosophical society of Manchester", 3^d series, Vol. 5, 1876, p. 119 .. 130.

11) Who discovered the quantification of the predicate? „The Contemporary Review" 1873, Vol. 21, p. 821 .. 824.

Kant, Immanuel

1) Logik. Ein Handbuch zu Vorlesungen, herausgegeben von G. B. Jäsche; erläutert von J. H. v. Kirchmann, 2. Aufl., Leipzig 1876, 164 Seiten.

2) Die falsche Spitzfindigkeit der vier syllogistischen Figuren, 1762, Ed. Rosenkranz von Kant's Werken, Leipzig 1838, Bd. 1, p. 57 .. 74.

3) Kritik der reinen Vernunft, Ed. v. Kirchmann, 2. Aufl. Berlin 1870, 720 Seiten.

Keller, Julius. 1) Der Ursprung der Vernunft. Eine kritische Studie über Lazarus Geiger's Theorie von der Entstehung des Menschengeschlechts. Heidelberg 1884, 220 Seiten.

Keynes, John Neville. 1) Studies and exercises in formal logic, including a generalisation of logical processes in their application to complex inferences, London, Macmillan 1884, 414 Seiten.

2) Matter of fact logic, „Mind", Vol. 4, p. 120 .. 122.

3) On the position of formal logic, ibid. p. 362 .. 375.

Kircher, Athanasius. 1) Ars magna sciendi, 1631.

v. Kries, Johannes. 1) Die Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung, eine logische Untersuchung. Freiburg i. B. 1886, 298 Seiten.

Kvêt, F. B. 1) Leibnizen's Logik, 1857.

Ladd, Christine (Frau Fabian Franklin).
1) *On the algebra of logic,* siehe unter „Studies in logic" p. 17 .. 71.
2) *On some characteristics of symbolic logic,* „American Journal of psychology" edited by G. Stanley Hall, Worcester 1889, Vol. 2, p. 543 .. 567.
3) *Some proposed reforms in common logic,* „Mind", January 1890. p. 75 .. 88.
4) Aufgaben in den „Mathematical Questions".

Lambert, Johann Heinrich.
*1) Neues Organon, oder Gedanken über die Erforschung und Bezeichnung des Wahren und dessen Unterscheidung vom Irrthum und Schein, 2 Bde., Leipzig 1764, 592 + 436 Seiten.
*2) „Nova acta eruditorum" 1765.
*3) Logische und philosophische Abhandlungen, 1781.
*4) Deutscher gelehrter Briefwechsel, herausg. von J. Bernoulli, 4 Bde, 1782 .. 84.
5) Anlage zur Architectonic, oder Theorie des Ersten und des Einfachen in der philosophischen und mathematischen Erkenntniss, 2 Bde, Riga 1771, 376 + 560 Seiten.

Lange, Friedrich Albert.
1) *Logische Studien.* Ein Beitrag zur Neubegründung der formalen Logik und der Erkenntnisstheorie. Iserlohn 1877, 149 Seiten.

Lange, J. C. 1) Nucleus logicae Weisianae, 1712.
2) Inventum novum quadratilogici.

Latham, R. G. 1) Logic in its applications to language, 1856.

Leechman, J. 1) Logic, 1864.

v. Leibniz, Gottfried Wilhelm.
*1) Opera philosophica, Erdmann's Ed. 1840.

Liard, Louis.
*1) *Les logiciens anglais contemporains.* 2me Edit. Paris, Germer Baillère 1883; 177 Seiten.
Unter dem Titel: „Die neuere englische Logik" auch in's Deutsche übersetzt von J. Imelmann, 2. Aufl. Leipzig, Denicke, 1883, 153 Seiten.

Liebmann, Otto.
1) Zur Analysis der Wirklichkeit, Philosophische Untersuchungen, Strassburg, K. J. Trübner, 1876; 619 Seiten. (Inzwischen in zweiter Auflage erschienen.)

Lindsay, T. M. 1) Ueberweg's logic, 1871.

Lipschitz, Rudolf. 1) Lehrbuch der Analysis. 1. Band, Grundlagen d. A., Bonn 1877; 594 Seiten. (2. Bd. Diff.- und Integralrechnung, Bonn 1880; 734 Seiten.)

Lotze, Hermann.

1) Logik. Drei Bücher vom Denken, vom Untersuchen und vom Erkennen. Zweite Aufl. Leipzig, Hirzel, 1880; 608 Seiten.
2) Metaphysik. Drei Bücher der Ontologie, Kosmologie und Psychologie. Ibid. 1879; 604 Seiten.

Maass, J. G. E. 1) Grundriss der Logik, 1793.

Macfarlane, Alexander (gesprochen: Mkfárlehn).

*1) *Principles of the algebra of logic,* with examples, Edinbourgh, D. Douglas, 1879; 155 Seiten.
*2) *On a calculus of relationship.* Part I. „Proceedings of the Royal Society of Edinbourgh", Vol. 10, p. 224 .. 232, May 1879.
3) *Algebra of relationship.* Part II. ibid. Vol. 11. p. 5 .. 13, Dec. 1880.
4) *Desgl.* Part III. ibid. Vol. 11, p. 162 .. 173, March 1881.
5) *An analysis of relationship.* „Philosophical Magazine", June 1881, p. 436 .. 446.
6) Analysis of relationships applied to various problems. „Journal of the anthropological Institute", London 1882.
7) *Analysis of relationships,* of consanguinity and affinity. London, Harrisons & Sons, 1882, 18 Seiten.
8) Besprechung von Kant's critique of pure reason: translated into English bei F. Max Müller, 2 vols. London, Macmillan — „Philosophical Magazine", June 1882, p. 1 .. 4.
9) *The logical spectrum,* „Philos. Mag.", April 1885, p. 286 .. 289.
10) Aufgaben in der „Educational Times", cf. „Math. Questions".

*Maimon, Salomon. 1) Versuch einer neuen Logik 1794.

Mansel, H. L. 1) Prolegomena logica 1860. 2) Aldrich, 1862.

McColl, Hugh (gesprochen: Hjuh Măkohl).

*1) *The calculus of equivalent statements and integration limits.* („Proceedings of the London Mathematical Society", Vol. 9, 1877 .. 78, p. 9 .. 20.
*2) *The calculus of equivalent statements* (second paper), ibid. p. 177 .. 186.
*3) *Desgl.* (third paper), ibid. Vol. 10, 1878, p. 16 .. 28.
*4) *Desgl.* (fourth paper), ibid. Vol. 11, 1880, p. 113 .. 121.
5) A note on prof. C. S. Peirce's probability notation of 1867, ibid. Vol. 12, p. 102.
*6) Symbolical reasoning, „Mind", Jan. 1880, Vol. 5, p. 45 .. 60.
7) On the growth and use of a symbolical language, „Proceedings of the literary and philosophical society of Manchester", 1881, Vol. 20, p. 103.
8) Aufgaben in den „Math. Questions", und der „Educational Times".

Marquand, Allan.
1) The logic of the Epicureans, siehe „Studies in logic“, p. 1 .. 11.
2) A machine for producing syllogistic variations, mit Note on an eight-term logical machine. Ibid. p. 12 .. 16.
3) A new logical machine, Proceed. Americ. Acad. Vol. 21, p. 303 .. 307.

Mill, John Stuart.
1) *System of logic,* ratiocinative and inductive 8th ed. (Zuletzt 9th ed. erschienen.)
2) Dasselbe in deutscher Ausgabe, als „System der deductiven und inductiven Logik“ von J. Schiel, Braunschweig, Vieweg, 1868, 3. Aufl., 573 + 586 Seiten. Die Citate beziehen sich auf Bd. 1 der 5. Aufl. der Übersetzung.
3) Examination of Sir W. Hamilton's Philosophy, 1865.

Mitchell, O. H.
1) *On a new algebra of logic.* Siehe „Studies in logic“, p. 72 .. 106.

Müller, Max.
1) Vorlesungen über die Wissenschaft der Sprache. Für das deutsche Publikum bearbeitet von Carl Böttger. Leipzig, Gust. Mayer, 1863; 400 Seiten.
2) Dasselbe in neuer Auflage, in zwei Bänden. Bd. 1, 3. Aufl. 1875, 500 Seiten, Bd. 2, 2. Aufl. 1870, 636 Seiten.
3) The science of thought, unter dem Titel: „Das Denken im Lichte der Sprache“, übersetzt von Engelbert Schneider, Leipzig 1888, 607 Seiten.
4) No language without reason — no reason without language, „Nature“ Vol. 36, 1887, p. 249 .. 251.
5) The original intention of collective and abstract terms, „Mind“ Vol. 1, p. 345 .. 351.

Murphy, Joseph John.
*1) *Relation of logic to language,* „Belfast Natural history and philosophical society“, Febr. 1875, 21 Seiten.
*2) Fundamental logic, „Mind“, Jan. 1877, Vol. 2, p. 47 .. 55.
*3) *On an extension of the ordinary logic, connecting it with the logic of relatives.* „Proceedings of the Literary and philosophical. society of Manchester“, Vol. 19, 1880, p. 90 .. 101.
4) On the transformation of a logical proposition containing a single relative term, ibid. 1882, Vol. 21, p. 36 sq.
5) On the quantification of predicates and on the interpretation of Boole's logical symbols, ibid. 1884, Vol. 23, p. 33 .. 36.
6) On the meaning of addition and subtraction in logic, ibid. 1886, Vol. 25, p. 8 .. 16.

Peano, Giuseppe (Joseph).
1) *Calcolo geometrico* secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann, preceduto dalle operazioni della logica deduttiva, Torino, Fratelli Bocca, 1888, 170 Seiten.

2) *Arithmetices principia*, nova methodo exposita, Turin, Rom, Florenz, Fratelli Bocca, 1889, 40 Seiten.

3) *I principii di Geometria,* logicamente esposti, Saggio di .. ibid. 1889, 40 Seiten.

Die sehr beachtenswerten Schriften sind dem Verf. zu spät bekannt geworden um in diesem Bande noch eingehende Berücksichtigung zu finden. Es ist höchst frappant, in 3) z. B. eine riesige Menge von geometrischen Sätzen mitsamt deren Beweisen — fast einen Druckbogen hindurch ungefähr von Zeile zu Zeile fortschreitend — ohne jeglichen Text oder Figuren *lediglich in der Zeichensprache* dargestellt zu erblicken — nur erläutert noch durch einige ganz am Schlusse angehängte Noten nebst vorausgeschicktem Schlüssel. Die Zeichensprache ist wesentlich die unsres Klassen- und Aussagenkalkuls (mit wenigen Zufügungen), obwol äusserlich ganz eigenartig ersonnen und von der hier verfochtnen leider verschieden. Es erhellt aus ihrem Anblick, dass das S. 93 aufgestellte Ideal der Pasigraphie für die Zwecke der Wissenschaft bereits in ganz erheblichem Umfange *verwirklicht ist.* — Die Menge der sog. Axiome müsste jedenfalls noch weiter, noch sehr verringert werden. —

Peirce, Benjamin (gesprochen: Pörss).

1) Linear associative algebra, new edition with addenda and notes by Ch. S. Peirce, son of the author. New-York, Van Nostrand 1882 — Abdruck aus dem „American Journal of Mathematics", Vol. 4, p. 97 .. 229.

Peirce, Charles S(antiago).

*1) Three papers on logic, read before the American Academy of arts and sciences 1867 — siehe: „Proceedings of the American Academy of arts and sciences" Vol. 7, 1865 .. 1868:

1_a) *On an improvement in Boole's calculus of logic*, p. 250 .. 261.

1_b) On the natural classification of arguments, p. 261 .. 287.

1_c) On a new list of categories, p. 287 .. 298.

2) *Description of a notation for the logic of relatives* resulting from an amplification of the conceptions of Boole's calculus of logic. „Memoirs of the American Academy" Vol. 9, 1870, p. 317 ... 378.

3) On the application of logical analysis to multiple algebra, „Proceedings of the American Acad." 1875, Vol. 10, p. 392 .. 394.

4) Note on Grassmann's calculus of extension, ibid. 1878, Vol. 13, p. 115 sq.

*5) *On the algebra of logic,* „American Journal of Mathematics" 1880, Vol. 3, p. 15 .. 57.

6) Brief description of the algebra of relatives, 6 Seiten (wo?).

7) On the logic of number, „Amer. Journ. of Math.", Vol. 4, p. 85 .. 95.

8) *On the algebra of logic:* a contribution to the philosophy of notation. „Am. Journ. of Math." 1884, Vol. 7, p. 180 .. 202.

9) In dem Buche „Studies in logic" siehe unter S unsres Verzeichnisses:

9_a) A theory of probable inference, p. 126 .. 182.

9_b) Note A. On a limited universe of marks, p. 182 .. 187.

9_c) Note B. *The logic of relatives,* p. 187 .. 203.

*10) „Journal of speculative philosophy", Vol. 2, 1868 (three papers):

10_a) Questions concerning certain faculties claimed for man, p. 103 .. 114.

10_b) Some consequences of four incapities p. 140 .. 157.

10_c) Grounds of validity of the laws of logic. Further consequences of four incapacities p. 193 .. 208.

Ich würde diese Schriften in der Einleitung berücksichtigt haben, wenn sie mir früher zugänglich gewesen wären.

11) Upon the logic of mathematics, „Proceedings Americ. Acad.“ Vol. 7, p. 402 .. 412.

Ploucquet, Gottfried.

*1) Sammlung der Schriften, welche den logischen Kalkul des Herrn Prof. Ploucquet betreffen, Frankfurt und Leipzig, 1773 — von A. F. Bök. Nach Itelson[1]: 1776 — cf. p. 284, ibid.

2) Methodus calculandi in logicis, Francof. et Lips. 1763.

3) Godofredi Ploucquet Principia de substantiis et phaenomenis (Accedit Methodus calculandi in logicis ab ipso inventa cui praemittitur Commentatio de Arte Characteristica), Francof. et Lipsiae 1764. Die erste Auflage der „Principia“ (ohne die Beilage) ist 1753 erschienen.

4) Elementa philosophiae contemplativae, sive de scientia ratiocinandi notionibus disciplinarum fundamentalibus Deo, Universo et speciatim de Homine, Stuttgart 1778, 543 Seiten; enthält p. 37 .. 42 ein Kapitel: de Calculo logico.

Pommer, Josef. 1) Beispiele und Aufgaben zur Lehre vom kategorischen Syllogismus, Wien 1884, 36 Seiten.

Port-Royal, La logique de.

1) Edition nouvelle, avec introduction et notes suivie d'éclaircissements et d'extraits d'Aristote, Descartes, Malebranche, Spinosa, Leibnitz, Kant, Hamilton, Stuart Mill, par Alfred Fouillée. Paris, E. Belin, 1879, 456 Seiten.

Das ursprüngliche Werk: „La logique, ou l'art de penser“, bekannter unter obigem Titel, hatte zu Verfassern Arnauld und Nicole, Patres in einer neben dem Cisterciensernonnenkloster Port-Royal-des-Champs unweit Versailles (in einem Gebäude Les-Granges) gegründeten Klosterschule; es erschien 1662.

v. Prantl, Karl.

1) Geschichte der Logik im Abendlande. Vier Bände, Leipzig 1855 .. 1870, 733 + 403 + 426 + 305 Seiten.

Riehl, A.

*1) „Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Philosophie“, 1877.

2) Der philosophische Kriticismus und seine Bedeutung für die positive Wissenschaft, 2 Bände, Leipzig, 1876 .. 79, 447 + 358 Seiten.

Rüdiger, A. 1) De sensu veri et falsi, 1741.

Scheffler, Hermann.

1) Die Naturgesetze und ihr Zusammenhang mit den Prinzipien der abstrakten Wissenschaften.

* Dritter Theil. Die Theorie der Erkenntniss oder die logischen Gesetze. Leipzig 1880, 930 Seiten.

Schlötel, W. 1) Zum 4. Mai 1876. Kleine Bausteine zu einem Denk-

male. Zur Privatmittheilung an Gelehrte bestimmt. Freiburg i. Br. 1876, 206 Seiten.

S. 89 .. 114 nimmt der (auf dem Titelblatt nicht genannte) Verfasser auch einen Anlauf zu einer von ihm als „Recursionssyllogistik“ bezeichneten Symbolik (den ich aber nicht für einen glücklichen halte). Ich würde die Arbeit, ganz versteckt wie sie ist, in einem seiner vielen, zumeist gegen Professor Drobisch, die Berliner Akademie, Bibliotheksvorstände etc. gerichteten Pamphlete, sicher übersehen haben, hätte mich nicht ihr Verfasser in einer seltsamen Zuschrift auf dieselbe und darauf aufmerksam gemacht, dass ich sie bei der Grossh. Badischen Hof- und Landesbibliothek entleihen könne.

2) Die Logik, neu bearbeitet. Göttingen 1854, 118 Seiten.

*Schlosser, F. P. 1) Disputatio de sororio logices et matheseos nexu, et applicatione praeceptorum logicorum in disciplinis mathematicis, 1727.

Schopenhauer, Arthur. 1) Über die vierfache Wurzel des Satzes vom zureichenden Grunde, 3. Aufl. Leipzig 1864, 160 Seiten.

Schröder, Friedrich Wilhelm Karl Ernst.

1) Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für Lehrer und Studirende. 1 Band: Die sieben algebraischen Operationen. Leipzig, Teubner 1873, 360 Seiten.

*2) *Der Operationskreis des Logikkalkuls,* ibid. 1877, 37 Seiten — rezensirt von Adamson „Mind“, Vol. 3, p. 252 .. 255.

3) Note über den Operationskreis des Logikkalkuls, „Mathematische Annalen“ 1877, Bd. 12, p. 481 .. 484.

4) Rezension von Frege's „Begriffsschrift“ in Schlömilch's „Zeitschrift für Math. und Physik“, 1880, Bd. 25, p. 81 .. 94 der historisch-literarischen Abteilung.

5) Exposition of a logical principle, as disclosed by the algebra of logic, but overlooked by the ancient logicians, „Report of the 53[d] Meeting of the British Association held at Southport“, 1883, p. 412.

6) *Über das Eliminationsproblem im identischen Kalkul.* „Tagblatt der 58. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte in Strassburg“ 1885, p. 353 sq.

7) Tafeln der eindeutig umkehrbaren Funktionen zweier Variabeln auf den einfachsten Zahlengebieten. „Math. Annalen“ 1887, Bd. 29, p. 299 .. 317.

8) Über Algorithmen und Kalkuln. Hoppe's „Archiv für Math. und Physik“, 1887, 2. Reihe, Teil 5, p. 225 .. 278.

Leider wurde mir der Aufsatz einigermassen verunstaltet zufolge Intervenirens der Redaktion bei den Korrekturen, an die ich nicht ohne Schaudern zurückdenke. Am empfindlichsten bleibt, dass bei Erwähnung der Integrabilitätsbedingungen, p. 267, nicht nur mir die beabsichtigte Fussnote mit den ausführlichen Literaturangaben, sondern auch im Texte die gebührende Erwähnung der Namen Riemann und Paul Du Bois Reymond (neben dem von Thomae) ungeachtet aller meiner Bitten, Anerbietungen und wiederholten Vorstellungen aus erster und zweiter Korrektur gestrichen wurde. Ich muss den Leser ersuchen, vor der Lektüre die (zumeist zweimal vergebens angebrachten) Korrekturen und Verbesserungen aus den Berichtigungen des Bandes eintragen zu wollen, in welche sie wenigstens schliesslich aufgenommen erschienen.

9) *Über die Anzahl der Urteile, welche die Logik abzugeben vermag über*

zwei Begriffe, „Tagblatt der 62. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte zu Heidelberg“ 1889, p. 190.

Anlässlich genannter Versammlung wurde ich erst durch Herrn Walter Dyck auf die Schriften[2] und[3] des Herrn Peano aufmerksam gemacht, nach welchen ich auch dessen Schrift[1] erwarb. Ich ersehe aus dem Vorwort der letzteren, dass die von mir ermittelte Zahl 32767 schon Herrn Peano bekannt war und in einer allgemeineren Formel desselben enthalten ist, die ich im zweiten Bande nun begründen werde.

Schuppe, Wilhelm. 1) Erkenntnisstheoretische Logik, Bonn 1878, 701 Seiten.

*Segner, J. A. 1) Specimen logicae universaliter demonstratae, 1740.

*Semler, C. A. 1) Versuch über die combinatorische Methode, 1811.

Servois. 1) Cf. Gergonne's „Annales de Mathématiques“ Tome 5, p. 98, 111, 142, etc. wo sich die Namen „commutative“ und „distributive“ erstmalig finden.

Sigwart, Christoph.
1) *Logik.* Erster Band. Die Lehre vom Urtheil, vom Begriff und vom Schluss. Tübingen, Laupp, 1873, 420 Seiten.
2) Zweiter Band. Die Methodenlehre. Ibid. 1878, 612 Seiten.

*Solly, T. 1) Syllabus of logic, 1839.

Spalding, W. 1) Introduction to logical science, 1857.

Spottiswoode, W. 1) Remarks on some recent generalizations of algebra, „Proceedings of the London Math. society“ 1872.

Steinthal, H. 1) Der Ursprung der Sprache, im Zusammenhang mit den letzten Fragen alles Wissens, eine Darstellung, Kritik und Fortentwickelung der vorzüglichsten Ansichten. 3. Ausgabe, Berlin 1877, 374 Seiten.

Stolz, Otto.
1) Vorlesungen über allgemeine Arithmetik, nach den neueren Ansichten bearbeitet. 2 Bände, Leipzig, Teubner, 1885 .. 86; 344 + 326 Seiten.

Studies in logic by members of the Johns Hopkins University. Boston, Little, Brown & Co., 1883, 203 Seiten.

Sweet, Henry. 1) Words, logic and grammar, „Transactions of Philological society“, 1876.

Thomson, W. 1) Laws of thought, 1875.

Thoughts on logic, or the S. N. I. X. propositional theory, 1877.

*Tönnies. 1) De logicae scientiae ad exemplum arithmeticae instituenda ratione, 1752.

Trendelenburg, Adolf.
1) Logische Untersuchungen, 2 Bde, Leipzig 1870, 3. Aufl. 388 + 538 Seiten.

2) Historische Beiträge zur Philosophie, 4 Bde. Band 3, Berlin 1867, 444 Seiten.

Twesten, A. D. C. 1) Logik 1825.

Ueberweg, Friedrich.
1) System der Logik und Geschichte der logischen Lehren. 4. Aufl., Bonn, Marcus 1874, 434 Seiten.

Ulrich, J. H. 1) Institutiones logicae et metaphysicae, 1792.

Ulrici, H. „Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik", 1878.

Venn, John.
1) *Symbolic Logic,* London, Macmillan, 1881; 446 Seiten.
Wegen der ausserordentlichen Belesenheit des Verfassers, seiner sorgfältigen kritischen Anmerkungen und seiner „Historic notes" in Chapter XX, in Bezug auf die Entwickelungsgeschichte der symbolisirenden Logik eine schätzenswerte Ergänzung zum vorliegenden Buche.
2) The logic of chance, an essay on the foundations and province of the theory of probability with especial reference to its logical bearings and its application to moral and social science. 2d ed. London, Macmillan, 1876, 488 Seiten.
3) Consistency and real inference, „Mind", Vol. 1, 1876, p. 43 .. 52.
*4) Boole's logical system, ibidem p. 479 .. 491.
*5) On the diagrammatic and mechanical representation of propositions and reasonings (The London, Edinbourgh and Dublin), „Philosophical Magazine" (and Journal of Science), Vol. 10, 5th series, 1880, p. 1 .. 18.
*6) Symbolic logic, „Princeton Review", New York, Sept. 1880, p. 247 .. 267.
*7) On the various notations adopted for expressing the common propositions of logic, „Proceedings of the Cambridge Philosophical society", Dec. 1880, Vol. 4, p. 35 .. 46.
*8) On the employment of geometrical diagrams for the sensible representation of logical propositions, ibid. p. 46 .. 58.
9) The difficulties of material logic, „Mind" Vol. 4, p. 35 .. 47.
10) On the forms of logical proposition, „Mind" Vol. 5, p. 336 .. 349.
In 4) bis 8) sind einzelne Kapitel von 1) vorausbearbeitet.
11) The principles of empirical or inductive logic, Macmillan 1889, 594 Seiten.
Enthält auch viel zur formalen Logik gehöriges, u. a. schätzenswerte Angaben über Universalsprachen.

Vives, Ludwig. 1) De censura veri, 1555.

Voigt, Andreas Heinrich.
1) Die Auflösung von Urteilssystemen, das Eliminationsproblem und die Kriterien des Widerspruchs in der Algebra der Logik. Freiburger Doktordissertation, Leipzig, Alex. Danz 1890.

Waitz, Theodor. 1) Lehrbuch der Psychologie als Naturwissenschaft, Braunschweig 1849, 685 Seiten.

Weber, Heinrich. 1) Über Causalität in den Naturwissenschaften.

Rede, gehalten bei der Übergabe des Prorectorats der Albertus-Universität zu Königsberg. Leipzig, Engelmann 1881, 30 Seiten.

Weise, Chr. cf. Lange, J. C.

Wilkins, J. 1) Essay towards a real character and philosophical language, 1668.

Wolf, Christian. Psychologia empirica, 1779.

Wundt, Wilhelm.
1) *Logik.* Eine Untersuchung der Principien der Erkenntniss und der Methoden wissenschaftlicher Forschung. 1. Bd. Erkenntnisslehre, Stuttgart, Enke 1880; 586 Seiten.
2) 2. Bd. Methodenlehre, ibid. 1883; 620 Seiten.

Was die Logikliteratur überhaupt betrifft, soweit solche hier *nicht* angeführt worden, so sind schon in Ueberweg[1] und Prantl[1] die reichhaltigsten Angaben zu finden und ausserdem sei bemerkt, dass nach De Morgan[2] p. 333 — schon 1847 — die zweite Auflage von Blakey's „Essay on logic" einen Katalog von über tausend Logikschriften mit kurzer Titelangabe enthält.

Biographische Notizen über De Morgan, Boole und Jevons finden sich bei Liard[1] p. 71, 99, 147. Boole's Leben ist unter dem Titel „Homeside life of a scientific mind" in dem „University Magazine" von 1878 anonym von seiner Wittwe Mrs. Mary Boole beschrieben — vgl. über dasselbe auch Harley[1]. Über Augustus De Morgan's Leben und Schriften gibt auch die „Encyclopaedia Britannica" 9th Ed., Vol. 7, p. 64 .. 67 schätzenswerte Notizen.

Da ich die Anwendungen der Algebra der Logik auf *numerische* Probleme (im Allgemeinen) und insbesondere auf die Aufgaben der *Wahrscheinlichkeitsrechnung,* wie im Vorwort erwähnt, vorerst beiseite lassen musste, so sei zum Schlusse hier wenigstens die Literatur darüber zusammengestellt, soweit solche mir irgend zur Kenntniss gekommen. Es möchten in erwähnter Hinsicht in Betracht kommen:

Boole[4] p. 243 .. 398, (De Morgan[4] p. 393 .. 405, [5] p. 116 .. 125),

Ch. Peirce[1a], wo er Fehler Boole's berichtigt,

Macfarlane[1] sowie „Math. Questions" Vol. 32, p. 18 sq., p. 74 .. 77, Vol. 36, p. 101 sq.

Gilman[1], Elizabeth Blackwood, „Math. Questions", Vol. 29, p. 106 .. 108.

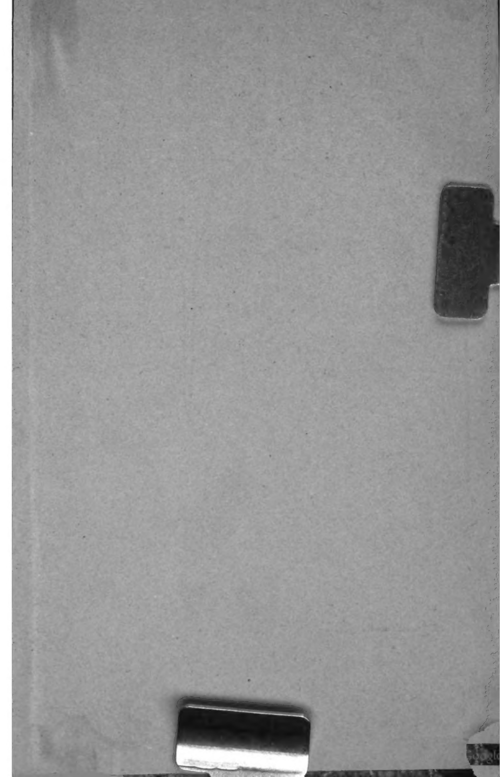
McColl[1] p. 16 .. 17, [4], sowie „Math. Questions" Vol. 29, p. 20 .. 23, p. 100, Vol. 33, p. 113.

Betreffs numerischer Syllogismen und Probleme überhaupt: Boole[5], Jevons[3] und Macfarlane und McColl, „Math. Questions" Vol. 35, p. 103 sq. Vol. 36, p. 27 sq., p. 55, p. 72.

Namenverzeichniss zum ersten Bande.

Die Zahlen hinter den Namen bedeuten die Nummer der Seite, auf welcher der Name sich erwähnt findet.






89094313210
b89094313210a